Ch. K. Gupta, E. I. Timoshenko, Test Rank for Some Free Polynilpotent Groups, *Algebra Logika*, 2003, Volume 42, Number 1, 37–50

Алгебра и логика, 42, № 1 (2003), 37—50

УДК 512.5

О ТЕСТОВОМ РАНГЕ НЕКОТОРЫХ СВОБОДНЫХ ПОЛИНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП*)

Ч. К. ГУПТА, Е. И. ТИМОШЕНКО

§ 1. Предварительные сведения и обозначения

Элемент g группы G называется *тестовым*, если любой эндоморфизм φ группы G, оставляющий элемент g на месте, является автоморфизмом, т. е. из условия $\varphi(g) = g$ следует, что φ — автоморфизм.

Пусть G является r-порожденной группой. Набор элементов $\{g_1, \ldots, g_n\}$, $n \leqslant r$, называется *тестовым*, если для всякого эндоморфизма φ группы G из условий $\varphi(g_i) = g_i$, $i = 1, \ldots, n$, следует, что φ — автоморфизм.

Тестовым рангом группы G называется наименьшая длина тестового набора, будем его обозначать через $tr(G)$. Тернер [1] определил, что тестовый ранг конечно порожденной свободной группы равен 1, и дал описание тестовых элементов свободной группы. В [2] доказано, что тестовый ранг свободной метабелевой группы на единицу меньше ее ранга, там же дано описание тестовых наборов. Романьков [3] доказал, что тестовый ранг свободной трехступенно разрешимой группы с двумя порождающими равен 1, и указал конкретный тестовый элемент для такой группы.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты N 99-01-00567 и N 02-01-00293, Минобразования РФ, грант ЕОО-1.0-12 и научная программа "Фундаментальные исследования высшей школы. Университеты России".

Пусть $\mathbb{A}$ — многообразие всех абелевых групп, $\mathbb{N}_c$ — многообразие нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше c, F — свободная группа конечного ранга.

Мы доказываем теорему о возможных значениях тестового ранга для групп вида F/R'. На основании этой теоремы можно заключить, что для любых числа $r \geqslant 2$ и набора классов $(c_1, \ldots, c_l)$ тестовый ранг свободной полинильпотентной группы $F_r(\mathbb{A}\mathbb{N}_{c_1} \ldots \mathbb{N}_{c_l})$ равен $r-1$ или r. Более того, при $r \geqslant 2$ и $c \geqslant 2$ справедливо $tr(F_r(\mathbb{A}\mathbb{N}_c)) = r - 1$.

Будем придерживаться следующих обозначений: F — свободная группа ранга r с базисом $x_1, \ldots, x_r$, R — нормальная подгруппа из F, $\widetilde{F} = F/R'$, $\overline{F} = F/R$. Зафиксируем естественные гомоморфизмы $F \to \widetilde{F} \to \overline{F}$. Если f — элемент из F, то $\widetilde{f}$ и $\overline{f}$ — соответствующие (при этих гомоморфизмах) элементы из $\widetilde{F}$ и $\overline{F}$.

Все необходимые сведения о производных Фокса и вложении Магнуса содержатся в [4]. Напомним некоторые из них.

На кольце $\mathbf{Z}(\widetilde{F})$ определим левые производные Фокса $\partial_i, i = 1, \ldots, r$, со значниями в кольце $\mathbf{Z}(\overline{F})$. Для любых элементов $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v} \in \mathbf{Z}(\widetilde{F})$ имеет место

$$\partial_i(\widetilde{u} + \widetilde{v}) = \partial_i\widetilde{u} + \partial_i\widetilde{v}, \quad \partial_i\widetilde{x_j} = \delta_{ij}, \quad \partial_i(\widetilde{u}\widetilde{v}) = \partial_i\widetilde{u} \cdot \varepsilon(\widetilde{v}) + \widetilde{u}\partial_i\widetilde{v}, \tag{1}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $\varepsilon : \mathbf{Z}(\widetilde{F}) \to \mathbf{Z}$ — операция тривиализации.

В кольце $\mathbf{Z}(\overline{F})$ для любого $\widetilde{f} \in \widetilde{F}$ имеет место следующее важное равенство:

$$\sum_{i=1}^{r} \partial_i\widetilde{f}(\overline{x_i} - 1) = \overline{f} - 1. \tag{2}$$

Для любых $\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_r} \in \mathbf{Z}(\overline{F})$ и $\overline{f} \in \overline{F}$ равенство

$$\sum \overline{\alpha_i}(\overline{x_i} - 1) = \overline{f} - 1 \tag{3}$$

влечет существование элемента $\widetilde{g} \in \widetilde{F}$ такого, что $\overline{g} = \overline{f}$ и $\overline{\alpha_i} = \partial_i\widetilde{g}$.

Сопряжение определим по формуле $x^y = yxy^{-1}$. Заметим, что $(a^x)^y = a^{yx}$. Как обычно, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$.

Обозначим через $A = R/R'$ абелеву нормальную подгруппу из $\widetilde{F}$. Пусть $R \neq 1$. Тогда A является $\mathbf{Z}(\overline{F})$-модулем, действие элементов из $\overline{F}$ на котором определяется сопряжением.

