А. Н. Бородин, Предельные теоремы для суммы независимых случайных величин, определенных на возвратном случайном блуждании,
Теория вероятн. и ее примен., 1983, том 28, выпуск 1, 98–114

https://www.mathnet.ru/tvp2157

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том XXVIII 1983 Выпуск 1

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ВОЗВРАТНОМ СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДАНИИ

БОРОДИН А. Н.

Введение. В работе рассматриваются задачи, возникающие при изучении следующей схемы. Пусть по целым точкам действительной оси блуждает частица, движение которой описывается случайным блужданием ν_k, $k = 1, 2, \ldots$, и пусть в каждой целой точке i на нее оказывается случайное воздействие, результат которого выражается скалярной случайной величиной X_i. Предположим, что $\{X_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — независимые случайные величины, не зависящие от блуждания ν_k. Нас интересует предельное поведение при $n \to \infty$ величины результирующего (суммарного) воздействия на частицу за время n, т. е. величины $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_{\nu_k}$.

При $\nu_k = k$ предельное поведение S_n описывается хорошо известными результатами о поведении сумм независимых случайных величин. В случае произвольного невозвратного блуждания при условии, что величины X_i принимают два значения 0 и 1 с вероятностью α и $1 - \alpha$, асимптотическое поведение S_n изучил Уитман [1, с. 72]. Величина S_n интерпретировалась Уитманом как время пребывания невозвратного блуждания в случайном подмножестве пространства состояний. Для более широкого класса величин X_i решение задачи об асимптотическом поведении S_n в случае невозвратного блуждания содержится в работах [2] и [3].

Предельное поведение S_n для возвратного блуждания в предположении, что величины ν_1 и X_i, $-\infty < i < \infty$, имеют конечные дисперсии, рассмотрено в работе автора [4]. Независимо вопрос об асимптотическом поведении S_n рассмотрели Г. Кестен и Ф. Спицер [5]. При условии, что величины ν_1 и X_i, $-\infty < i < \infty$, принадлежат области нормального притяжения устойчивых законов с показателями β и α соответственно, $1 < \beta \leqslant 2$, $0 < \alpha \leqslant 2$, они доказали слабую сходимость случайных ломаных, построенных по точкам $(k/n, n^{-\delta} S_k)$, $\delta = 1 - \beta^{-1} + (\alpha\beta)^{-1}$.

Данная работа включает полные доказательства результатов работы [4] и содержит дальнейшие их обобщения. Использованный при доказательстве метод отличен от предложенного в [5], он опирается на результат работы автора [6], где получено предельное поведение при $n \to \infty$ числа попаданий возвратного случайного блуждания с конечной дисперсией в каждую точку пространства состояний за n шагов. Этот результат позволяет изучать более сложные варианты обсуждаемой задачи. Наряду с S_n мы рассмотрим предельное поведение величин: $\bar{S}_n$ — величины результирующего воздействия на частицу до $\varkappa_n$ — момента первого выхода частицы из полосы $(-a\sqrt{n}, b\sqrt{n})$, $a > 0$, $b > 0$, т. е. $\bar{S}_n = \sum_{k=0}^{\varkappa_n} X_{\nu_k}$; Q_n — величины результирующего воздействия на частицу до момента n

в случае, когда после первого посещения частицей точки дальнейшее воздействие на частицу в этой точке становится равным нулю, $Q_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k X_{\nu_k}$, где $\theta_k = 1$, если $\nu_l \neq \nu_k$ при $l = 0, 1, \ldots, k-1$, и $\theta_k = 0$ в противном случае; $\bar{Q}_n$ — величины результирующего воздействия в предыдущем случае до момента $\varkappa_n$, $\bar{Q}_n = \sum_{k=0}^{\varkappa_n} \theta_k X_{\nu_k}$.

До сих пор мы рассматривали ситуацию, при которой оказываемое на частицу воздействие стационарно, т. е. не меняется со временем. Непосредственное обобщение стационарной ситуации, приводящее к нестационарному воздействию, заключается в том, чтобы в момент времени k в точке i приложить воздействие, равное $b_n(k, i) X_i^{(n)}$, где $b_n(k, i)$ — неслучайные положительные величины, а $\{X_i^{(n)}\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин. Величина результирующего воздействия при этом имеет вид $I_n = \sum_{k=0}^{n} b_n(k, \nu_k) X_{\nu_k}^{(n)}$. Более интересный пример нестационарного воздействия — следующий. Пусть $X_i(k)$ — величина воздействия в точке i в момент времени k — изменяется в следующий момент времени на случайное значение, не зависящее от всех предыдущих изменений, т. е. $X_i(k) = \sum_{j=1}^{k} X_{ij}$, где $\{X_{ij}\}$ — независимые при всех i и j случайные величины, не зависящие от блуждания ν_k. Здесь величина результирующего воздействия задается формулой $L_n = \sum_{k=1}^{n} X_{\nu_k}(k)$. Для полноты картины мы рассмотрим также воздействие, равное $b_n(k, i) X_i^{(n)}(k)$, где $X_i^{(n)}(k) = \sum_{j=1}^{k} X_{ij}^{(n)}$, а $X_{ij}^{(n)}$ — при каждом n независимые случайные величины, не зависящие от блуждания ν_k. Результирующее воздействие в этом случае примет вид $J_n = \sum_{k=1}^{n} b_n(k, \nu_k) X_{\nu_k}^{(n)}(k)$.

В настоящей работе предполагается, что ν_k — апериодическое возвратное случайное блуждание с конечной дисперсией, т. е. $\nu_0 = 0$, $\nu_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$, где $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$—независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины, $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $\mathbf{E}\xi_1^2 = D < \infty$ и $\mathbf{E} \exp(it\xi_1) = 1$ тогда и только тогда, когда t кратно 2π.

1. **Два стохастических интеграла.** Определим те процессы, которые будут выступать в качестве предельных в обсуждаемых задачах. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$. Пусть $Z(x)$, $Z(-x)$ $(x \geqslant 0)$ — независимые друг от друга устойчивые процессы с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 2$, т. е. однородные процессы с независимыми приращениями и характеристической функцией

$$q(\lambda, x) = \mathbf{E} \exp(i\lambda Z(x)) = \begin{cases} \exp\{-x|\lambda|^{\alpha}(\gamma_\alpha - i\theta_\alpha \operatorname{sgn}\lambda)\} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \exp\{-x(\gamma_1|\lambda| + i\theta_1\lambda \ln|\lambda|)\} & \text{при } \alpha = 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$\gamma_\alpha = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}(c^+ + c^-)\cos(\pi\alpha/2), \quad \theta_\alpha = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha}(c^+ - c^-)\sin(\pi\alpha/2)$$
$$\gamma_1 = (c^+ + c^-)\,\pi/2, \quad \theta_1 = c^+ - c^-,$$

а c^+ и c^- — некоторые постоянные, $c^+ \geqslant 0$, $c^- \geqslant 0$, $c^+ + c^- > 0$. В дальнейшем мы эти два процесса будем рассматривать как один процесс $Z(x)$, определенный для $x \in \mathbf{R}^1$.

