Многоуровневые интерполяции для обобщенной системы Никишина на графе-дереве

В. Г. Лысов

Посвящается 90-летию Андрея Александровича Гончара

Изучается многоуровневая интерполяционная задача для системы марковских функций, определяемой графом-деревом. Доказана нормальность всех индексов. В терминах векторной задачи равновесия логарифмического потенциала исследованы асимптотические свойства.

Библиография: 74 названия. *УДК*: 517.53. *MSC2020*: 41A05. *Ключевые слова и фразы*: марковские функции на графах, аппроксимации Эрмита — Паде, нормальные индексы, совершенные системы, система Анжелеско, система Никишина, многоуровневые интерполяции, слабая асимптотика, векторная задача равновесия логарифмического потенциала.

§ 1. Введение

1.1. Аппроксимации Эрмита — Паде. Пусть $(f_1, \ldots, f_d)$ — вектор ростков аналитических функций в бесконечности:

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{1}$$

Аппроксимациями Эрмита — Паде типа II (с общим знаменателем) вектора ростков (1) для *мультииндекса* $n := (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ называются рациональные функции $\left(\frac{A_{n,1}}{A_{n,0}}, \ldots, \frac{A_{n,d}}{A_{n,0}}\right)$, такие, что степень знаменателя $A_{n,0}$ не превосходит числа $|n| := n_1 + \ldots + n_d$ и выполнены интерполяционные условия в бесконечности:

$$(A_{n,0} f_j - A_{n,j})(z) = O(z^{-n_j - 1}), \quad z \to \infty, \quad j = 1, \ldots, d. \tag{2}$$

Важным частным случаем этой конструкции являются аппроксимации Эрмита — Паде для набора *марковских* функций:

$$f_j(z) = \widehat{s}_j(z) := \int \frac{ds_j(x)}{z - x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E_j, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{3}$$

где $E_1, \ldots, E_d$ — отрезки вещественной оси, $s_1, \ldots, s_d$ — конечные положительные меры с носителями на этих отрезках. Для марковских функций (3) зна-

Исследование выполнено в МЦФПМ при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 075-15-2022-283).

© В. Г. Лысов, 2022

менатели $A_{n,0}$ удовлетворяет следующим соотношениям *совместной ортогональности*:

$$\int A_{n,0}(x)x^k ds_j(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, d. \tag{4}$$

Чтобы исключить тривиальный случай рациональных $\widehat{s}_j$, считают, что носители мер s_j являются бесконечными множествами.

Условия (4) образуют линейную однородную систему $|n|$ уравнений на $|n|+1$ неизвестных коэффициентов $A_{n,0}$, поэтому нетривиальное решение всегда существует. Многочлены $A_{n,j}$ являются полиномиальными частями разложений $A_{n,0}f_j$ в ряды Лорана в бесконечности. Если для любого решения выполнено $\deg A_{n,0} = |n|$, то мультииндекс n называется *нормальным*. В этом случае аппроксимации Эрмита—Паде определены однозначно. Если все мультииндексы $n \in \mathbb{Z}_+^d$ нормальны, то система функций $(\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_d)$ называется *совершенной*, см. [71]. Хорошо известны две совершенные системы марковских функций: система Анжелеско и система Никишина.

По определению в *системе Анжелеско* [39] отрезки E_j попарно не пересекаются. Из соотношений ортогональности (4) следует, что многочлен $A_{n,0}$ имеет не менее n_j перемен знака на E_j. Отсюда сразу следует, что система Анжелеско совершенна.

Система Никишина [26] дает другой крайний случай: в ней все отрезки E_j совпадают, а на меры s_j накладываются ограничения, которые для каждого n обеспечивают [60] независимость условий (4).

В случае $d = 1$ описанная конструкция приводит к разложению функции $\widehat{s}_1$ в непрерывную дробь. Сходимость последовательности подходящих дробей $\dfrac{A_{n,1}}{A_{n,0}}$ к $\widehat{s}_1$ в области $\mathbb{C} \setminus E_1$ при $|n| \to \infty$ установлена А. А. Марковым в [72].

В работе [10] А. А. Гончаром предложено использовать теорию потенциала для оценки скорости сходимости рациональных аппроксимаций марковских функций. Вопросы, связанные с определением областей сходимости и нахождением скорости сходимости аппроксимаций Эрмита—Паде для систем Анжелеско изучены А. А. Гончаром и Е. А Рахмановым в работе [11]. В работах [11, 13] ими предложен новый асимптотический метод, основанный на векторной задаче равновесия логарифмического потенциала. В работе [15] А. А. Гончара, Е. А Рахманова, В. Н. Сорокина этот метод применен к исследованию сходимости аппроксимаций Эрмита—Паде для широкого класса марковских функций, определяемых графами-деревьями. Такой класс функций назван обобщенной системой Никишина и включает в себя как систему Анжелеско, так и систему Никишина. Аппроксимации Эрмита—Паде для систем марковских функций, определяемых произвольными графами, исследованы в [6].

Об аппроксимациях Эрмита—Паде и многочленах совместной ортогональности см. работы [4, 18, 19, 48, 65] и библиографию к ним. Системам

Анжелеско посвящены работы [1, 17, 28, 46, 47, 74]. Современные приложения метода векторной задачи равновесия можно найти в [7, 30, 31, 45, 54, 56, 58, 66, 67, 70, 73].