Пусть $v(x_1, \ldots, x_r)$ — элемент из F, $\widetilde{g_i} \in \widetilde{F}$, $\widetilde{a_i} \in A$. Тогда имеет место (см., напр., [5]) формула

$$v(\widetilde{a_1}\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{a_r}\widetilde{g_r}) = \widetilde{a_1}^{\partial_1 v(\mathbf{g})} \ldots \widetilde{a_r}^{\partial_r v(\mathbf{g})} \cdot v(\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{g_r}), \tag{4}$$

где $\partial_i v(\mathbf{g})$ — значение производной $\partial_i(v)$ в точке $(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r})$ из группы $\overline{F} \times \ldots \times \overline{F}$.

Группу F/R' можно вложить в группу матриц над кольцом $\mathbf{Z}(F/R)$. При этом вложении β, называемом вложением Магнуса, образом элемента $\widetilde{g} \in F/R'$ является матрица

$$\beta(\widetilde{g}) = \begin{pmatrix} \overline{g} & \partial_1\widetilde{g} \cdot t_1 + \ldots + \partial_r\widetilde{g} \cdot t_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\partial_i\widetilde{g}$ — значение производной Фокса в кольце $\mathbf{Z}(\overline{F})$, а $t_1, \ldots, t_r$ — базис свободного $\mathbf{Z}(\overline{F})$-модуля M. Заметим, что элементы $\widetilde{g} \in R/R'$ переходят при вложении Магнуса в матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha_1}t_1 + \ldots + \overline{\alpha_r}t_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем $\overline{\alpha_1}(\overline{x_1}-1)+\ldots+\overline{\alpha_r}(\overline{x_r}-1) = 0$. Таким образом, элементы $\widetilde{g} \in R/R'$ можно отождествлять с элементами из модуля M.

§ 2. Тестовый ранг групп вида F/R'

ЛЕММА 1. *Пусть R — нетривиальная нормальная подгруппа свободной группы F ранга r с базисом $x_1, \ldots, x_r$, $\widetilde{c} \in R/R'$, кольцо $\mathbf{Z}(F/R)$ не имеет делителей нуля, $\overline{\lambda_i}$ — элементы из $\mathbf{Z}(F/R)$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда эндоморфизм*

$$\varphi = \{\widetilde{x_1} \to \widetilde{c}^{\overline{\lambda_1}} \cdot \widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_r} \to \widetilde{c}^{\overline{\lambda_r}} \cdot \widetilde{x_r}\}$$

группы F/R' будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$\partial_1\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_1}+\ldots+\partial_r\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_r}+1$$

является обратимым элементом кольца $\mathbf{Z}(F/R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что φ — автоморфизм группы $\widetilde{F}$. Обратное отображение имеет вид

$$\varphi^{-1}=\{\widetilde{x_1}\to\widetilde{a_1}\widetilde{x_1},\ldots,\widetilde{x_r}\to\widetilde{a_r}\widetilde{x_r}\}$$

для некоторых $\widetilde{a_1},\ldots,\widetilde{a_r}\in A=R/R'$, так как $\varphi^{-1}\varphi(\widetilde{x_i})=\varphi^{-1}(\widetilde{c}^{\overline{\lambda_i}})\widetilde{a_i}\widetilde{x_i}=\widetilde{x_i}$ и A — эпиморфно допустимая подгруппа из $\widetilde{F}$.

Заметим, что $\widetilde{a_i}=\widetilde{c}^{\overline{\mu_i}}$ для некоторых $\overline{\mu_i}\in\mathbf{Z}(\overline{F})$, $i=1,\ldots,r$. Действительно, $\varphi(\widetilde{a_i}\widetilde{x_i})=\widetilde{x_i}$. С другой стороны, $\varphi(\widetilde{a_i}\widetilde{x_i})$ есть результат подстановки в слово $\widetilde{v_i}=\widetilde{a_i}\widetilde{x_i}$ элементов $\widetilde{c}^{\overline{\lambda_i}}\widetilde{x_i}$ вместо $\widetilde{x_i}$. Из (4) получим

$$\varphi(\widetilde{v_i})=v_i(\widetilde{c}^{\overline{\lambda_1}}\widetilde{x_1},\ldots,\widetilde{c}^{\overline{\lambda_r}}\widetilde{x_r})=\widetilde{c}^{-\overline{\mu_i}}\widetilde{a_i}\widetilde{x_i}.$$

Значит, $\widetilde{a_i}=\widetilde{c}^{\overline{\mu_i}}$. Таким образом,

$$\varphi^{-1}=\{\widetilde{x_1}\to\widetilde{c}^{\overline{\mu_1}}\widetilde{x_1},\ldots,\widetilde{x_r}\to\widetilde{c}^{\overline{\mu_r}}\widetilde{x_r}\}. \tag{5}$$