Пусть $Z(v, x)$ — двупараметрический процесс с независимыми приращениями. Процесс с такой структурой определяется, например, в работе [7]. Для описания процесса $Z(v, x)$ достаточно задать $q(\lambda, v, x)$ — характеристическую функцию значения процесса в каждой точке (v, x). Пусть $q(\lambda, v, x) = q(\lambda, vx)$, где функция $q(\lambda, z)$ определена соотношением (1.1). Таким образом, процесс $Z(v, x)$ при фиксированном первом или втором параметре является устойчивым процессом с показателем α по другому параметру. При $\alpha = 2$ процесс $Z(v, x)$ называется броуновским листом, и его можно определить как гауссовский процесс со средним нуль и функцией ковариаций

$$\mathbf{E}(Z(s, y) Z(v, x)) = (c^+ + c^-) \min(s, v) \min(y, x).$$

Определим процесс $Z(v, -x)$, $(v, x) \in [0, T] \times [0, \infty]$, как независимую версию процесса $Z(v, x)$, и процессы $Z(v, x)$, $Z(v, -x)$ будем рассматривать как один процесс $Z(v, x)$, $(v, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^1$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — пространство таких неотрицательных измеримых случайных процессов $g(v, x) = g(v, x, \omega)$, определенных на $[0, T] \times \mathbf{R}^1 \times \Omega$, которые при почти всех $\omega \in \Omega$ ограниченны, не зависят от процессов $Z(x)$, $Z(v, x)$ и равны нулю вне множества $[0, T] \times [-C(\omega), C(\omega)]$ для некоторого $C(\omega)$, $0 < C(\omega) < \infty$.

Для процессов из пространства $\mathfrak{G}$ несложно определить стохастический интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{T} g(v, x) Z(dv, dx). \tag{1.2}$$

Подобный интеграл по процессу броуновского листа рассмотрен, например, в работе [9]. Интеграл (1.2) можно определить как предел по вероятности интегралов от ступенчатых процессов, т. е. процессов, принимающих постоянные значения на прямоугольниках.

В случае, когда процесс $g(v, x)$ не зависит от v и $T = 1$, интеграл (1.2) ввиду того, что конечномерные распределения у процессов $Z(1, x)$ и $Z(x)$ совпадают, редуцируется к интегралу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dZ(x). \tag{1.3}$$

В качестве процессов $g(x)$ и $g(v, x)$ в дальнейшем будут выступать процессы специального вида.

Пусть $W(s)$ — процесс броуновского движения ($\mathbf{E}w^2(s) = Ds$), не зависящий от процессов $Z(x)$, $Z(v, x)$.

Определение [10, с. 86]. Предел

$$\mathfrak{t}(t, x) = \lim_{y \downarrow x} (y - x)^{-1} \operatorname{mes}\{s\colon\ x \leqslant W(s) < y,\ s \leqslant t\} \tag{1.4}$$

существует с вероятностью единица и называется *броуновским локальным временем* в точке x за время t.

Процесс $\mathfrak{t}(t, x)$ при каждых x и ω монотонно возрастает по t и, следовательно, порождает на $\mathscr{B}$ — σ-алгебре борелевских подмножеств $[0, T]$ — меру, значения которой на множествах $B \in \mathscr{B}$ будут обозначаться $\mathfrak{t}(B, x)$.

Из определения процесса $\mathfrak{t}(t, x)$ следует, что

$$\{(t, x):\ \mathfrak{t}(t, x) > 0,\ t \in [0, T]\} \subset \{0 \leqslant t \leqslant T,\ \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s) < x < \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s)\}. \tag{1.5}$$

В силу этого для любой измеримой неотрицательной функции $f(v, s, x)$, определенной на $[0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R}^1$ и при любом $C > 0$ ограниченной на $[0, T] \times [0, T] \times [-C, C]$, и для любой функции двух переменных $f(s, x)$ с аналогичными свойствами процессы

$$\int_0^t f(s, x)\, \mathfrak{t}(ds, x), \quad \int_v^t f(v, s, x)\, \mathfrak{t}(ds, x)$$

при каждом $t \in [0, T]$ принадлежат пространству $\mathfrak{S}$, и следовательно, определены интегралы

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t f(s, x)\, \mathfrak{t}(ds, x)\, dZ(x), \quad J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \int_v^t f(v, s, x)\, \mathfrak{t}(ds, x)\, Z(dv, dx).$$

Из результатов п. 3 будет следовать, что процессы $I(t)$ и $J(t)$ непрерывны с вероятностью единица.

2. Предельное поведение величин S_n, $\bar{S}_n$, Q_n, $\bar{Q}_n$. В настоящей работе термин «слабая сходимость случайных процессов» служит для обозначения сходимости мер, порожденных случайными процессами, в соответствующем функциональном пространстве, которое наделено топологией равномерной сходимости. В работе используется вариант определения слабой сходимости процессов (рассматриваются лишь вещественнозначные сепарабельные процессы), который не содержит описания функционального пространства. Для каждого конкретного класса процессов такое пространство можно указать. Так, для процессов, рассматриваемых в настоящей работе и зависящих лишь от параметра времени, изменяющемся в промежутке $[0, T]$, в качестве этого пространства можно взять пространство функций, определенных на $[0, T]$, непрерывных справа, имеющих в каждой точке левосторонние пределы и допускающих разрывы лишь в рациональных точках интервала $[0, T]$.

Определение. Процессы $\eta_n(q)$, $q \in U$ (U — компактное подмножество $\mathbf{R}^k$), *слабо сходятся к процессу* $\eta_\infty(q)$, если на некотором вероятностном пространстве $(\Omega', \mathfrak{A}', \mathbf{P}')$ можно построить процессы $\eta'_n(q)$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, эквивалентные исходным в смысле равенства конечномерных распределений и для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяющие соотношению

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\{\sup_{q \in U} |\eta'_n(q) - \eta'_\infty(q)| > \varepsilon\} = 0.$$

Замечание. Это соотношение эквивалентно условию: из любой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность n_k, что с вероятностью единица равномерно по $q \in U$

$$\eta'_{n_k}(q) \to \eta'_\infty(q).$$

Нам понадобится следующий результат из [6]. Пусть $\varphi(n, r)$ есть число попаданий блуждания ν_k в точку r за n шагов, $\mathfrak{t}_n(t, x) = n^{-1/2}\varphi([nt], [x\sqrt{n}])$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbf{R}^1$, $W_n(s) = n^{-1/2}\nu_{[ns]}$, $s \in [0, \infty)$, $[a]$ — наибольшее целое число, не превосходящее a.

Ниже $\Omega' = [0, 1]$, $\mathfrak{A}'$ — σ-алгебра борелевских множеств отрезка [0, 1], $\mathbf{P}'$ — мера Лебега на [0, 1].

Теорема 2.0. *На вероятностном пространстве* $(\Omega', \mathfrak{A}', \mathbf{P}')$ *можно построить такие процессы* $W_n'(s)$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $W'(s)$, $s \in [0, \infty)$, *что*

а) *конечномерные распределения процессов* $W_n'(s)$ *и* $W_n(s)$ *совпадают;*

б) *конечномерные распределения процессов* $W'(s)$ *и* $W(s)$ *совпадают;*

в) *с вероятностью единица* $W_n'(s) \to W'(s)$ *равномерно по* $s \in [0, T]$ *для любого* $T > 0$;

г) *процессы* $\mathbf{t}_n'(t, x)$ *и* $\mathbf{t}'(t, x)$, *определенные по процессам* $W'_n(s)$ *и* $W'(s)$, *при любых* $T > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^1} |\mathbf{t}_n'(t,x) - \mathbf{t}'(t,x)| > \varepsilon\} = 0. \tag{2.1}$$

I. Рассмотрим предельное поведение величин S_n, $\bar{S}_n$.

Теорема 2.1. *Пусть величины* X_i *одинаково распределены с функцией распределения* $F(x)$, *удовлетворяющей при* $x \to \infty$ *условию*

$$F(-x) = x^{-\alpha}(c^- + o(1))h(x), \quad 1 - F(x) = \\ = x^{-\alpha}(c^+ + o(1))h(x), \ 0 < \alpha \leqslant 2,$$

где $h(x)$ *— медленно меняющаяся функция, и* $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) = 0$ *при* $\alpha > 1$.