1.2. Многоуровневая интерполяция для системы Никишина. Матрица мер Никишина $s_{j,k}$, $j, k = 1, \ldots, d$, строится по набору генерирующих мер $(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Предполагается, что носителем меры σ_j является отрезок Δ_j, производная абсолютно непрерывной составляющей меры σ_j положительна почти всюду относительно меры Лебега на Δ_j, носители с соседними индексами не пересекаются, т. е. $\Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \varnothing$ при $j < d$. Положим $s_{j,j} := \sigma_j$. Индукцией по $|k-j|$ определим недиагональные элементы матрицы:

$$ds_{j,k} := \widehat{s}_{j+1,k}\, d\sigma_j \text{ при } k > j, \quad ds_{j,k} := \widehat{s}_{j-1,k}\, d\sigma_j \text{ при } k < j.$$

Таким образом, носителем знакопостоянной меры $s_{j,k}$ является отрезок Δ_j. Для пары генерирующих мер с соседними индексами удобно использовать следующее обозначение:

$$d\langle \sigma_j, \sigma_{j+1}\rangle(x) := \widehat{\sigma}_{j+1}(x)\, d\sigma_j(x), \quad j < d,$$

тогда по индукции определим знакопостоянные меры:

$$\langle \sigma_1\rangle := \sigma_1, \quad \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_j\rangle := \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \ldots, \sigma_j\rangle\rangle. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что $s_{j,k} = \langle \sigma_j, \ldots, \sigma_k\rangle$, где при $k > j$ индексы у мер $\sigma_j, \ldots, \sigma_k$ возрастают, а при $k < j$, наоборот, убывают. *Системой Никишина* называют $(\widehat{s}_{1,1}, \ldots, \widehat{s}_{1,d})$ — преобразования Коши первой строки матрицы Никишина. Исследованию аппроксимаций Эрмита — Паде для систем Никишина посвящена обширная библиография, см. [2, 5, 16, 21–23, 29, 35, 36, 42, 59].

В работе [24] для преобразований Коши элементов матрицы Никишина под главной диагональю рассмотрена следующая интерполяционная задача. Для мультииндекса $n \in \mathbb{Z}_+^d$ найти такие многочлены $P_{n,0}, P_{n,1}, \ldots, P_{n,d}$, что $P_{n,0} \not\equiv 0$ и выполнены интерполяционные соотношения при $z \to \infty$:

$$\begin{aligned}
&P_{n,0} = O(z^{|n|}),\\
&P_{n,0}\,\widehat{s}_{1,1} + P_{n,1} = O(z^{-n_1-1}),\\
&P_{n,0}\,\widehat{s}_{2,1} + P_{n,1}\,\widehat{s}_{2,2} + P_{n,2} = O(z^{-n_2-1}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_{n,0}\,\widehat{s}_{d,1} + P_{n,1}\,\widehat{s}_{d,2} + P_{n,2}\,\widehat{s}_{d,3} + \ldots + P_{n,d-1}\,\widehat{s}_{d,d} + P_{n,d} = O(z^{-n_d-1}).
\end{aligned} \tag{6}$$

Такую задачу называют *многоуровневой интерполяционной*. Она обладает следующими замечательными свойствами (см. [24]).

1) Для каждого мультииндекса $n \in \mathbb{Z}_+^d$ решение задачи существует и единственно с точностью до нормировки, многочлен $P_{n,0}$ имеет степень $|n|$.

2) Пусть $p = (p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{R}_+^d$ и $|p| = 1$. Пусть Λ_p — такая последовательность мультииндексов, что при $n \in \Lambda_p$ выполнено $|n| \to \infty$ и $n_j/|n| \to p_j$ при

$j=1, \ldots, d$. Тогда справедливы предельные соотношения, которые не зависят от p:

$$(-1)^j \frac{P_{n,j}(x)}{P_{n,0}(x)} \to \widehat{s}_{1,j}(x), \quad n \in \Lambda_p, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1. \tag{7}$$

3) Скорость сходимости в (7) определяется решением некоторой, зависящей от p, векторной задачи равновесия логарифмического потенциала.

4) Пусть n — такой мультииндекс, что при $j<k$ выполнено $n_k \leqslant n_j+1$. Тогда решение задачи (6) определяет аппроксимации Эрмита — Паде для системы Никишина $(\widehat{s}_{1,1}, \ldots, \widehat{s}_{1,d})$. А именно, верны тождества $A_{n,j}=(-1)^j P_{n,j}$ при $j=0, 1, \ldots, d$.

Целью настоящей работы является исследование аналогичных свойств многоуровневых интерполяций для обобщенных систем Никишина, определяемых графами-деревьями. В частности, удалось показать, что все индексы являются нормальными, т. е. обобщенная система Никишина совершенна для интерполяционной задачи (6). Заметим, что совершенство обобщенной системы Никишина для задачи (2) является открытой проблемой. В настоящей работе мы демонстрируем, что задача (6) по существу содержалась в работе [15]. Таким образом, многоуровневая интерполяционная задача рассматривалась А. А. Гончаром, Е. А. Рахмановым, В. Н. Сорокиным за несколько лет до появления приложений, к обсуждению которых мы переходим.

Частный случай интерполяционной задачи (6) для мультииндекса n, у которого только последняя координата отлична от нуля, исследовался в [62, 63, 69]. Оказывается, в случае $d=2$ такая интерполяционная задача возникает при интегрировании уравнения Дегасперис — Прочези [55]. Кроме того, она связана с биортогональными многочленами Коши [51, 52, 61] и двуматричными случайноматричными ансамблями Коши [50, 53]. Сильная асимптотика решения (6) исследовалась недавно в [64].

Недавно была обнаружена [40] связь аппроксимаций Эрмита — Паде со спектральной теорией на графах. Приложения, связанные с системами Анжелеско, обсуждаются в [3, 41]. Одна из проблем, связанная с аппроксимациями Эрмита — Паде для системы Никишина, рассмотрена в [57]. Применение многоуровневых интерполяций к исследованию матриц Якоби на однородных деревьях рассмотрено в [8]. Это перспективное направление мотивирует наше текущее исследование.

§ 2. Формулировка результатов

2.1. Обобщенная система Никишина на графе-дереве. При определении обобщенной системы Никишина будем следовать обозначениям из работы [15]. Рассмотрим конечный ориентированный граф-дерево с корневой вершиной ω. Пусть $\overline{G}$ — множество всех его вершин, а $G:=\overline{G}\setminus\{\omega\}$ — множе-

ство всех вершин, за исключением корневой. Количество элементов множества G обозначим через $d \geqslant 1$.