Используя (4), вычислим

$$\varphi^{-1}\varphi(\widetilde{x_i})=\varphi^{-1}(\widetilde{c}^{\overline{\lambda_i}}\widetilde{x_i})=(\widetilde{c}^{\overline{\mu_1}})^{\partial_1(c^{\overline{\lambda_i}}x_i)}\cdot(\widetilde{c}^{\overline{\mu_2}})^{\partial_2(c^{\overline{\lambda_i}}x_i)}\ldots(\widetilde{c}^{\overline{\mu_r}})^{\partial_r(c^{\overline{\lambda_i}}x_i)}\widetilde{c}^{\overline{\lambda_i}}\widetilde{x_i}$$

$$=\widetilde{c}^{(\overline{\lambda_i}\partial_1 c+\delta_{1i})\overline{\mu_1}+\ldots+(\overline{\lambda_i}\partial_r c+\delta_{ri})\overline{\mu_r}+\overline{\lambda_i}}\widetilde{x_i}=\widetilde{c}^{\overline{\lambda_i}(\partial_1 c\cdot\overline{\mu_1}+\ldots+\partial_r c\cdot\overline{\mu_r}+1)+\overline{\mu_i}}\cdot\widetilde{x_i}.$$

Значит,

$$\overline{\lambda_i}(\partial_1\widetilde{c}\cdot\overline{\mu_1}+\ldots+\partial_r\widetilde{c}\cdot\overline{\mu_r}+1)=-\overline{\mu_i}. \tag{6}$$

Аналогично,

$$\overline{\mu_i}(\partial_1\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_1}+\ldots+\partial_r\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_r}+1)=-\overline{\lambda_i}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем, что $\partial_1\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_1}+\ldots+\partial_r\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_r}+1$ — единица кольца $\mathbf{Z}(\overline{F})$.

Предположим теперь, что $\partial_1\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_1}+\ldots+\partial_r\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_r}+1$ — обратимый элемент из кольца $\mathbf{Z}(\overline{F})$, а $\overline{\lambda}$ — обратный к нему элемент. Пусть $\overline{\mu_i}=-\overline{\lambda}_i\cdot\overline{\lambda}$. Тогда из (6) и (7) получим, что отображение, определенное согласно (5), будет обратным к φ. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть F — свободная группа конечного ранга r с базисом $x_1, \ldots, x_r$, R — нетривиальная нормальная подгруппа из F, лежащая в коммутанте F', $\mathbf{Z}(F/R)$ — кольцо без делителей нуля, имеющее лишь тривиальные единицы. Если система элементов $\{\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{g_m}\} \in \in F/R'$ является тестовой, то для любого решения $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_m} \in \mathbf{Z}(F/R)$ системы уравнений*

$$\begin{array}{cccc} \partial_1\widetilde{g_1} \cdot \overline{\lambda_1} + & \ldots & +\partial_r\widetilde{g_1} \cdot \overline{\lambda_r} & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1\widetilde{g_m} \cdot \overline{\lambda_1} + & \ldots & +\partial_r\widetilde{g_m} \cdot \overline{\lambda_r} & = 0 \end{array} \tag{8}$$

и любого $\widetilde{c} \in R/R'$ должно выполняться условие

$$\partial_1\widetilde{c} \cdot \overline{\lambda_1} + \ldots + \partial_r\widetilde{c} \cdot \overline{\lambda_r} = 0. \tag{9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{g_m}\} \in \widetilde{F}$ — тестовая система элементов и $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_r}$ — некоторое решение системы уравнений (8). Рассмотрим эндоморфизм

$$\varphi = \{\widetilde{x_1} \to \widetilde{c}^{\overline{\lambda_1}}\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_r} \to \widetilde{c}^{\overline{\lambda_r}}\widetilde{x_r}\}, \tag{10}$$

соответствующий решению $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_r}$ и элементу $\widetilde{c} \in R/R'$.

В силу (4), система уравнений (8) гарантирует, что система элементов $\{\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{g_m}\}$ остается неподвижной под действием эндоморфизма φ. Значит, φ — автоморфизм группы $\widetilde{F}$. По лемме 1 для любого элемента $\widetilde{c} \in R/R'$ должно выполняться следующее условие: $\partial_1\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_1}+\ldots+\partial_r\widetilde{c}\cdot\overline{\lambda_r}+1$ — единица кольца $\mathbf{Z}(\overline{F})$. Так как $\mathbf{Z}(\overline{F})$ имеет лишь тривиальные единицы, а элементы $\partial_i\widetilde{c}$ лежат в его фундаментальном идеале, найдется $\overline{g}_c \in \overline{F}$ такой, что

$$\partial_1\widetilde{c} \cdot \overline{\lambda_1} + \ldots + \partial_r\widetilde{c} \cdot \overline{\lambda_r} = \overline{g}_c - 1.$$

Предположим, что для некоторого $\widetilde{c} \in R/R'$ элемент $\overline{g}_c$ отличен от единицы. Пусть $\bar{t} \in \mathbf{Z}(\overline{F})$. Элементы $\overline{\lambda_1} \cdot \bar{t}, \ldots, \overline{\lambda_r} \cdot \bar{t}$ удовлетворяют системе (8) при любом $\bar{t}$. Тогда при любом $\widetilde{c} \in R/R'$ для некоторого $\overline{h} \in \overline{F}$ должно выполняться условие

$$\partial_1\widetilde{c} \cdot \overline{\lambda}_1\bar{t} + \ldots + \partial_r\widetilde{c} \cdot \overline{\lambda}_r\bar{t} = \overline{h} - 1. \tag{11}$$