Тогда для любой медленно меняющейся функции $v(x)$, *удовлетворяющей соотношениям*

$$h(n^{1/(2\alpha)} v(n))/v^\alpha(n) \to 1 \quad \text{при} \quad \alpha \neq 2, \tag{2.2}$$
$$H(n^{1/4} v(n))/v^2(n) \to 2(c^+ + c^-) \quad \text{при} \quad \alpha = 2,$$

где

$$H(z) = \int_{-z}^{z} x^2\,dF(x),$$

процесс $S_n(t)$, $t \in [0, T]$,

$$S_n(t) = n^{-1/2} d_n^{-1} S_{[nt]} \quad \text{при} \quad \alpha \neq 1,$$
$$S_n(t) = n^{-1/2}(d_n^{-1} S_{[nt]} - [nt]\,a_n) \quad \text{при} \quad \alpha = 1,$$

где

$$d_n = n^{1/(2\alpha)} v(n), \quad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(d_n^{-1} x)\,dF(x)$$

слабо сход. тся к процессу $S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}(t, x)\,dZ(x)$.

З а м е ч а н и е 1. Здесь и во всех последующих утверждениях формулировки теорем для случая $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$ совпадают с утверждениями, сформулированными для $\alpha = 2$.

З а м е ч а н и е 2. Медленно меняющаяся функция, удовлетворяющая (2.2), всегда существует (см. аналогичный результат в [11, § 6, гл. 2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 2.1. *Для любого* $\delta > 0$ *существует такое* $L > 0$, *что*

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{|X_1| > L d_n\} < \delta, \tag{2.3}$$

и что величины $X_{ni} = d_n^{-1} X_i \chi_{\{|X_i| \leqslant L d_n\}} - a_n$ *при* $\alpha = 1$ *и* $X_{ni} = d_n^{-1} X_i \chi_{\{|X_i| \leqslant L d_n\}}$ *при* $\alpha \neq 1$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\sup_n (\sqrt{n}\, |\mathbf{E} X_{n1}|) < \infty, \quad \sup_n (\sqrt{n}\, \mathbf{E} X_{n1}^2) < \infty \tag{2.4}$$

(*здесь и далее* χ_A *обозначает индикатор множества* A).

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теорем 2.6.1 и 2.6.2 в [11].

Введем величины

$$Z_n(x) = d_n^{-1} \sum_{i=0}^{[x\sqrt{n}]} X_i, \quad x \geqslant 0, \quad Z_n(x) = -d_n^{-1} \sum_{i=[x\sqrt{n}]}^{-1} X_i, \quad x < 0, \quad \alpha \neq 1;$$

при $\alpha = 1$ в этих соотношениях вместо X_i следует взять $X_i - d_n a_n$.

Представим процесс $S_n(t)$ в виде

$$S_n(t) = n^{-1/2} d_n^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi([nt], i) X_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{t}_n(t, x)\, dZ_n(x).$$

Дифференциал $dZ_n(x)$ считается отличным от нуля только в точках скачков процесса $Z_n(x)$ и равным в них величине скачка.

Из предельной теоремы для сумм независимых случайных величин, распределение которых принадлежит области притяжения устойчивого закона, следует, что конечномерные распределения процессов $Z_n(x)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z(x)$, и так как для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h \to 0} \lim_{n \to \infty} \sup_{|x-y| \leqslant h} \mathbf{P}\{|Z_n(x) - Z_n(y)| > \varepsilon\} = 0,$$

то, согласно теореме Скорохода [12, с. 13], на вероятностном пространстве $(\Omega', \mathfrak{A}', \mathbf{P}')$ можно построить такие процессы $Z_n'(x)\,(n = 1, 2, \ldots)$, $Z'(x)$, что $Z_n'(x) \to Z'(x)$ при всех x по вероятности, и конечномерные распределения у процессов $Z_n'(x)$ и $Z_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и у процессов $Z'(x)$ и $Z(x)$ совпадают. Определим новое вероятностное пространство $(\Omega' \times \Omega', \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}', \mathbf{P}'\mathbf{P}')$ и для любого $\bar{\omega}' = (\omega_1', \omega_2')$ положим: $W_n'(s) = W_n'(s, \bar{\omega}') = W_n'(s, \omega_1')$, $W'(s) = W'(s, \omega_1')$, $Z_n'(x) = Z_n'(x, \omega_2')$, $Z'(x) = Z'(x, \omega_2')$. Так как блуждание ν_k не зависит от величин X_i, то совместные конечномерные распределения у процессов $(W_n'(s), Z_n'(x))$ и $(W_n(s), Z_n(x))$, и у процессов $(W'(s), Z'(x))$ и $(W(s), Z(x))$ совпадают, и следовательно, совпадают конечномерные распределения у процессов $S_n'(t)$ и $S_n(t)$, и у процессов $S'(t)$ и $S(t)$.

Докажем, что для любого $t \in [0, T]$ по вероятности

$$S_n'(t) \to S'(t). \tag{2.5}$$

Из пп. в и г теоремы 2.0 следует, что по любому $\varepsilon > 0$ можно так выбрать число $A > 0$, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{s \in [0,T]} |W'(s)| > A\} < \varepsilon, \quad \mathbf{P}\{\sup_{s \in [0,T]} |W_n'(s)| > A\} < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Введем обозначение

$$\overline{\Omega}(n, \delta, \varepsilon) = \{\sup_{s \in [0,T]} |W'(s)| > A\} \cup \{\sup_{s \in [0,T]} |W_n'(s)| > A\} \bigcup_{i=-[A\sqrt{n}]}^{[A\sqrt{n}]+1} \{|X_i'| > L d_n\}. \tag{2.7}$$

Положим

$$\overline{Z}_n(x)=\sum_{i=0}^{[x\sqrt{n}]}(X_{ni}-\mathbf{E}X_{ni}),\ x\geqslant 0,\ \overline{Z}_n(x)=-\sum_{i=[x\sqrt{n}]}^{-1}(X_{ni}-\mathbf{E}X_{ni}),\ x<0. \tag{2.8}$$

В силу (2.3) и (2.6)

$$\mathbf{P}(\overline{\Omega}(n,\delta,\varepsilon))\leqslant 2\varepsilon+2(A+1)\delta. \tag{2.9}$$

На множестве $(\Omega'\times\Omega')\setminus\overline{\Omega}(n,\delta,\varepsilon)$ с учетом (1.5) и соотношения

$$\{(t,x):\ \mathrm{t}_n(t,x)>0,\ 0<t\leqslant T\}\subset\{0<t\leqslant T,\ \inf_{0\leqslant s\leqslant t}W_n(s)\leqslant x\leqslant\sup_{0\leqslant s\leqslant t}W_n(s)\} \tag{2.10}$$

имеем:

$$S_n'(t)-S'(t)=\sqrt{n}\,\mathbf{E}X_{n1}\int_{-A}^{A}(\mathrm{t}_n'(t,x)-\mathrm{t}_k'(t,[x\sqrt{n}]/\sqrt{n}))\,dx+$$

$$+\int_{-A}^{A}(\mathrm{t}_n'(t,x)-\mathrm{t}_k'(t,x))\,d\overline{Z}_n'(x)+\int_{-A}^{A}\mathrm{t}_k'(t,x)\,(dZ_n'(x)-dZ'(x))+$$

$$+\int_{-A}^{A}(\mathrm{t}_k'(t,x)-\mathrm{t}'(t,x))\,dZ'(x). \tag{2.11}$$

Устремляя сначала n к ∞, а затем k к ∞, получим, что первый интеграл в (2.11) стремится по вероятности к нулю в силу (2.1) и (2.4), третий интеграл стремится к нулю в силу сходимости $Z_n'(x)\to Z'(x)$ по вероятности, а четвертый — по определению интеграла (1.3). Теперь сходимость $S_n'(t)\to S'(t)$ по вероятности вытекает из (2.9) и оценки

$$\mathbf{E}\left|\int_{-A}^{A}(\mathrm{t}_n'(t,x)-\mathrm{t}_k'(t,x))\,d\overline{Z}_n'(x)\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{n}\,\mathbf{E}X_{n1}^2\mathbf{E}\int_{-A}^{A}(\mathrm{t}_n'(t,x)-\mathrm{t}_k'(t,[x\sqrt{n}]/\sqrt{n}))^2\,dx.$$