Для любой вершины $\alpha \in G$ однозначно определена такая вершина $\alpha_- \in \overline{G}$, что упорядоченная пара (α_-, α) образует ребро графа. Если $\beta = \alpha_-$, то будем говорить, что вершина α *непосредственно следует за* β, и писать $\beta \to \alpha$. Для любой вершины $\beta \in \overline{G}$ определим множество $\beta_+ \subset G$ непосредственно следующих за β вершин: $\beta_+ := \{\alpha \in G \colon \alpha_- = \beta\}$. Вершина β называется *концевой,* если $\beta_+ = \varnothing$. Пару вершин $\alpha, \beta \in G$, $\alpha \neq \beta$, назовем *соседними:* $\alpha \leftrightarrow \beta$, если они непосредственно следуют за одной и той же вершиной, т. е. $\alpha_- = \beta_-$.

Каждой вершине $\alpha \in G$ соответствует единственная цепочка вершин, такая, что

$$\gamma \to \ldots \to \beta \to \alpha, \quad \gamma \in \omega_+.$$

Эту цепочку назовем *определяющей* вершину α, а множество ее элементов обозначим как $g_\alpha := \{\gamma, \ldots, \beta, \alpha\} \subset G$. На множестве $\overline{G}$ определен частичный порядок:

$$\alpha \prec \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_+ \cap g_\beta \neq \varnothing.$$

Корневая вершина ω является наименьшим элементом относительно этого порядка. Для каждого элемента $\alpha \in \overline{G}$ определим множество $\overline{G}_\alpha$ вершин поддерева с корневой вершиной α:

$$\overline{G}_\alpha := G_\alpha \cup \{\alpha\}, \quad G_\alpha := \{\beta \in G \colon \alpha \prec \beta\}.$$

В частности, для корневой вершины имеем $G_\omega = G$.

Будем предполагать, что каждой вершине $\alpha \in G$ поставлены в соответствие отрезок Δ_α вещественной прямой и конечная положительная борелевская мера σ_α с носителем на Δ_α. При этом выполнены следующие условия. Отрезки Δ_α, Δ_β не пересекаются, если $\alpha \to \beta$ или $\alpha \leftrightarrow \beta$. Производная σ'_α абсолютно непрерывной составляющей меры σ_α положительна почти всюду на Δ_α.

Каждой вершине $\alpha \in G$ с определяющей цепочкой $\gamma \to \ldots \to \beta \to \alpha$ поставим в соответствие два объекта:

A) меру $s_\alpha := s_{\gamma,\alpha} := \langle \sigma_\gamma, \ldots, \sigma_\beta, \sigma_\alpha \rangle$ с носителем Δ_γ, где $\gamma \in \omega_+$ и использовано обозначение (5);

B) набор мер Никишина

$$s_{\alpha,\alpha} := \sigma_\alpha, \quad s_{\alpha,\beta} := \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle, \quad \ldots, \quad s_{\alpha,\gamma} := \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \ldots, \sigma_\gamma \rangle,$$

носители которых совпадают и равны Δ_α.

В работе [15] изучались аппроксимации Эрмита—Паде для *обобщенной системы Никишина*, т. е. набора марковских функций $\{\widehat{s}_\alpha \colon \alpha \in G\}$. Рассмотрим мультииндекс $n = \{n_\alpha \colon \alpha \in G\}$, где $n_\alpha \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$|n| := \sum_{\kappa \in G} n_\kappa.$$

Задача A. *Найти набор многочленов* $\{A_{n,\beta}\colon \beta\in\bar{G}\}$, *такой, что* $A_{n,\omega}\not\equiv 0$, $\deg A_{n,\omega}\leqslant |n|$ *и выполнены интерполяционные условия при* $z\to\infty$:

$$(A_{n,\omega}\widehat{s}_\alpha - A_{n,\alpha})(z) = O(z^{-n_\alpha-1}),\quad \alpha\in G. \tag{8}$$

Обсудим два частных случая. Для дерева, у которого все вершины, за исключением корневой, являются концевыми (т. е. $G=\omega_+$), набор $\{\widehat{s}_\alpha\colon \alpha\in G\}$ образует систему Анжелеско. Для дерева, имеющего ровно одну концевую вершину, набор $\{\widehat{s}_\alpha\colon \alpha\in G\}$ образует систему Никишина.

Таким образом, задача A соответствует мерам s_α на G. В настоящей работе мы поставим многоуровневую интерполяционную задачу для второго набора данных на дереве.

2.2. Многоуровневая интерполяционная задача. Для мультииндекса $n=\{n_\alpha\colon \alpha\in G\}$ рассмотрим следующую многоуровневую интерполяционную задачу.

Задача B. *Найти набор многочленов* $\{P_{n,\beta}\colon \beta\in\bar{G}\}$, *такой, что*

$$P_{n,\omega}\not\equiv 0,\quad \deg P_{n,\omega}\leqslant |n|,\quad \deg P_{n,\alpha}<|n|,\quad \alpha\in G,$$

и выполнены интерполяционные соотношения при $z\to\infty$:

$$\Psi_{n,\alpha}(z) := \sum_{\kappa\in g_\alpha} P_{n,\kappa_-}(z)\widehat{s}_{\alpha,\kappa}(z) + P_{n,\alpha}(z) = O(z^{-n_\alpha-1}),\quad \alpha\in G. \tag{9}$$

Решение этой задачи существует. Действительно, многочлены $\{P_{n,\beta}\colon \beta\in\bar{G}\}$ имеют в совокупности $|n|+1+d|n|=(d+1)|n|+1$ неизвестных коэффициентов. Каждое интерполяционное условие (9) задает $|n|+n_\alpha$ линейных однородных уравнений на эти коэффициенты. Таким образом, суммарное число уравнений $(d+1)|n|$ на единицу меньше числа неизвестных и система имеет нетривиальное решение. Покажем, что в любом нетривиальном решении многочлен $P_{n,\omega}$ также нетривиален. Заметим, что $-P_{n,\alpha}$ — это полиномиальная часть разложения функции $\sum_{\kappa\in g_\alpha} P_{n,\kappa_-}\widehat{s}_{\alpha,\kappa}$ в ряд Лорана в бесконечности. В частности, если $P_{n,\omega}\equiv 0$, то $P_{n,\alpha}\equiv 0$ при $\alpha\in\omega_+$. Продолжая это рассуждение, по индукции получим, что если $P_{n,\omega}\equiv 0$, то $P_{n,\alpha}\equiv 0$ для всех $\alpha\in G$. Таким образом, решение многоуровневой интерполяционной задачи существует. Из этого рассуждения также следует, что $\deg P_{n,\alpha}<\deg P_{n,\omega}$ при $\alpha\in G$, т. е. ограничения на степени $P_{n,\alpha}$ в задаче B выполнены автоматически.