Тогда $(\overline{g}_c - 1)\overline{t} = \overline{h} - 1$. Однако, это невозможно, например, при $\overline{t} = \overline{g}_c - 1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть F — свободная группа конечного ранга с базисом $x_1, \ldots, x_r$, R — нетривиальная вербальная подгруппа из F, лежащая в коммутанте F', $\mathbf{Z}(F/R)$ — кольцо без делителей нуля, удовлетворяющее условию Орэ, имеющее лишь тривиальные единицы. Тогда $tr(F/R')$ равно $r-1$ или r.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вложение Магнуса β группы F/R' в группу матриц над кольцом $\mathbf{Z}(\overline{F})$. Заметим, что условия позволяют вложить $\mathbf{Z}(\overline{F})$ в тело частных T. Пусть элементы $\widetilde{c_j}(\widetilde{x_1}, \widetilde{x_j})$, $j = 2, \ldots, r$, отличны от 1 и лежат в R/R'. Тогда $\beta(\widetilde{c_2}), \ldots, \beta(\widetilde{c_r})$, как элементы свободного модуля M, независимы над телом T, так как имеют "ступенчатый" вид. Пусть $m < r-1$ и $\{\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{g_m}\}$ — тестовая система элементов из группы $\widetilde{F}$. Тогда система уравнений (8) имеет по крайней мере два линейно независимых над T решения. Они должны удовлетворять условию (9) при любом $\widetilde{c} \in R/R'$. Однако, если $\widetilde{c}$ пробегает элементы $\widetilde{c_2}, \ldots, \widetilde{c_r}$, то полученная из (9) система уравнений имеет ранг решений, равный единице. Полученное противоречие завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть $\mathbb{M}$ — многообразие всех полинильпотентных групп данного класса. Тогда при $r \geqslant 2$ тестовый ранг группы $F_r(\mathbb{AM})$ равен $r-1$ или r, в частности, при $r \geqslant 3$ она не имеет тестовых элементов.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть F — свободная группа ранга $r \geqslant 2$, R — нетривиальная вербальная подгруппа из F, лежащая в F'. Предположим, что кольцо $\mathbf{Z}(F/R)$ без делителей нуля и удовлетворяет условию Орэ, $\{\widetilde{g}_1, \ldots, \widetilde{g}_{r-1}\}$ — тестовая система элементов группы F/R'. Тогда все элементы $\widetilde{g}_i$ лежат в R/R' и линейно независимы над телом частных T кольца $\mathbf{Z}(F/R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\widetilde{g_1} \notin R/R'$. Система уравнений

$$\begin{array}{llll}\partial_1\widetilde{g_1}\cdot\overline{\lambda_1}+ & \dots & +\partial_r\widetilde{g_1}\cdot\overline{\lambda_r} & =0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \partial_1\widetilde{g}_{r-1}\cdot\overline{\lambda_1}+ & \dots & +\partial_r\widetilde{g}_{r-1}\cdot\overline{\lambda_r} & =0\end{array}$$

имеет в $\mathbf{Z}(\overline{F})$ ненулевое решение. Пусть $\widetilde{c_j}(\widetilde{x_1},\widetilde{x_j})$, $j=2,\dots,r$, — неединичные элементы из R/R'. Тогда система уравнений

$$\begin{array}{llll}\partial_1\widetilde{c_2}\cdot\overline{\lambda_1}+ & \dots & +\partial_r\widetilde{c_2}\cdot\overline{\lambda_r} & =0\\ \dots & \dots & \dots\dots & \\ \partial_1\widetilde{c_r}\cdot\overline{\lambda_1}+ & \dots & +\partial_r\widetilde{c_r}\cdot\overline{\lambda_r} & =0\\ \partial_1\widetilde{g_1}\cdot\overline{\lambda_1}+ & \dots & +\partial_r\widetilde{g_1}\cdot\overline{\lambda_r} & =0\end{array}\tag{12}$$

должна иметь ненулевое решение в кольце $\mathbf{Z}(\overline{F})$. Первые $r-1$ уравнение линейно независимы, поэтому последнее уравнение можно выразить через них с коэффициентами из тела частных T. Тогда

$$\begin{array}{l}\partial_1\widetilde{g_1}=\overline{\mu_1}\cdot\partial_1\widetilde{c_2}\quad+\overline{\mu_2}\cdot\partial_1\widetilde{c_3}+\quad\dots+\quad\overline{\mu}_{r-1}\partial_1\widetilde{c_r}\\ \partial_2\widetilde{g_1}=\overline{\mu_1}\cdot\partial_2\widetilde{c_2}\\ \qquad\dots\\ \partial_r\widetilde{g_1}=\overline{\mu}_{r-1}\partial_r\widetilde{c_r}.\end{array}\tag{13}$$

С учетом (2) получаем

$$\overline{g_1}-1=\overline{\mu_1}(\overline{c_2}-1)+\dots+\overline{\mu}_{r-1}(\overline{c_r}-1)=0,$$

так как $\widetilde{c_j}\in R/R'$. Значит, $\widetilde{g_1}\in R/R'$. Независимость элементов $\{g_1,\dots,g_{r-1}\}$ над телом T следует из того, что для любой системы из $r-2$ элементов существует эндоморфизм группы $\widetilde{F}$, тождественный на $\overline{F}$ и не являющийся автоморфизмом. Следствие доказано.