В силу (2.5) для установления слабой сходимости процессов $S_n(t)$ к процессу $S(t)$ достаточно проверить условие слабой компактности: при произвольном $\varepsilon>0$

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\{\sup_{|t-s|<h}|S_n(t)-S_n(s)|>\varepsilon\}=0. \tag{2.12}$$

Условие слабой компактности (2.12) для непрерывных процессов было введено Ю. В. Прохоровым [13]. Выполнение этого условия для процессов без разрывов второго рода влечет (см. теорему 15.5 из [14]) непрерывность предельного процесса с вероятностью единица. Относительно применимости (2.12) к варианту слабой сходимости, используемому в настоящей работе, см. доказательство леммы 1.5 из [6].

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{t}_n(t,x)\,dx=[tn]/n, \tag{2.13}$$

ввиду (2.4), (2.6) и (2.9) для выполнения (2.12) достаточно, чтобы

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathbf{P}\left\{\sup_{|t-s|<h}\left|\int_{-A}^{A}(\mathrm{t}_n(t,x)-\mathrm{t}_n(s,x))\,d\overline{Z}_n(x)\right|>\varepsilon\right\}=0,$$

а для доказательства этого соотношения, как это нетрудно получить из теоремы 12.2 в [14], достаточно проверить, что для всех $\varepsilon > 0$, t, s, $|t-s| \geqslant 1/n$ и некоторых $\gamma \geqslant 0$, $\alpha > 1$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\int\limits_{-A}^{A} (\mathfrak{t}_n(t, x) - \mathfrak{t}_n(s, x))\, d\bar{Z}_n(x)\right| > \varepsilon\right\} \leqslant C\varepsilon^{-\gamma} |t-s|^{\alpha}. \tag{2.14}$$

Принимая во внимание (2.4) и оценку $\mathbf{P}\{\nu_k = 0\} \leqslant C_k^{-1/2}$ [1, с. 93], а также марковское свойство случайных блужданий, найдем:

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_{-A}^{A} (\mathfrak{t}_n(t, x) - \mathfrak{t}_n(s, x))\, d\bar{Z}_n(x)\right|^2 \leqslant \sqrt{n}\, \mathbf{E}X_{n1}^2 \mathbf{E} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{t}_n^2\left(\frac{[nt]-[ns]}{n}, x\right) dx =$$

$$= \mathbf{E}X_{n1}^2 n^{-1} \sum_{i=1}^{[nt]-[ns]} \sum_{j=1}^{[nt]-[ns]} \mathbf{P}\{\nu_i = \nu_j\} \leqslant C_1 |t-s|^{3/2}, \tag{2.15}$$

и следовательно, (2.14) выполнено при $\gamma = 2$, $\alpha = 3/2$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Как было отмечено в ходе доказательства, процесс $S(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{t}(t, x)\, dZ(x)$ с вероятностью единица непрерывен.

Теорема 2.2. *Пусть величины X_i одинаково распределены,* $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. *Тогда для любого $T > 0$ по вероятности*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |n^{-1} S_{[nt]} - t\mathbf{E}X_1| \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$X_{ni} = n^{-1/2}(X_i - \mathbf{E}X_i)\, \chi_{\{|X_i - \mathbf{E}X_i| < \sqrt{n}\}}\,.$$

Нетрудно показать [15, с. 318], что

$$\sqrt{n}\, \mathbf{P}\{|X_1 - \mathbf{E}X_1| \geqslant \sqrt{n}\} \to 0, \quad \sqrt{n}\, \mathbf{E}X_{n1} \to 0, \quad \sqrt{n}\, \mathbf{E}X_{n1}^2 \to 0. \tag{2.16}$$

На множестве

$$\Omega(n, \varepsilon) = \{\sup_{s \in [0, T]} |W_n(S)| \leqslant A\} \cap \left(\bigcap_{i=[-A\sqrt{n}]}^{[A\sqrt{n}]} \{|X_i - \mathbf{E}X_i| < \sqrt{n}\}\right),$$

вероятность дополнения которого, начиная с некоторого n, удовлетворяет (2.9), с учетом (2.13) и обозначения (2.8) имеем:

$$n^{-1} S_{[nt]} - \mathbf{E}X_1 [nt]/n = \mathbf{E}X_{n1} [nt]/\sqrt{n} + \int\limits_{-A}^{A} \mathfrak{t}_n(t, x)\, d\bar{Z}_n(x).$$

Из соотношения (2.15) получим, что процесс

$$I_n(t) = \int\limits_{-A}^{A} \mathfrak{t}_n(t, x)\, d\bar{Z}_n(x)$$

удовлетворяет условию слабой компактности (2.12). Из первой оценки в (2.15), взятой при $s = 0$, и из (2.16) следует сходимость процесса $I_n(t)$ по вероятности к нулю, а это в сочетании с условием слабой компактности влечет сходимость по вероятности к нулю $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} |I_n(t)|$.

Теорема доказана.

Пусть τ_n', τ', τ — моменты первого выхода процессов $W_n'(s)$, $W'(s)$, $W(s)$ из полосы $(-a, b)$. Из п. в теоремы 2.0 нетрудно вывести (см., например, [6]), что с вероятностью единица

$$\tau_n' \to \tau'. \tag{2.17}$$

Положим $G_n = n^{-1/2}(d_n^{-1}\bar{S}_n - \varkappa_n a_n)$ при $\alpha = 1$ и $G_n = n^{-1/2} d_n^{-1}\bar{S}_n$ при $\alpha \neq 1$ и $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$. Ввиду равенства $G_n' = S_n'(\tau_n')$ и (2.17) как следствия из теоремы 2.1, 2.2 получим следующие результаты.

Теорема 2.3. *В условиях теоремы* 2.1 *распределение величины* G_n *сходится к распределению величины* $S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{t}(\tau, x)\,dZ(x)$.

Теорема 2.4. *Пусть величины* X_i *одинаково распределены,* $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$.

Тогда величина $n^{-1}\bar{S}_n$ *сходится по распределению к* $\tau\,\mathbf{E}X_1$.

II. Рассмотрим предельное поведение величины Q_n, $\bar{Q}_n$. Положим $Q_n(t) = d_n^{-1}Q_{[nt]} - [nt]\,a_n$ при $\alpha = 1$, $Q_n(t) = d_n^{-1}Q_{[nt]}$ при $\alpha \neq 1$ и $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$, $R(t) = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s) - \inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s)$.

Теорема 2.5. *Пусть величины* X_i *удовлетворяют условию теоремы* 2.1.

Тогда конечномерные распределения процессов $Q_n(t)$, $t \in [0, T]$, *сходятся к конечномерным распределениям процесса* $Q(t) = Z(\sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s)) - Z(\inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s))$. *В случае* $\alpha = 2$ *процесс* $Q_n(t)$ *слабо сходится к процессу* $Q(t)$.

Замечание. При $0 < \alpha < 2$ слабой сходимости в рассматриваемом нами смысле нет, так как процесс $Q_n(t)$ имеет разрывы в точках вида r/n, r — целые числа, и слабый предел таких процессов может иметь разрывы лишь в точках такого вида (рациональных точках), в то время как процесс $Q(t)$ допускает разрывы в любых точках.