Отметим, что интерполяционные условия (9) эквивалентны соотношениям ортогональности на отрезках Δ_α:

$$\int x^k \sum_{\kappa\in g_\alpha} P_{n,\kappa_-}(x)\,ds_{\alpha,\kappa}(x) = 0,\quad k=0,\dots,n_\alpha-1,\quad \alpha\in G.$$

Рассмотрим частные случаи. Если $G=\omega_+$, то задача B с точностью до обозначений совпадает с аппроксимациями Эрмита — Паде для системы Анжелеско $\{\widehat{s}_\alpha\colon \alpha\in G\}$. Для дерева с единственной концевой вершиной порядок $\prec$

становится полным и задача B соответствует многоуровневым интерполяциям (6).

В работе [15] рассматривались только мультииндексы n, удовлетворяющие следующему условию «невозрастания» координат:

$$\text{при } \alpha \prec \beta \text{ выполнено } n_\beta \leqslant n_\alpha + 1. \tag{10}$$

В частности, доказано, что в задаче A все мультииндексы с таким условием являются нормальными. При внимательном рассмотрении оказывается, что схема доказательства в [15] основана на эквивалентности задач A и B. Пусть $l_\alpha := \#g_\alpha$ — число элементов в определяющей цепочке для α, а $l_\omega := 0$. Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть мультииндекс n удовлетворяет условию* (10), *а набор многочленов $\{P_{n,\beta} : \beta \in \overline{G}\}$ является решением задачи* B. *Тогда набор многочленов $\{(-1)^{l_\beta} P_{n,\beta} : \beta \in \overline{G}\}$ является решением задачи* A.

Из этого предложения следует, что решение задачи B единственно с точностью до нормировки для мультииндексов n с условием (10).

2.3. Единственность решения. На самом деле для каждого мультииндекса $n = \{n_\alpha : \alpha \in G\}$ пространство решений многоуровневой интерполяционной задачи одномерно, а степени всех многочленов максимальны. Другими словами, обобщенная система Никишина совершенна для рассматриваемой задачи. Положим для удобства $\Psi_{n,\omega} := P_{n,\omega}$. Всюду в дальнейшем сумму по пустому множеству индексов считаем равной нулю, а произведение по пустому множеству индексов — равным единице. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для каждого мультииндекса $n = \{n_\alpha : \alpha \in G\}$ решение многоуровневой интерполяционной задачи единственно с точностью до нормировки. Более того,* $\deg P_{n,\omega} = |n|$, *а для каждого $\alpha \in G$ выполнены свойства*: $\deg P_{n,\alpha} = |n| - 1$, *линейная форма $\Psi_{n,\alpha}$ имеет ровно $\sum_{\kappa \in G_\alpha} n_\kappa$ нулей в $\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha$, функция Ψ_{n,α_-} имеет ровно $\sum_{\kappa \in \bar{G}_\alpha} n_\kappa$ простых нулей на Δ_α.*

Таким образом, для всякой концевой вершины α линейная форма $\Psi_{n,\alpha}$ в области голоморфности $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_\alpha$ имеет нули только в бесконечности. Для неконцевой вершины $\beta \in \overline{G}$ функция $\Psi_{n,\beta}$ имеет $\sum_{\kappa \in \bar{G}_\alpha} n_\kappa$ простых нулей на отрезке Δ_α для каждого $\alpha \in \beta_+$ и не имеет других конечных нулей в области голоморфности $\mathbb{C} \setminus \Delta_\beta$. В частности, многочлен $P_{n,\omega}$ имеет $|n|$ простых нулей на $\bigcup_{\alpha \in \omega_+} \Delta_\alpha$.

Каждой вершине $\alpha \in G$ поставим в соответствие многочлен $q_{n,\alpha}$ с единичным старшим коэффициентом, все нули которого лежат на Δ_α и совпадают с нулями Ψ_{n,α_-} на этом отрезке:

$$\{q_{n,\alpha} : \alpha \in G\}: \quad \deg q_{n,\alpha} = \sum_{\kappa \in \bar{G}_\alpha} n_\kappa, \quad \frac{\Psi_{n,\alpha_-}(x)}{q_{n,\alpha}(x)} \neq 0, \ \neq \infty, \quad x \in \Delta_\alpha.$$

2.4. Векторная задача равновесия. Рассматриваются конечные неотрицательные борелевские меры ν с компактными носителями в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим $S(\nu) := \operatorname{supp}(\nu)$ — носитель меры ν, $|\nu| := \nu(\mathbb{C})$ — полную вариацию (массу) меры ν. Взаимной энергией мер ν_1 и ν_2 называется значение интеграла

$$I(\nu_1, \nu_2) = \iint \ln \frac{1}{|x-t|} d\nu_1(x) d\nu_2(t) > -\infty.$$

Энергией меры ν называется величина $I(\nu) := I(\nu, \nu)$. Логарифмическим потенциалом меры ν называется супергармоническая функция

$$V^{\nu(z)} = \int \ln \frac{1}{|z-t|} d\nu(t), \quad z \in \mathbb{C},$$

принимающая значения на $(-\infty, \infty]$. Для компакта K в $\mathbb{C}$ и $\tau \geqslant 0$ обозначим через $\mathscr{M}_\tau(K)$ множество всех таких мер ν, что $S(\nu) \subset K$, $|\nu| = \tau$ и $I(\nu) < \infty$. Если $|\nu| = 0$, то $\nu \equiv 0$ и $S(\nu) = \varnothing$. По теореме Рисса и в силу полунепрерывности сверху $I(\cdot)$ множество $\mathscr{M}_\tau(K)$ является компактным в $*$-слабой топологии.