§ 3. Тестовый ранг группы $F_r(\mathbb{AN}_{c_1}\dots\mathbb{N}_{c_l})$

Пусть N — свободная полинильпотентная группа конечного ранга r с базисом $a_1,\dots,a_r$, $r\geqslant 2$. Как показал А. И. Мальцев [6], целочисленное групповое кольцо линейно упорядоченной группы N вкладывается в тело формальных рядов $\mathcal{T}$ с коэффициентами из поля рациональных чисел.

Любой элемент $f \in \mathcal{T}$ можно однозначно записать в виде

$$f = u_0 a_i^s + u_1 a_i^{s+1} + \ldots, \tag{14}$$

где s — целое число, u_i — элементы из подтела тела $\mathcal{T}$, порожденного гр$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_r, N')$.

Если запись (14) конечна, т. е.

$$f = u_0 a_i^s + \ldots + u_t a_i^{s+t}, \qquad u_0, u_t \neq 0 \tag{15}$$

то, следуя Романькову [7], будем говорить, что элемент f имеет *конечное разложение по* a_i. Число t назовем a_i*-длиной* элемента f.

ЛЕММА 2. *Пусть N — свободная полинильпотентная группа с базисом $a_1, \ldots, a_r$, $r \geqslant 2$, a — элемент из кольца $\mathbf{Z}(N)$ и $a(1-a_1)^{-1}(1 - a_2) \in \mathbf{Z}(N)$. Тогда существует $b \in \mathbf{Z}(N)$ такой, что $a = b(1-a_1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем a в виде (15) по степеням элемента a_1:

$$a = u_0 a_1^s + \ldots + u_t a_1^{s+t}. \tag{16}$$

Можно считать, что $s > 0$, так как элемент aa_1^n также удовлетворяет условию леммы при любом целом n. Поскольку

$$a = u_0(a_1^s - 1) + \ldots + u_t(a_1^{s+t} - 1) + u_0 + \ldots + u_t,$$

элемент $a' = u_0 + \ldots + u_t$, у которого a_1-длина равна 0, также удовлетворяет условию леммы. Поэтому будем считать, что a_1-длина элемента a равна 0. В таком случае $a(1-a_1)^{-1}(1-a_2)$ можно представить в виде

$$u_0(1-a_2) + u_0(1-[a_1, a_2]a_2)a_1 + \ldots + u_0(1-[a_1^n, a_2]a_2)a_1^n + \ldots . \tag{17}$$

Так как запись (17) каноническая, то a_1-длина элемента $a(1-a_1)^{-1}(1-a_2)$ бесконечна. Однако, элементы из $\mathbf{Z}(N)$ имеют конечную a_1-длину. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следующая теорема играет важную роль при исследовании тестового ранга свободной полинильпотентной группы и обобщает теорему Шмелькина [8], доказанную для свободных разрешимых групп.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть F — свободная группа конечного ранга $r \geqslant 2$, R — вербальная подгруппа из F такая, что F/R — свободная полинильпотентная группа. Предположим, что эндоморфизм φ группы F/R' действует тождественно на подгруппе $A = R/R'$. Тогда φ — внутренний автоморфизм группы F/R', индуцированный некоторым элементом из A.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся вначале, что φ индуцирует тождественный автоморфизм группы $\overline{F}$. Пусть $\widetilde{x} \in A$, $\widetilde{h} \in \widetilde{F}$. Тогда

$$\varphi(\widetilde{h}^{-1}\widetilde{x}\widetilde{h}) = \widetilde{h}^{-1}\widetilde{x}\widetilde{h} = \varphi(\widetilde{h}^{-1})\widetilde{x}\varphi(\widetilde{h}),$$

т. е. $\widetilde{h}^{-1}\varphi(\widetilde{h})$ перестановочен с любым $\widetilde{x} \in A$. Тогда (см., напр., [9]) $\widetilde{h}^{-1}\varphi(\widetilde{h}) \in A$.

Пусть $\varphi(\widetilde{x}_i) = \widetilde{c}_i\widetilde{x}_i$, $i = 1, \ldots, r$, $\widetilde{c}_i \in A$. Выберем неединичный элемент $\widetilde{g} \in A$, зависящий лишь от $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$. Тогда

$$\varphi(\widetilde{g}) = \widetilde{g}(\widetilde{c}_1\widetilde{x}_1, \widetilde{c}_2\widetilde{x}_2) = \widetilde{c}_1^{\partial_1 g}\widetilde{c}_2^{\partial_2 g}\widetilde{g}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = \widetilde{g},$$

т. е.

$$\widetilde{c}_1^{\partial_1 g}\widetilde{c}_2^{\partial_2 g} = 1. \tag{18}$$

Вычисляя производные Фокса от левой и правой частей (18), в кольце $\mathbf{Z}(\overline{F})$ получим

$$\partial_1\widetilde{g} \cdot \partial_i\widetilde{c}_1 + \partial_2\widetilde{g} \cdot \partial_i\widetilde{c}_2 = 0 \tag{19}$$

при $i = 1, \ldots, r$. Кроме того, имеет место равенство

$$\partial_1\widetilde{g}(\overline{x}_1 - 1) + \partial_2\widetilde{g}(\overline{x}_2 - 1) = 0, \tag{20}$$