Доказательство. Процесс $Q_n(t)$ представим в виде

$$Q_n(t) = d_n^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \chi_{\{\varphi([nt], i) > 0\}} X_i = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{\mathfrak{t}_n(t, x) > 0\}}\, dZ_n(x). \tag{2.18}$$

Согласно лемме 1.1 из [6] с вероятностью единица

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s) - \inf_{0 \leqslant s \leqslant t} W(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{\mathfrak{t}(t, x) > 0\}}\, dx, \tag{2.19}$$

и следовательно,

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{\mathfrak{t}(t, x) > 0\}}\, dZ(x). \tag{2.20}$$

Из (2.1), п. в теоремы 2.0, (2.10) и (2.19) найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{\{\mathfrak{t}_n'(t, x) > 0\}} - \chi_{\{\mathfrak{t}'(t, x) > 0\}}|\, dx \to 0$$

по вероятности. С учетом этих соотношений доказательство сходимости $Q_n'(t) \to Q'(t)$ по вероятности проводится аналогично (2.5). Эта сходимость влечет нужную сходимость конечномерных распределений $Q_n(t)$.

Доказательство второго утверждения имеет существенное отличие от доказательства подобного утверждения в теореме 2.1. Так, оценка, аналогичная (2.15), будет иметь в правой части лишь $C\sqrt{|t-s|}$. Из (2.2) нетрудно вывести существование такой последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\sqrt{n}\,\mathbf{P}\{|X_1|>b_n\}\to 0, \quad b_n/d_n\to 0, \tag{2.21}$$

и что для величин $Y_{ni}=v^{-1}(n)\,X_i\chi_{\{|X_i|\leqslant b_n\}}$ выполнены соотношения

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/4}\mathbf{E}Y_{n1}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}Y_{n1}^2=2(c^++c^-). \tag{2.22}$$

Введем обозначения $\xi_{ni}=\xi_i\chi_{\{|\xi_i|<\sqrt{n}\}}$,

$$\eta_n(t,r)=n^{-1/4}\chi_{\{\varphi([nt],r)>0\}}, \quad Y_n(t)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\eta_n(t,r)\,(Y_{nr}-\mathbf{E}Y_{nr}),$$

$$\mu_n(s,t,r)=(\eta_n(t,r)-\eta_n(s,r))\,(Y_{nr}-\mathbf{E}Y_{nr}), \quad R_n(t)=n^{-1/4}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\eta_n(t,r). \tag{2.23}$$

Лемма 2.2. *Для любого* $\varepsilon>0$

$$\lim_{h\to 0}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{|t-s|\leqslant h}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\mu_n^2(s,t,r)>\varepsilon\}=0. \tag{2.24}$$

Доказательство. Принимая во внимание монотонное возрастание функции $\varphi(n,r)$ по n, получим:

$$\mathbf{P}\{\sup_{|t-s|\leqslant h}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\mu_n^2(s,t,r)>\varepsilon\}\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant i<T/h}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\mu_n^2(ih,(i+1)h,r)>\varepsilon/4\}\leqslant$$
$$\leqslant\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant i<T/h}n^{-1/4}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(\eta_n((i+1)h,r)-\eta_n(ih,r))\,(Y_{nr}^2-\mathbf{E}Y_{nr}^2)>\varepsilon/16\}+$$
$$+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant i<T/h}|\mathbf{E}Y_{n1}^2\,(R_n((i+1)h)-R_n(ih))-2(c^++c^-)\,(R((i+1)h)-$$
$$-R(ih))|>\varepsilon/16\}+\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant i<T/h}|R((i+1)h)-R(ih)|>\varepsilon/16\}. \tag{2.25}$$

Имеет место оценка

$$R_n(h)\leqslant\sup_{0\leqslant s\leqslant h}W_n(s)-\inf_{0\leqslant s\leqslant h}W_n(s), \tag{2.26}$$

и по неравенству Дуба для субмартингалов [16, с. 285]

$$\mathbf{E}\sup_{0\leqslant s\leqslant h}W_n(s)\leqslant 4\sqrt{Dh}, \quad \mathbf{E}(-\inf_{0\leqslant s\leqslant h}W_n(s))\leqslant 4\sqrt{Dh}.$$

Третье слагаемое в (2.25) стремится к нулю при $h\to 0$ в силу непрерывности функции $R(t)$, второе стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу слабой сходимости процесса $R_n(t)$ к процессу $R(t)$ (см. теорему 2.1 из [6]) и (2.22), а первое (обозначим его I_n) — в силу оценки

$$I_n\leqslant 256\varepsilon^{-2}(1+T/h)\,n^{-1/2}\mathbf{E}Y_{n1}^4\mathbf{E}R_n(h+1/n)\leqslant Ch^{-1/2}\varepsilon^{-2}b_n^2d_n^{-2}.$$

Положим

$$\Omega(h,n,\varepsilon)=\bigcap_{i=1}^{n}\{|\xi_i|\leqslant\sqrt{n}\}\cap\{\sup_{|t-s|\leqslant h}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\mu_n^2(s,t,r)\leqslant\varepsilon\}\cap$$
$$\cap\{\sup_{s\in[0,T]}|W_n(s)|\leqslant A\}\cap(\bigcap_{[-A\sqrt{n}]}^{[A\sqrt{n}]}\{|X_i|\leqslant b_n\}),$$

где A выбрано, как в (2.6). Из (2.21), (2.24) и из условия $\mathbf{E}\xi_1^2<\infty$ следует, что, начиная с некоторых n и h, вероятность дополнения множества

$\Omega(h, n, \varepsilon)$ будет удовлетворять (2.9) с любым наперед заданным $\delta > 0$. Пусть n столь велико, что $2A \mid \mathbf{E}Y_{n1} \mid \leqslant \varepsilon n^{-1/4}$. Тогда для таких s, t, что $n^{-1} \leqslant \mid t-s \mid \leqslant h < 1$, справедлива оценка

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\Omega(h, n, \varepsilon), |Q_n(t) - Q_n(s)| > 2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\Omega(h, n, \varepsilon), |Y_n(t) - Y_n(s)| > 2\sqrt{\varepsilon}\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\Omega(h, n, \varepsilon), |\sum_{i \neq j} \mu_n(i)\mu_n(j)| > 3\varepsilon\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\Omega(h, n, \varepsilon), |\sum' \mu_n(i)\mu_n(j)\mu_n(k)\mu_n(l)| > 8\varepsilon^2\} \leqslant \\ \leqslant C\varepsilon^{-4}\mathbf{E}\left\{\prod_1^n \chi_{\{|\xi_i| \leqslant \sqrt{n}\}} [(R_n(t) - R_n(s))^3 + (R_n(t) - R_n(s))^4]\right\} \leqslant C\varepsilon^{-4}h^{3/2}.\end{gathered}$$

Здесь Σ' — суммирование по тем i, j, k, l, среди которых есть не менее трех различных, а последнее неравенство использует оценку, аналогичную (2.26), и неравенство Дуба для субмартингалов [16, с. 285].

Из полученной оценки и теоремы 12.2 [14] нетрудно вывести, что для любого $\delta > 0$ при всех достаточно больших n и малых h

$$\mathbf{P}\{\Omega(h, n, \varepsilon), \sup_{|t-s|<h} |Q_n(t) - Q_n(s)| > 2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon\} < \delta,$$

а это с учетом выбора множества $\Omega(h, n, \varepsilon)$ влечет условие слабой компактности для процесса $Q_n(t)$ (условие (2.12)). Тем самым слабая сходимость процесса $Q_n(t)$ и теорема 2.5 доказаны.