Перейдем к постановке векторной задачи равновесия, соответствующей множеству индексов G. Исходными данными задачи являются:

- набор отрезков вещественной прямой $\Delta := \{\Delta_\alpha : \alpha \in G\}$;
- вектор с неотрицательными координатами $b = \{b_\alpha : \alpha \in G\}$;
- вещественная положительно определенная матрица $\mathscr{C} := (c_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \in G$.

Единственное ограничение, накладываемое на исходные данные, состоит в том, что если $c_{\alpha,\beta} < 0$, то отрезок Δ_α не пересекается с Δ_β: $\Delta_\alpha \cap \Delta_\beta = \varnothing$.

Класс $\mathscr{M}_b(\Delta)$ векторных мер $\mu := \{\mu_\alpha : \alpha \in G\}$ определяется как декартово произведение множеств $\mathscr{M}_{b_\alpha}(\Delta_\alpha)$, т. е. $\mu_\alpha \in \mathscr{M}_{b_\alpha}(\Delta_\alpha)$. Для векторной меры $\mu \in \mathscr{M}_b(\Delta)$ определим функционал энергии

$$J(\mu) := \sum_{\alpha,\beta \in G} c_{\alpha,\beta} I(\mu_\alpha, \mu_\beta)$$

и векторный потенциал $\{W_\alpha^\mu : \alpha \in G\}$, где

$$W_\alpha^\mu(z) := \sum_{\beta \in G} c_{\alpha,\beta} V^{\mu_\beta}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функционал энергии J и множество $\mathscr{M}_b(\Delta)$ являются выпуклыми.

В классе $\mathscr{M}_b(\Delta)$ существует единственная [27, 49] экстремальная мера λ, минимизирующая функционал энергии J:

$$J(\lambda) < J(\mu) \qquad \forall\, \mu \in \mathscr{M}_b(\Delta) \setminus \{\lambda\}.$$

Экстремальная мера λ является [27, 49] единственной мерой в классе $\mathscr{M}_b(\Delta)$, которая удовлетворяет условиям равновесия:

$$W_\alpha^\lambda(x) \begin{cases} = w_\alpha, & x \in S(\lambda_\alpha), \\ \geqslant w_\alpha, & x \in \Delta_\alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in G, \tag{11}$$

где w_α — некоторые постоянные. Меру λ обычно называют *векторной равновесной мерой*, соответствующей исходным данным $(\Delta, b, \mathscr{C})$.

В электростатической интерпретации речь идет о положительных зарядах величины b_α, распределенных на проводниках Δ_α, взаимодействующих друг с другом в соответствии с матрицей $\mathscr{C}$. Равновесное распределение этих зарядов и определяет компоненты λ_α векторной меры λ.

Отметим, что в приложениях возникают и более общие векторные задачи равновесия, например, с полуопределенной матрицей взаимодействия и перетеканием зарядов между проводниками [6, 49], с ограничивающей мерой [32–34], в классе зарядов [25]. Описание конструктивных способов нахождения векторных равновесных мер можно найти в [9, 43].

2.5. Лучевые асимптотики. Зафиксируем произвольное распределение вероятностей $p := \{p_\alpha : \alpha \in G\}$ на множестве G:

$$p_\alpha \geqslant 0, \qquad \sum_{\alpha \in G} p_\alpha = 1.$$

Определим $b = \{b_\alpha : \alpha \in G\}$ как функцию распределения на G:

$$b_\alpha := \sum_{\alpha \in \bar{G}_\alpha} p_\alpha.$$

Коэффициенты симметричной матрицы $\mathscr{C}$ определяются частичным порядком на множестве G:

$$c_{\alpha,\beta} := \begin{cases} 2, & \alpha = \beta, \\ -1, & \alpha \to \beta \ \text{ или } \ \beta \to \alpha, \\ 1, & \alpha \leftrightarrow \beta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим лучевую последовательность $\Lambda_p : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+^d$ мультииндексов n, $|n| \to \infty$, такую, что $\dfrac{n_\alpha}{|n|} \to p_\alpha$. Обозначим через $\mu(q)$ меру, считающую нули произвольного многочлена q:

$$\mu(q) := \sum_{x:\, q(x)=0} \delta_x.$$

Справедлива следующая теорема о сходимости мер, считающих нули многочленов $q_{n,\alpha}$.

Теорема 3. *Справедливы следующие предельные соотношения*:

$$\frac{1}{|n|}\, \mu(q_{n,\alpha}) \xrightarrow{*} \lambda_\alpha, \quad n \in \Lambda_p, \quad \alpha \in G. \tag{13}$$

Остановимся на следствии этой теоремы, которое сразу вытекает из доказательства теоремы 3 и описывает слабую асимптотику многочленов $P_{n,\omega}$ и линейных форм $\Psi_{n,\alpha}$.