так как $\widetilde{g} \in A$. Переходя от кольца $\mathbf{Z}(\overline{F})$ к телу степенных рядов $\mathcal{T}$, из (20) получим

$$\partial_2\widetilde{g} = \partial_1\widetilde{g}(1 - \overline{x}_1)(\overline{x}_2 - 1)^{-1}. \tag{21}$$

Подставляя это в (19), имеем равенство

$$\partial_1\widetilde{g}\partial_i\widetilde{c}_1 + \partial_1\widetilde{g}(1 - \overline{x}_1)(\overline{x}_2 - 1)^{-1}\partial_i\widetilde{c}_2 = 0.$$

Отсюда следует

$$\partial_i\widetilde{c}_1 + (1 - \overline{x}_1)(\overline{x}_2 - 1)^{-1}\partial_i\widetilde{c}_2 = 0. \tag{22}$$

По лемме 2, $\partial_i \widetilde{c}_2 = (\overline{x}_2 - 1)\overline{\alpha}_i$ для некоторого $\overline{\alpha}_i \in \mathbf{Z}(\overline{F})$. Тогда из (22) вытекает

$$\partial_i \widetilde{c}_1 = (\overline{x}_1 - 1)(\overline{x}_2 - 1)^{-1}(\overline{x}_2 - 1)\overline{\alpha}_i = (\overline{x}_1 - 1)\overline{\alpha}_i. \tag{23}$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{r} \partial_i \widetilde{c}_1 (\overline{x}_i - 1) = 0.$$

Значит, в силу (23) справедливо

$$\sum_{1=1}^{r} \overline{\alpha}_i (\overline{x}_i - 1) = 0. \tag{24}$$

Принимая во внимание (3), делаем вывод, что существует $\widetilde{u} \in A$, для которого $\overline{\alpha}_i = \partial_i \widetilde{u}$, $i = 1, \ldots, r$. Поскольку

$$\partial_i \widetilde{c}_1 = (\overline{x}_1 - 1)\overline{\alpha}_i = (\overline{x}_1 - 1)\partial_i \widetilde{u} = \partial_i [\widetilde{x}_1, \widetilde{u}],$$

выполняется $\widetilde{c}_1 = [\widetilde{x}_1, \widetilde{u}]$. Аналогично, $\widetilde{c}_2 = [\widetilde{x}_2, \widetilde{u}]$. Затем выбираем новый элемент $\widetilde{g}$, зависящий от $\widetilde{x}_1$, $\widetilde{x}_3$ и лежащий в подгруппе A. Получим $\widetilde{c}_1 = [\widetilde{x}_1, \widetilde{v}]$, $\widetilde{c}_3 = [\widetilde{x}_3, \widetilde{v}]$ для некоторого $\widetilde{v} \in A$. Так как $[\widetilde{x}_1, \widetilde{u}] = [\widetilde{x}_1, \widetilde{v}]$, то $\widetilde{u} = \widetilde{v}$. Таким образом, $\widetilde{c}_i = [\widetilde{x}_i, \widetilde{u}]$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Тогда

$$\varphi(\widetilde{x}_i) = \widetilde{c}_i \widetilde{x}_i = \widetilde{x}_i \widetilde{u} \widetilde{x}_i^{-1} \widetilde{u}^{-1} \cdot \widetilde{x}_i = \widetilde{u}^{-1} \widetilde{x}_i \widetilde{u}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть F — свободная группа с базисом $x_1, \ldots, x_r$, $r \geqslant 3$, $l > c > 1$, $R = \gamma_c(F)$, $\widetilde{F} = F/R'$, при $j = 2, \ldots, r$ коммутаторы $\widetilde{g}_{jl} = [\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_j, \ldots, \widetilde{x}_j]$ имеют вес l, эндоморфизм φ группы $\widetilde{F}$ таков, что $\varphi(\widetilde{g}_{jl}) = \widetilde{g}_{jl}$ при фиксированном l и всех $j = 2, \ldots, r$. Тогда φ^2 — внутренний автоморфизм, индуцированный элементом из $A = R/R'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c = 2$, т. е. $\widetilde{F}$ — свободная метабелева группа. Обозначим $\widetilde{y}_i = \varphi(\widetilde{x}_i)$, $\widetilde{z}_i = \varphi(\widetilde{y}_i)$, $i = 1, \ldots, r$. По условию

$$[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_j, \ldots, \widetilde{x}_j] = [\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_j, \ldots, \widetilde{y}_j] = [\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_j, \ldots, \widetilde{z}_j] \tag{25}$$

для $j = 2, \ldots, r$. Другими словами,

$$[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_j]^{(1-\overline{x}_j)^{l-2}} = [\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_j]^{(1-\overline{y}_j)^{l-2}} = [\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_j]^{(1-\overline{z}_j)^{l-2}}. \tag{26}$$

Вычисляя первую производную Фокса от левой и правой частей равенства (26), в кольце $\mathbf{Z}(\overline{F})$ получим

$$(1-\overline{x}_j)^{l-1} = (1-\overline{y}_j)^{l-2}\partial_1[\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_j].$$

Так как все делители элемента $(1-\overline{x}_j)^{l-1}$ имеют вид $\pm\overline{f}(1-\overline{x}_j)^m$, где $\overline{f} \in \overline{F}$, $0 \leqslant m \leqslant l-1$, то $\widetilde{x}_j \equiv \widetilde{y}_j \,(\mathrm{mod}\widetilde{F'})$ или $\widetilde{x}_j \equiv \widetilde{y}_j^{-1} \,(\mathrm{mod}\widetilde{F'})$. Значит, $\widetilde{x}_j \equiv \widetilde{z}_j \,(\mathrm{mod}\widetilde{F'})$.