Теорема 2.6. *Пусть величины X_i одинаково распределены,* $\mathbf{E} \mid X_1 \mid < \infty$. *Тогда процесс $n^{-1/2}Q_{[nt]}$ слабо сходится к процессу $R(t)\,\mathbf{E}X_1$.*

Доказательство. Пусть величины X_{ni} и множество $\Omega(n, \varepsilon)$ определены, как при доказательстве теоремы 2.2, процесс $\overline{Z}_n(x)$ определен по формуле (2.8), $R_n(t)$ определен, как в (2.23). На множестве $\Omega(n, \varepsilon)$

$$n^{-1/2}Q_{[nt]} - R_n(t)\mathbf{E}X_1 = R_n(t)\sqrt{n}\,\mathbf{E}X_{n1} + \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{t_n(t,x)>0\}}\, d\overline{Z}_n(x).$$

В силу (2.16) доказательство слабой компактности процесса $\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{t_n(t,x)>0\}}\, d\overline{Z}_n(x)$ аналогично доказательству слабой компактности процесса $Q_n(t)$ в теореме 2.5, при этом в качестве величин Y_{ni} выступают величины $n^{1/4}X_{ni}$. Оценка дисперсии

$$\mathbf{E}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\{t_n(t,x)>0\}}\, d\overline{Z}_n(x)\right)^2 \leqslant \sqrt{n}\,\mathbf{E}X_{n1}^2 R_n(t)$$

показывает, что он слабо сходится к нулю. Теперь утверждение теоремы следует из слабой сходимости процесса $R_n(t)$ к процессу $R(t)$ (см. теорему 2.1 из [6]).

Положим $H_n = d_n^{-1}\overline{Q}_n - \varkappa_n a_n$ при $\alpha = 1$ и $H_n = d_n^{-1}\overline{Q}_n$ при $\alpha \neq 1$.

Теорема 2.7. *В условиях теоремы 2.1 распределение величины H_n сходится к распределению величины $Q(\tau)$.*

Замечание. При $\alpha \neq 1$ распределение величины $Q(\tau)$ совпадает с распределением величины $R^{1/\alpha}(\tau)\,Z(1)$, а $R(\tau)$ имеет функцию распределения $F(x)$, $F(x) = 1 - \min(a, b)\,x^{-1}$ при $\min(a, b) \leqslant x \leqslant \max(a, b)$ и $F(x) = 2 - (a+b)\,x^{-1}$ при $\max(a, b) \leqslant x \leqslant a + b$.

Доказательство. Из (2.1) и (2.17) следует, что $t_n'(\tau_n', x) \to$

$\to \mathfrak{t}'(\tau', x)$ по вероятности, а это совместно с п.в теоремы 2.0, (1.5) и (2.10) влечет, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{\{\mathfrak{t}'_n(\tau'_n, x)>0\}} - \chi_{\{\mathfrak{t}'(\tau', x)>0\}}|\, dx \to 0$$

по вероятности. В силу этого соотношения, равенства $H_n = Q_n(\tau_n)$ и соотношений (2.18), (2.20) доказательство сходимости по вероятности $Q'_n(\tau'_n) \to Q'(\tau')$ осуществляется аналогично доказательству (2.5).

Как следствие из теоремы 2.6 и соотношения (2.17) получим следующий результат.

Теорема 2.8. *Пусть величины X_i одинаково распределены,* $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$, $\mathbf{E}X_1 = 1$.

Тогда при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\,\{n^{-1/2}\bar{Q}_n \leqslant x\} \to F(x).$$

3. Предельное поведение величин I_n, L_n, J_n.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{E}X_i^{(n)} = 0$, *функции* $f_n(s, x) = b_n([ns], [x\sqrt{n}])$ *и* $\sigma_n(x) = \mathbf{E}^{1/2}(X^{(n)}_{[x\sqrt{n}]})^2$ *при любом* $A > 0$ *равномерно ограничены на* $[0, T] \times [-A, A]$ и $[-A, A]$ *соответственно и* $f_n(s, x) \to f(s, x)$, $\sigma_n(x) \to \sigma(x)$. *Предположим, что выполнено условие Линдеберга: для любых* $\varepsilon > 0$ и $A > 0$

$$n^{-1/2} \sum_{i=[-A\sqrt{n}]}^{[A\sqrt{n}]} \mathbf{E}\,[\chi_{\{|X_i^{(n)}| \geqslant \varepsilon n^{1/4}\}} (X_i^{(n)})^2] \to 0.$$

Тогда процесс $I_n(t) = n^{-3/4} \sum_{k=0}^{[nt]} b_n(k, \nu_k) X^{(n)}_{\nu_k}$ *слабо сходится к процессу* $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \sigma(x) f(s, x)\, \mathfrak{t}(ds, x)\, dW_c(x)$, *где* $W_c(x)$, $W_c(-x)$ $(x \geqslant 0)$ — *не зависящие друг от друга и от* $\mathfrak{t}(s, x)$ *процессы стандартного броуновского движения,* $\mathbf{E}W_c^2(\pm x) = x$.

Доказательство. Введем обозначения

$$Z_n(x) = n^{-1/4} \sum_{i=0}^{[x\sqrt{n}]} X_i^{(n)}, \quad Z(x) = \int_0^x \sigma(y)\, dW_c(y) \quad \text{при } x \geqslant 0,$$

$$Z_n(x) = -n^{-1/4} \sum_{i=[x\sqrt{n}]}^{-1} X_i^{(n)}, \quad Z(x) = -\int_x^0 \sigma(y)\, dW_c(y) \quad \text{при } x < 0,$$

и перепишем $I_n(t)$ и $I(t)$ в виде

$$I_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t f_n(s, x)\, \mathfrak{t}_n(ds, x)\, dZ_n(x), \quad I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t f(s, x)\, \mathfrak{t}(ds, x)\, dZ(x).$$

Используя центральную предельную теорему и теорему Скорохода [12, с. 13] и поступая, как при доказательстве теоремы 2.1, на вероятностном пространстве $(\Omega' \times \Omega', \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}', \mathbf{P}'\mathbf{P}')$ построим такие процессы $\mathfrak{t}'_n$, Z'_n, $\mathfrak{t}'$, Z', эквивалентные исходным, что $Z'_n(x) \to Z'(x)$ по вероятности, а $\mathfrak{t}'_n$ и $\mathfrak{t}'$ удовлетворяют (2.1).

Из (2.1) и непрерывности процесса $\mathfrak{t}'(t, x)$ следует (см., например, теорему 2.1 из [14]), что с вероятностью единица для любого $B \in \mathscr{B}$

$$\mathfrak{t}'_n(B, x) \to \mathfrak{t}'(B, x)$$

по вероятности. Из этого соотношения и из условия на $f_n(s, x)$ получим, что

$$\int_0^t f_n(s, x)\, \mathfrak{t}_n'(ds, x) \to \int_0^t f(s, x)\, \mathfrak{t}'(ds, x) \tag{3.1}$$

по вероятности. Поэтому из (2.6) и (2.10) следует, что при каждом t в (3.1) есть сходимость по мере mes $\times$ **P**. С учетом этого дальнейшее доказательство теоремы аналогично приведенному в теореме 2.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathbf{E}\,|X_i^{(n)}| < \infty$, *функции* $a_n(x) = \mathbf{E}X^{(n)}_{[x\sqrt{n}]}$ *и* $f_n(s, x) = b_n([ns], [x\sqrt{n}])$ *при любом* $A > 0$ *равномерно ограничены на* $[-A, A]$ *и* $[0, T] \times [-A, A]$ *соответственно, и* $a_n(x) \to a(x)$, $f_n(s, x) \to f(s, x)$. *Пусть при любом* $A > 0$ *для величин* $X_{ni} = n^{-1/2}(X_i^{(n)} - \mathbf{E}X_i^{(n)})\, \chi_{\{|X_i^{(n)} - \mathbf{E}X_i^{(n)}| < \sqrt{n}\}}$ *выполнены соотношения*

$$\sum_{i=[-A\sqrt{n}]}^{[A\sqrt{n}]} \mathbf{P}\{|X_i^{(n)} - \mathbf{E}X_i^{(n)}| \geq \sqrt{n}\} \to 0, \quad \sqrt{n} \max_{-A\sqrt{n}<i<A\sqrt{n}} |\mathbf{E}X_{ni}| \to 0,$$
$$\sqrt{n} \max_{-A\sqrt{n}<x<A\sqrt{n}} \mathbf{E}X_{ni}^2 \to 0. \tag{3.2}$$