Следствие 4. *Справедливы следующие асимптотические формулы для многочленов $P_{n,\omega}$ и линейных форм $\Psi_{n,\alpha}$ при $n \in \Lambda_p$:*

$$\frac{1}{|n|}\ln|P_{n,\omega}| \overset{K}{\rightrightarrows} -\sum_{\kappa\in\omega_+} V^{\lambda_\kappa}, \quad K \Subset \mathbb{C}\setminus\Big(\bigcup_{\kappa\in\omega_+}\Delta_\kappa\Big), \tag{14}$$

$$\frac{1}{|n|}\ln|\Psi_{n,\alpha}| \overset{K}{\rightrightarrows} V^{\lambda_\alpha} - \sum_{\kappa\in\alpha_+} V^{\lambda_\kappa} - \sum_{\kappa\in g_\alpha} w_\alpha, \quad K \Subset \mathbb{C}\setminus\Big(\Delta_\alpha \cup \bigcup_{\kappa\in\alpha_+}\Delta_\kappa\Big), \quad \alpha\in G. \tag{15}$$

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательство предложения 1. Пусть $\{P_{n,\beta} : \beta \in \overline{G}\}$ — решение задачи B для мультииндекса n. Положим

$$\Phi_{n,\alpha} := P_{n,\omega}\widehat{s}_\alpha - (-1)^{l_\alpha}P_{n,\alpha}.$$

Тогда из леммы 2.2 работы [24] вытекает тождество

$$\Phi_{n,\alpha} + (-1)^{l_\alpha}\Psi_{n,\alpha} = \sum_{\kappa\in g_\alpha\setminus\omega_+} (-1)^{l_\kappa}\widehat{s}_{\kappa,\alpha}\Psi_{n,\kappa_-}, \tag{16}$$

где $\widehat{s}_{\kappa,\alpha}$ — преобразование Коши меры $s_{\kappa,\alpha} := \langle\sigma_\kappa, \dots, \sigma_\alpha\rangle$, построенной по цепочке $\kappa \prec \dots \prec \alpha$. Так как для $\{\Psi_{n,\beta} : \beta \in G\}$ выполнены интерполяционные условия (9), то имеем при $z \to \infty$

$$(\Phi_{n,\alpha} + (-1)^{l_\alpha}\Psi_{n,\alpha})(z) = \sum_{\substack{\beta\prec\alpha,\\ \beta\neq\omega}} O(z^{-n_\beta-2}).$$

Тогда для мультииндексов, удовлетворяющих (10), получим $\Phi_{n,\alpha}(z) = O(z^{-n_\alpha-1})$ при $z \to \infty$. Тем самым многочлены $A_{n,\alpha} := (-1)^{l_\alpha}P_{n,\alpha}$ удовлетворяют (8). Что и требовалось проверить. □

Тождество (16) показывает, что функция $\Phi_{n,\alpha}$ является линейной комбинацией функций $\Psi_{n,\beta}$ с коэффициентами, не зависящими от n. Существование такого выражения использовано в работе [15], см. формулу (37) на с. 54.

3.2. Доказательство теоремы 2. Рассматриваются линейные формы $\Psi_{n,\alpha}$, $\alpha \in G$, удовлетворяющие условиям интерполяции (9). Напомним, что по построению функции $\Psi_{n,\alpha}$ голоморфны в области $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta_\alpha$ и вещественно аналитичны на $\mathbb{R}\setminus\Delta_\alpha$.

Пусть $Q_{n,\alpha}$ — многочлен со старшим коэффициентом 1, нули которого совпадают с нулями $\Psi_{n,\alpha}$ в области $\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha$. Другими словами, функция

$$\psi_{n,\alpha} := \frac{\Psi_{n,\alpha}}{Q_{n,\alpha}}, \quad \alpha \in G, \tag{17}$$

голоморфна и не обращается в нуль в области $\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha$. В случае если $\Psi_{n,\alpha}$ не обращается в нуль в $\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha$, положим $Q_{n,\alpha} \equiv 1$. Пусть неотрицательное чис-

ло m_α — это степень многочлена $Q_{n,\alpha}$. Ясно, что $Q_{n,\alpha}$ имеет вещественные коэффициенты и

$$\frac{\Psi_{n,\alpha}(z)}{Q_{n,\alpha}(z)} = O(z^{-m_\alpha - n_\alpha - 1}), \quad z \to \infty.$$

Напомним, что $\Psi_{n,\omega} := P_{n,\omega}$. В основе доказательства теоремы 2 лежит следующее предложение, которое является следствием леммы 2.1 [68].

Предложение 5. *Для всякого $\alpha \in G$ выполнены следующие соотношения*:

$$\frac{\Psi_{n,\alpha}(z)}{Q_{n,\alpha}(z)} = \int \frac{\Psi_{n,\alpha_-}(x)}{z-x} \frac{d\sigma_\alpha(x)}{Q_{n,\alpha}(x)}, \tag{18}$$

$$\int \Psi_{n,\alpha_-}(x) x^k \frac{d\sigma_\alpha(x)}{Q_{n,\alpha}(x)} = 0, \quad 0 \leqslant k < m_\alpha + n_\alpha. \tag{19}$$

Из соотношений ортогональности (19) на отрезке Δ_α относительно знакопостоянного веса $1/Q_{n,\alpha}$ сразу следует, что при $\alpha \in G$ функция Ψ_{n,α_-} имеет по меньшей мере $m_\alpha + n_\alpha$ перемен знака на отрезке Δ_α. Поскольку отрезки $\{\Delta_\alpha : \alpha \in \beta_+\}$ попарно не пересекаются, можем сделать два вывода. Во-первых, для $\beta = \alpha_-$, $\beta \neq \omega$ имеем:

$$\deg Q_{n,\beta} = m_\beta \geqslant \sum_{\alpha \in \beta_+} (m_\alpha + n_\alpha), \quad \beta \in G, \ \beta_+ \neq \varnothing. \tag{20}$$

Во-вторых, при $\alpha_- = \omega$ получаем:

$$\deg P_{n,\omega} \geqslant \sum_{\kappa \in \omega_+} (m_\kappa + n_\kappa). \tag{21}$$

Оценим теперь с помощью (20) каждое m_κ в неравенстве (21) и проитерируем, использовав каждое из неравенств (20). Получим следующее неравенство:

$$\deg P_{n,\omega} \geqslant \sum_{\kappa : \kappa_+ = \varnothing} m_\kappa + \sum_{\kappa \in G} n_\kappa = \sum_{\kappa : \kappa_+ = \varnothing} m_\kappa + |n|.$$

Так как по условию $\deg P_{n,\omega} \leqslant |n|$, то $\deg P_{n,\omega} = |n|$, $m_\alpha = 0$ при $\alpha_+ = \varnothing$ и все неравенства (20) обращаются в равенства:

$$m_\alpha = \sum_{\kappa \in \alpha_+} (m_\kappa + n_\kappa) = \sum_{\kappa \in G_\alpha} n_\kappa, \quad \alpha \in G.$$

Из нашего рассуждения также следует, что при $\alpha \in G$ функция Ψ_{n,α_-} имеет в точности $m_\alpha + n_\alpha = \sum_{\kappa \in \bar{G}_\alpha} n_\kappa$ простых нулей на Δ_α, поскольку всего у нее $\sum_{\kappa \in G_{\alpha_-}} n_\kappa$ конечных нулей. В частности, доказано, что $Q_{n,\beta} = \prod_{\alpha \in \beta_+} q_{n,\alpha}$, $\beta \in G$.