Проверим, что $\widetilde{x}_1 \equiv \widetilde{z}_1 \,(\mathrm{mod}\widetilde{F'})$. Заметим, что из (26) следует $[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_j] = [\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_j]$. Рассмотрим гомоморфизм группы $\widetilde{F}$ на свободную двухступенно нильпотентную группу $F_r(\mathbb{N}_2)$. Применяя его к последнему равенству, убедимся, что $\widetilde{x}_1 \equiv \widetilde{z}_1 \,(\mathrm{mod}\widetilde{F'})$.

Итак, отображение $\widetilde{x}_i \to \widetilde{z}_i$ тождественно на группе $\widetilde{F}/\widetilde{F'}$ и оставляет неподвижными элементы $\{\widetilde{g}_2, \ldots, \widetilde{g}_r\}$. Эти элементы образуют базис модуля $\widetilde{F'}$ над телом частных кольца $\mathbf{Z}(\overline{F})$. Тогда φ^2 индуцирует тождественный эндоморфизм подгруппы $\widetilde{F'}$. По теореме 2, φ^2 — внутренний автоморфизм, индуцированный элементом из $\gamma_2(\widetilde{F}) = A$.

Пусть $c > 2$. Обозначим $\widehat{F} = F/[\gamma_{c-1}(F), \gamma_{c-1}(F)]$, и $\widehat{\varphi}$ — эндоморфизм, индуцированный φ в группе $\widehat{F}$ при естественном гомоморфизме $\widetilde{F} \to \widehat{F}$. Так как $\widehat{\varphi}$ оставляет неподвижными элементы $\widehat{g}_{jl} = [\widehat{x}_1, \widehat{x}_j, \ldots, \widehat{x}_j]$, $j = 2, \ldots, r$, и по индукционному предположению, $\widehat{\varphi^2}$ будет внутренним автоморфизмом, индуцированным некоторым элементом $\widehat{u}$ из $\gamma_{c-1}(\widehat{F})$, т. е. $\widehat{\varphi^2}(\widehat{x}_i) = \widehat{x}_i^u$. Значит,

$$\varphi^2(x_i) \equiv u x_i u^{-1} \,(\mathrm{mod}\,[\gamma_{c-1}(F), \gamma_{c-1}(F)]).$$

Отсюда

$$\varphi^2(x_i) \equiv u x_i u^{-1} x_i^{-1} x_i = [u, x_i] x_i \equiv x_i \,(\mathrm{mod}\gamma_c(F)).$$

Итак, φ^2 индуцирует тождественное отображение в группе $\overline{F}$. Элементы $\widetilde{g}_{jl}$, $j = 2, \ldots, r$, составляют базис модуля A над телом частных кольца $\mathbf{Z}(\overline{F})$. Следовательно, φ^2 индуцирует тождественный автоморфизм на подгруппе A. По теореме 2, φ^2 — внутренний автоморфизм, индуцированный элементом из A. Теорема доказана.

Конечно, заключение теоремы неверно при $r = 2$. Так, например, $[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_2] = [\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_2]$. Тем не менее, при $r = 2$ верна

ТЕОРЕМА 4. *Пусть F — свободная группа ранга 2 с базисом x_1, x_2, $c \geqslant 2$, $t \geqslant 1$, $R = \gamma_c(F)$, $\widetilde{F} = F/R'$. Пусть $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2 \in \widetilde{F}$, а коммутаторы $[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_2]$ и $[\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_2]$ веса $c + t$ равны. Тогда отображение $\varphi = \{\widetilde{x}_i \to \widetilde{y}_i,\ i = 1, 2\}$ является автоморфизмом группы $\widetilde{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{z}_i = \varphi(\widetilde{y}_i)$, $i = 1, 2$. Индукцией по c докажем следующее утверждение: существует целое число p такое, что отображение $\widetilde{x}_1 \to \widetilde{z}_1\widetilde{z}_2^p$, $\widetilde{x}_2 \to \widetilde{z}_2$ является внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом из $\gamma_c(\widetilde{F})$.

Пусть $c = 2$. Отображение φ сохраняет элемент из коммутанта группы $\widetilde{F'}$. В [2] доказано, что любой элемент из коммутанта свободной метабелевой группы ранга 2 является тестовым. Поэтому отображение φ является автоморфизмом.