Тогда процесс $C_n(t) = n^{-1} \sum_{k=0}^{[nt]} b_n(k, \nu_k)\, X^{(n)}_{\nu_k}$ *слабо сходится к процессу* $C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t a(x) f(s, x)\, \mathfrak{t}(ds, x)\, dx.$

Доказательство. Определим процесс $\overline{Z}_n(x)$ формулой (2.8). В силу (3.2), (2.6) и (2.10), как и при доказательстве теоремы 2.2, можно выделить множество наперед заданной малой вероятности, вне которого

$$C_n(t) = \int_{-A}^{A} \int_0^t a_n(x) f_n(s, x)\, \mathfrak{t}_n(ds, x) + \int_{-A}^{A} \int_0^t f_n(s, x)\, \mathfrak{t}_n(ds, x)\, d\overline{Z}_n(x) +$$
$$+ \int_{-A}^{A} \int_0^t f_n(s, x)\, \mathfrak{t}_n(ds, x)\, dx\, O\left(\sqrt{n} \max_{-A\sqrt{n}<i<A\sqrt{n}} |\mathbf{E}X_{ni}|\right). \tag{3.3}$$

Слабую компактность первого слагаемого в левой части (3.3) нетрудно вывести из соотношения (2.1) и свойства равномерной непрерывности процесса $\mathfrak{t}_n(t, x)$ на $[0, T] \times \mathbf{R}^1$, а сходимость по вероятности этого процесса к процессу $C(t)$ — из соотношения (3.1). Слабая сходимость к нулю второго слагаемого следует из оценки, аналогичной (2.15), и из (3.2), а третьего — из (3.1) и (3.2).

Теорема 3.3. *Пусть при всех i и j величины X_{ij} одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2.1.*

Тогда для $d_n = n^{3/(2\alpha)} v(n^3)$, $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(d_n^{-1}x)\, dF(x)$, *где* $v(n)$ — *медленно меняющаяся функция, удовлетворяющая* (2.2), процесс

$$L_n(t) = n^{-1/2} d_n^{-1} L_{[nt]} \quad \text{при} \quad \alpha \neq 1,$$
$$L_n(t) = n^{-1/2}(d_n^{-1} L_{[nt]} - [nt]\, a_n) \quad \text{при} \quad \alpha = 1,$$

слабо сходится при $t \in [0, T]$ *к процессу*

$$L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t (\mathfrak{t}(t, x) - \mathfrak{t}(v, x))\, Z(dv, dx).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1, отметим лишь его основные моменты. Положим

$$Z_n(v, x) = d_n^{-1} \sum_{i=0}^{[x\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{[nv]} X_{ij}, \quad x \geqslant 0, \quad Z_n(v, x) = -d_n^{-1} \sum_{i=[x\sqrt{n}]}^{-1} \sum_{j=1}^{[nv]} X_{ij}, \quad x < 0,$$

при этом в случае $\alpha = 1$ вместо X_{ij} следует взять $X_{ij} - d_n a_n$. Для процесса $L_n(t)$ имеем:

$$L_n(t) = n^{-1/2} d_n^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{[nt]} \chi_{\{v_k = i\}} \sum_{j=1}^{k} X_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t (\mathfrak{t}_n(t, x) - \mathfrak{t}_n(v, x)) Z_n(dv, dx).$$

Используя предельную теорему для сумм независимых случайных величин, распределение которых принадлежит области притяжения устойчивого закона, и теорему Скорохода [12, с. 13], переопределим процессы $\mathfrak{t}_n$, Z_n, $\mathfrak{t}$, Z на вероятностное пространство $(\Omega' \times \Omega', \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}', \mathbf{P}'\mathbf{P}')$ с сохранением конечномерных распределений и условий независимости так, чтобы при этом $Z_n'(v, x) \to Z'(v, x)$ по вероятности, а для $\mathfrak{t}_n'$, $\mathfrak{t}'$ выполнялось (2.1).

Нормирующий множитель d_n совпадает с аналогичным множителем теоремы 2.1, взятым в точке n^3, и соотношения (2.3), (2.4) перепишутся в виде

$$n^{3/2}\mathbf{P}\{|X_{11}| > L d_n\} < \delta, \qquad \sup_n (n^{3/2}\mathbf{E}X_{n11}) < \infty, \qquad \sup_n (n^{3/2}\mathbf{E}X_{n11}^2) < \infty,$$

где полагаем $X_{nij} = d_n^{-1} X_{ij} \chi_{\{|X_{ij}| \leqslant L d_n\}} - a_n$ при $\alpha = 1$, и $X_{nij} = d_n^{-1} X_{ij} \chi_{\{|X_{ij}| \leqslant L d_n\}}$ при $\alpha \neq 1$. Пусть, далее, при $x \geqslant 0$ и $x < 0$ соответственно

$$\overline{Z}_n(v, x) = \sum_{i=0}^{[x\sqrt{n}]} \sum_{j=1}^{[nv]} (X_{nij} - \mathbf{E}X_{nij}), \qquad \overline{Z}_n(v, x) = -\sum_{i=[x\sqrt{n}]}^{-1} \sum_{j=1}^{[nv]} (X_{nij} - \mathbf{E}X_{nij}).$$

Теперь, представив разность $L_n'(t) - L'(t)$ в виде, аналогичном (2.11), получим, что $L_n'(t) \to L'(t)$ по вероятности. Проверка условия слабой компактности (2.12) основывается на оценке, аналогичной (2.15), которая в данном случае имеет вид

$$\mathbf{E}\left| \int_{-A}^{A} \int_s^t (\mathfrak{t}_n(t, x) - \mathfrak{t}_n(v, x)) \overline{Z}_n(dv, dx) + \int_{-A}^{A} (\mathfrak{t}_n(t, x) - \mathfrak{t}_n(s, x)) \overline{Z}_n(s, dx) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2n^{3/2}\mathbf{E}X_{n11}^2 \mathbf{E} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_s^t (\mathfrak{t}_n(t, x) - \mathfrak{t}_n(v, x))^2 dv + (\mathfrak{t}_n(t, x) - \mathfrak{t}_n(s, x))^2 s \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left(\int_s^t |t - v|^{3/2} dv + s|t - s|^{3/2} + n^{-3/2}(t - s) \right) \leqslant C_2 (|t - s|^{5/2} + |t - s|^{3/2}).$$

Теорема доказана.

Доказательство следующих результатов не содержит принципиально новых отличий от уже приведенных, и мы ограничимся их формулировками.