Осталось проверить, что степени остальных многочленов $P_{n,\alpha}$, $\alpha \in G$, максимальны. Из соотношений (9) индукцией вдоль определяющих цепочек нетрудно заключить, что $\deg P_{n,\alpha} = \deg P_{n,\omega} - 1 = |n| - 1$. Таким образом, все утверждения теоремы 2 доказаны. □

3.3. Доказательство теоремы 3. Доказательство основано на следующей лемме Гончара — Рахманова, см. [12, 15].

Лемма 6. *Пусть E — отрезок вещественной оси, σ — конечная положительная борелевская мера на E, $\sigma' > 0$ п.в. на E, а Λ — бесконечная подпоследовательность $\mathbb{N}$. Пусть $\{F_l\}_{l\in\Lambda} \subset C(E)$ — последовательность таких непрерывных функций, что $\frac{1}{l}F_l \overset{E}{\rightrightarrows} F$ при $l \in \Lambda$. Пусть q_l — последовательность ортогональных многочленов с единичным старшим коэффициентом*:

$$\deg q_l = l, \quad \int q_l(x)x^k e^{-F_l(x)}d\sigma(x) = 0, \quad k = 0, \dots, l-1.$$

Тогда

$$\frac{1}{l}\mu(q_l) \xrightarrow{*} \lambda_F, \quad \frac{1}{l}\ln\int q_l^2(x)e^{-F_l(x)}d\sigma(x) \to -v, \quad l \in \Lambda,$$

где λ_F — равновесная мера во внешнем поле F, а v — постоянная равновесия:

$$S(\lambda_F) \subset E, \quad |\lambda_F| = 1, \quad (2V^{\lambda_F} + F)(x) \begin{cases} = v, & x \in S(\lambda_F), \\ \geqslant v, & x \in E. \end{cases}$$

В данной лемме рассматривается последовательность многочленов q_l, ортогональных относительно переменного (т. е. зависящего от l) веса. Дается описание предельного распределения нулей q_l в терминах (единственной) скалярной равновесной во внешнем поле меры $\lambda_F \in \mathscr{M}_1(E)$. Доказательство леммы при более общих предположениях можно найти в [12]. Аналог этой леммы для квазиортогональных многочленов использован в [6]. Комплексный вариант леммы 6 рассмотрен в работе [14]. Задачи равновесия на компактных римановых поверхностях рассмотрены в [37, 38]. Семейства векторных равновесных мер во внешнем поле изучались в [20, 44].

Замечание. Из леммы Гончара — Рахманова сразу следует результат о слабой асимптотике q_l и *функций второго рода* ψ_l:

$$\psi_l(z) := \int \frac{q_l(x)}{z-x}\, e^{-F_l(x)}d\sigma(x) = \frac{1}{q_l(z)}\int \frac{q_l^2(x)}{z-x}\, e^{-F_l(x)}d\sigma(x).$$

Равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C} \setminus E$ справедливы предельные соотношения:

$$\lim_{l\in\Lambda} \frac{1}{l}\ln|q_l| = -V^{\lambda_F}, \quad \lim_{l\in\Lambda} \frac{1}{l}\ln|\psi_l| = V^{\lambda_F} - v.$$

Перейдем к доказательству теоремы 3. Рассмотрим последовательность векторных мер, считающих нули многочленов $q_{n,\alpha}$:

$$\mu_n := \{\mu_{n,\alpha} \colon \alpha \in G\}, \quad n \in \Lambda_p, \quad \mu_{n,\alpha} := \frac{1}{|n|}\,\mu(q_{n,\alpha}).$$

Докажем, что векторная равновесная мера λ, задаваемая (11), является единственной предельной точкой последовательности μ_n в $*$-слабой топологии. Ясно, что отсюда следует сходимость $\mu_{n,\alpha} \xrightarrow{*} \lambda_\alpha$ при $n \in \Lambda_p$ и $\alpha \in G$.

Пусть μ — некоторая предельная точка последовательности μ_n, т. е. для всех $\alpha \in G$ выполнено $\mu_{n,\alpha} \xrightarrow{*} \mu_\alpha$ при $n \in \Lambda'_p$, где Λ'_p — некоторая подпоследова-

тельность Λ_p. В силу теоремы 2 меры μ_n и μ принадлежат классу $\mathscr{M}_b(\Delta)$. Для удобства положим $\mu_\omega := 0$. Требуется доказать, что μ удовлетворяет условиям равновесия:

$$W_\alpha^\mu = 2V^{\mu_\alpha} + \sum_{\beta\colon \alpha\leftrightarrow\beta} V^{\mu_\beta} - \sum_{\beta\colon \alpha\to\beta} V^{\mu_\beta} - V^{\mu_{\alpha_-}} \begin{cases} = w_\alpha, & x\in S(\mu_\alpha),\\ \geqslant w_\alpha, & x\in\Delta_\alpha,\end{cases} \qquad \alpha\in G, \tag{22}$$

которые совпадают с (11), см. (12).