Вычислим первую производную Фокса от левой и правой частей равенства

$$[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_2] = [\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_2]$$

в кольце $\mathbf{Z}(\overline{F})$. Получим

$$(1 - \overline{x}_2)^{c+t-1} = (1 - \overline{y}_2)\partial_1[\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \dots, \widetilde{y}_2], \tag{27}$$

где последний коммутатор имеет вес $c + t - 1$. Из (27) получаем $\overline{x}_2 = \overline{y}_2$ или $\overline{x}_2 = \overline{y}_2^{-1}$. Значит, $\overline{x}_2 = \overline{z}_2$. Поэтому существует $p \in \mathbf{Z}$ такое, что $\widetilde{z}_1\widetilde{z}_2^p = \widetilde{x}_1^m\widetilde{d}_1$, где $\widetilde{d}_1 \in \widetilde{F'}$. Следовательно, имеет место равенство

$$[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_2] = [\widetilde{x}_1^m\widetilde{d}_1, \widetilde{x}_2\widetilde{d}_2, \dots, \widetilde{x}_2\widetilde{d}_2], \tag{28}$$

где $\widetilde{d}_2 \in \widetilde{F'}$. Рассмотрим естественный гомоморфизм группы $\widetilde{F}$ на группу $\widetilde{F}/\gamma_{c+t+1}(\widetilde{F})$. Применим его к равенству (28). Получим $m = 1$.

Значит, отображение $\widetilde{x}_1 \to \widetilde{z}_1\widetilde{z}_2^p$, $\widetilde{x}_2 \to \widetilde{z}_2$ тождественно на группе $\widetilde{F}/\widetilde{F'}$ и оставляет элементы из коммутанта неподвижными. По теореме 2 такое отображение является внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом из $\widetilde{F'} = \gamma_2(\widetilde{F})$.

Предположим, что для $c-1$ утверждение верно. Пусть $\widehat{F} = F/[\gamma_{c-1}(F), \gamma_{c-1}(F)]$. Так как для коммутаторов веса $c+t$ имеет место равенство

$$[\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_2] = [\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \ldots, \widehat{z}_2],$$

существует целое p такое, что отображение $\widehat{x}_1 \to \widehat{z}_1\widehat{z}_2^p$, $\widehat{x}_2 \to \widehat{z}_2$ является внутренним автоморфизмом группы $\widehat{F}$, индуцированным элементом $\widehat{u} \in \gamma_{c-1}(\widehat{F})$. Тогда

$$\widehat{z}_1\widehat{z}_2^p = \widehat{x}_1^u = \widehat{u}\widehat{x}_1\widehat{u}^{-1}\widehat{x}_1^{-1}\widehat{x}_1 \equiv \widehat{x}_1 \,(\mathrm{mod}\gamma_c(\widehat{F})).$$

Аналогично, $\widehat{z}_2 \equiv \widehat{x}_2 \,(\mathrm{mod}\gamma_c(\widehat{F}))$. Так как ядро отображения $\widetilde{F} \to \widehat{F}$ лежит в $\gamma_c(\widetilde{F})$, то

$$\widetilde{z}_1\widetilde{z}_2^p \equiv \widetilde{x}_1, \quad \widetilde{z}_2 \equiv \widetilde{x}_2 \quad (\mathrm{mod}\gamma_c(\widetilde{F})).$$

Значит, отображение $\widetilde{x}_1 \to \widetilde{z}_1\widetilde{z}_2^p$, $\widetilde{x}_2 \to \widetilde{z}_2$ тождественно на $\widetilde{F}/\gamma_c(\widetilde{F})$ и оставляет элемент $[\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_2]$ из $\gamma_c(\widetilde{F})$ на месте. По теореме 2 это отображение является внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом из $\gamma_c(\widetilde{F})$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть $r \geqslant 2$, $c \geqslant 2$, F — свободная группа ранга r. Тогда тестовый ранг группы $F/[\gamma_c(F), \gamma_c(F)]$ равен $r-1$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Turner*, Test words for automorphisms of free groups, Bull. Lond. Math. Soc., **28**, N 3 (1996), 255—263.
2. *Е. И. Тимошенко*, Тестовые элементы и тестовый ранг свободной метабелевой группы, Сиб. матем. ж., **41**, N 6 (2000), 1451—1456.
3. *В. А. Романьков*, О тестовых элементах свободных разрешимых групп ранга 2, Алгебра и логика, **40**, N 2 (2001), 192—201.
4. *В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов*, Некоторые свойства вложения Магнуса, Алгебра и логика, **9**, N 5 (1970), 566—578.
5. *Х. Нейман*, Многообразия групп, М., Мир, 1969.
6. *А. И. Мальцев*, О включении групповых алгебр в алгебры с делением, Докл. АН СССР, **60**, N 9 (1948), 1499—1501.

7. *В. А. Романьков*, Нормальные автоморфизмы дискретных групп, Сиб. матем. ж., **24**, N 4 (1983), 138—149.
8. *А. Л. Шмелькин*, Два замечания о свободных разрешимых группах, Алгебра и логика, **6**, N 2 (1967), 95—109.
9. *Е. И. Тимошенко*, Об универсальных теориях метабелевых групп и вложении Шмелькина, Сиб. матем. ж., **42**, N 5 (2001), 1168—1175.

Адреса авторов:

Поступило 25 февраля 2001 г.

GUPTA Chander Kanta,
Department of Mathematics,
University of Manitoba,
Winnipeg R3T 2N2,
CANADA.

ТИМОШЕНКО Евгений Иосифович,
РОССИЯ,
630008, г. Новосибирск,
ул. Никитина, д. 62, кв. 29.
Тел.: (3832) 66-20-31.
e-mail: etim@ngasu.nsk.su