Теорема 3.4. *Пусть величины* X_{ij} *одинаково распределены*, $\mathbf{E}\,|X_{11}| < \infty$. *Тогда для любого* $T > 0$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |n^{-2} L_{[nt]} - \mathbf{E}X_{11} t^2/2| \to 0 \quad \textit{по вероятности.}$$

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathbf{E}X_{ij}^{(n)}=0$, *функции* $f_n(s,t)=b_n([ns],[x\sqrt{n}])$ *и* $\sigma_n(v,x)=\mathbf{E}^{1/2}(X_{[nv][x\sqrt{n}]}^{(n)})^2$ *при любом* $A>0$ *равномерно ограничены на* $[0,T]\times[-A,A]$ и $f_n(s,x)\to f(s,x)$, $\sigma_n(v,x)\to\sigma(v,x)$. *Предположим, что выполнено условие Линдеберга: для любых* $\varepsilon>0$ *и* $A>0$

$$n^{-3/2}\sum_{i=[-A\sqrt{n}]}^{[A\sqrt{n}]}\sum_{j=1}^{[nT]}\mathbf{E}\,[\chi_{\{|X_{ij}^{(n)}|\geqslant\varepsilon n^{3/4}\}}(X_{ij}^{(n)})^2]\to 0.$$

Тогда процесс $J_n(t)=n^{-5/4}\sum_{k=1}^{[nt]}b_n(k,\nu_k)X_{\nu_k}^{(n)}(k)$, $t\in[0,T]$, *слабо сходится к процессу*

$$J(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\int_v^t\sigma(v,x)f(s,x)\,\mathfrak{t}(ds,x)\,W(dv,dx),$$

где процесс $W(v,x)$ — *не зависящий от* $\mathfrak{t}(s,x)$ *броуновский лист с ковариационной функцией* $\min(s,v)\min(x,y)$.

Замечание 1. Используя соотношение

$$\mathbf{E}(\mathfrak{t}([t_1,t_2),x)\,\mathfrak{t}([s_1,s_2),x))=$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{t_1}^{t_2}du\int_{s_1}^{s_2}dv\,(uv-v^2)^{-1/2}\exp(-x^2/(2v)),\quad t_2>t_1>s_2>s_1,$$

нетрудно вывести, что

$$\mathbf{E}J^2(t)=\sqrt{2/\pi}\int_0^t du\int_0^u ds\int_0^s dv\,(u-s)^{-1/2}\mathbf{E}\,(f(u,W(s))f(s,W(s))\sigma^2(v,W(s))).$$

Замечание 2. Поскольку для процессов $I_n(t)$, $L_n(t)$ и $J_n(t)$ выполнено условие слабой компактности в форме (2.12), а в качестве слабого предела при таком условии (см. теорему 15.5 из [14]) может выступать только непрерывный процесс, процессы $I(t)$, $L(t)$ и $J(t)$ непрерывны.

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathbf{E}\,|X_{ij}^{(n)}|<\infty$, *функции* $f_n(s,x)=b_n([ns],[x\sqrt{n}])$ *и* $a_n(v,x)=\mathbf{E}X_{[nv][x\sqrt{n}]}^{(n)}$ *при любом* $A>0$ *равномерно ограниченны на* $[0,T]\times[-A,A]$ *и* $f_n(s,x)\to f(s,x)$, $a_n(v,x)\to a(v,x)$. *Пусть для величин*

$$X_{nij}=n^{-3/2}\chi_{\{|X_{ij}^{(n)}-\mathbf{E}X_{ij}^{(n)}|<n^{3/2}\}}(X_{ij}^{(n)}-\mathbf{E}X_{ij}^{(n)})$$

при любом $A>0$ *выполнены соотношения*

$$\sum_{i=[-A\sqrt{n}]}^{[A\sqrt{n}]}\sum_{j=1}^{[nT]}\mathbf{P}\{|X_{ij}^{(n)}-\mathbf{E}X_{ij}^{(n)}|\geqslant n^{3/2}\}\to 0,$$

$$n^{3/2}\max_{-A\sqrt{n}<i<A\sqrt{n}}\max_{1\leqslant j\leqslant nT}|\mathbf{E}X_{nij}|\to 0,\quad n^{3/2}\max_{-A\sqrt{n}<i<A\sqrt{n}}\max_{1\leqslant j\leqslant nT}\mathbf{E}X_{nij}^2\to 0.$$

Тогда процесс $V_n(t)=n^{-2}\sum_{k=1}^{[nt]}b_n(k,\nu_k)X_{\nu_k}^{(n)}(k)$ *слабо сходится к процессу* $V(t)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_0^t dv\int_v^t a(v,x)f(s,x)\,\mathfrak{t}(ds,x)$.

Определение (см. [17]). Процесс $\eta(t)$ ($t\geqslant 0$, $\eta(0)=0$) называется *полуустойчивым*, если для любой постоянной $c>0$ при некотором

$\delta > 0$ конечномерные распределения процессов $\eta(t)$ и $c^{-\delta}\eta(ct)$ совпадают.

Скажем, что функция $f(x)$ или функция $f(s, x)$ удовлетворяет условию (А), если для любой постоянной $c > 0$ при некотором $\delta > 0$

$$f(x) = c^{-\delta} f(\sqrt{c}x), \quad f(s, x) = c^{-\delta} f(cs, \sqrt{c}x).$$

Замечание. Процессы $I(t)$, $C(t)$, $J(t)$ и $V(t)$ при условии, что входящие в их определение функции f, a и σ удовлетворяют (А), являются полуустойчивыми. Полуустойчивыми будут также процессы $S(t)$, $Q(t)$ и $L(t)$, если при $\alpha = 1$ в соотношении (1.1) $\theta_1 = 0$.

Развитию рассмотренных в работе задач во многом способствовали беседы с И. А. Ибрагимовым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969, 472 с.
2. *Бородин А. Н.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, определенных на невозвратном случайном блуждании.— Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 85, с. 17—29.
3. *Бородин А. Н.* Некоторые предельные теоремы для процессов со случайным временем.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, в. 4, с. 754—770.
4. *Бородин А. Н.* Предельная теорема для сумм независимых случайных величин, определенных на возвратном случайном блуждании.— Докл. АН СССР, 1979, т. 246, № 4, с. 786—788.
5. *Kesten H., Spitzer F.* A limit theorem related to a new class of self similar processes.— Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 50, H. 1, S. 5—25.
6. *Бородин А. Н.* Асимптотическое поведение локальных времен возвратных случайных блужданий с конечной дисперсией.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 4, с. 769—783.
7. *Straf M. L.* Weak convergence of stochastic processes with several parameters.— In: Proceedings of the Sixth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. V. II. Berkeley—Los-Angelos: Univ. California Press, 1972, p. 187—221.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965, 654 с.
9. *Cairoli R., Walsh J. B.* Stochastic integrals in the plane.— Acta Math., 1975, v. 134, № 1—2, p. 111—183.
10. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968, 394 с.
11. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
12. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1961, 216 с.
13. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятн. и ее примен., 1956, т. 1, в. 2, с. 177—238.
14. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
15. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 414 с.
16. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956, 606 с.
17. *Lamperti J.* Semi-stable stochastic processes.— Trans. Amer. Math. Soc., 1962, v. 104, № 1, p. 62—78.

Поступила в редакцию
9.VI.1980

LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES DEFINED ON A RECURRENT RANDOM WALK

BORODIN A. N. (LENINGRAD)

(Summary)

Let ν_k be a recurrent random walk with finite variance on an integer lattice. Let $\{X_i\}$, $\{X_{ij}\}$ $(-\infty < i, j < \infty)$ be sequences of independent random variables, which are independent of $\{\nu_k\}$, and let $b_n(k, i)$ be a non-random positive variables. The paper deals with the asymptotic (as $n \to \infty$) behaviour of the quantities

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{\nu_k}, \quad \bar{S}_n = \sum_{k=1}^{\varkappa_n} X_{\nu_k},$$

where $\varkappa_n$ is the first moment when the random walk leaves the interval $(-a\sqrt{n}, b\sqrt{n})$, $a > 0$, $b > 0$,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} b_n(k, \nu_k) X_{\nu_k}, \quad J_n = \sum_{k=1}^{n} b_n(k, \nu_k) \sum_{j=1}^{k} X_{\nu_k j}$$

and some others.