Из сделанного предположения о $*$-слабой сходимости считающих мер вытекают предельные соотношения для многочленов $q_{n,\alpha}$ при $\alpha\in G$:

$$-\frac{1}{|n|}\ln|q_{n,\alpha}| = V^{\mu_{n,\alpha}} \overset{K}{\rightrightarrows} V^{\mu_\alpha}, \quad n\in\Lambda_p', \quad K\Subset\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha. \tag{23}$$

Перепишем соотношения ортогональности (19) в виде:

$$\int q_{n,\alpha}(x)x^k h_{n,\alpha}(x)d\sigma_\alpha(x) = 0, \quad 0\leqslant k < \deg q_{n,\alpha} = \sum_{\kappa\in\overline{G}_\alpha} n_\kappa, \tag{24}$$

где $\alpha\in G$, а функция $h_{n,\alpha}$ является непрерывной и знакопостоянной на отрезке Δ_α:

$$h_{n,\alpha} := \frac{\Psi_{n,\alpha_-}}{q_{n,\alpha}Q_{n,\alpha}} = \psi_{n,\alpha_-}\frac{\prod_{\beta\colon\alpha\leftrightarrow\beta} q_{n,\beta}}{\prod_{\beta\colon\alpha\to\beta} q_{n,\beta}}. \tag{25}$$

В формуле выше предполагается, что $\psi_{n,\omega} := 1$, а при $\alpha\in G$ функции $\psi_{n,\alpha}$ определены в (17). Из (18) и (19) следует, что $\psi_{n,\alpha}$ являются функциями второго рода для ортогональных многочленов $q_{n,\alpha}$:

$$\psi_{n,\alpha}(z) = \int\frac{\Psi_{n,\alpha_-}(x)}{z-x}\frac{d\sigma_\alpha(x)}{Q_{n,\alpha}(x)} = \int\frac{q_{n,\alpha}(x)}{z-x}h_{n,\alpha}d\sigma_\alpha(x) = \frac{1}{q_{n,\alpha}(z)}\int\frac{q_{n,\alpha}^2(x)}{z-x}h_{n,\alpha}d\sigma_\alpha(x).$$

Индукцией по возрастанию α проверим, что выполнены следующие асимптотические формулы

$$-\frac{1}{|n|}\ln|h_{n,\alpha}| \overset{\Delta_\alpha}{\rightrightarrows} \sum_{\beta\colon\alpha\leftrightarrow\beta} V^{\mu_\beta} - \sum_{\beta\colon\alpha\to\beta} V^{\mu_\beta} - V^{\mu_{\alpha_-}} + v_{\alpha_-}, \quad n\in\Lambda_p', \tag{26}$$

$$\frac{1}{|n|}\ln|\psi_{n,\alpha}| \overset{K}{\rightrightarrows} V^{\mu_\alpha} - v_\alpha, \quad n\in\Lambda_p', \quad K\Subset\mathbb{C}\setminus\Delta_\alpha, \tag{27}$$

а также условия равновесия (22) с постоянными $w_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha_-}$, где $v_\omega := 0$ и

$$v_\alpha := -\lim_{n\in\Lambda_p'}\frac{1}{|n|}\ln\int q_{n,\alpha}^2(x)|h_{n,\alpha}(x)|d\sigma_\alpha(x), \quad \alpha\in G. \tag{28}$$

База индукции: $\alpha\in\omega_+$. Так как $\psi_{n,\alpha_-} = 1$, то (26) сразу следует из (25) и (23). Применим к последовательности $q_{n,\alpha}$ лемму Гончара—Рахманова, получим соотношение равновесия (22) для μ_α с постоянной (28). С учетом замечания к лемме имеем также асимптотическую формулу (27) для функции второго рода $\psi_{n,\alpha}$.

Предполагая, что соотношение (27) выполнено для индекса $\alpha_-\neq\omega$, проверим, что соотношения (22), (26), (27) справедливы для индекса α. Асимптоти-

ческая формула (26) следует из определения $h_{n,\alpha}$ и предположения индукции. Условие равновесия (22) для W_α^μ с постоянной $w_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha_}$ вытекает из леммы Гончара — Рахманова. Асимптотическая формула (27) для $\psi_{n,\alpha}$ следует из замечания к лемме.

Таким образом, μ удовлетворяет соотношениям (22) и теорема 3 доказана. □

Список литературы

[1] *Аптекарев А. И.* Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско // Матем. сб. 1988. Т. 136(178), № 1(5). С. 56–84.

[2] *Аптекарев А. И.* Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина // Матем. сб. 1999. Т. 190, № 5. С. 3–44.

[3] *Аптекарев А. И.*, *Денисов С. А.*, *Ятцелев М. Л.* Дискретный оператор Шрёдингера на графе-дереве, потенциалы Анжелеско и их возмущения // Анализ и математическая физика: Сб. статей. М.: МИАН, 2020. С. 5–13. (Труды МИАН; Т. 311).

[4] *Аптекарев А. И.*, *Койэлаарс А. Э.* Аппроксимации Эрмита — Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов // УМН. 2011. Т. 66, вып. 6(402). С. 123–190.

[5] *Аптекарев А. И.*, *Лопес Лагомасино Г.*, *Мартинес-Финкельштейн А.* О системах Никишина с дискретными компонентами и слабой асимптотике многочленов совместной ортогональности // УМН. 2017. Т. 72, вып. 3(435). С. 3–64.

[6] *Аптекарев А. И.*, *Лысов В. Г.* Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита — Паде // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 2. С. 29–78.

[7] *Аптекарев А. И.*, *Лысов В. Г.*, *Туляков Д. Н.* Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 2. С. 3–56.

[8] *Аптекарев А. И.*, *Лысов В. Г.* Многоуровневая интерполяция системы Никишина и ограниченность матриц Якоби на бинарном дереве // УМН. 2021. Т. 76, вып. 4(460). С. 179–180.

[9] *Боголюбский А. И.*, *Лысов В. Г.* О конструктивном решении одной векторной задачи равновесия // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 491. С. 15–18.

[10] *Гончар А. А.* О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Матем. сб. 1978. Т. 105(147), № 2. С. 147–163.

[11] *Гончар А. А.*, *Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Тр. МИАН СССР. 1981. Т. 157. С. 31–48.

[12] *Гончар А. А.*, *Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Матем. сб. 1984. Т. 125(167), № 1(9). С. 117–127.

[13] *Гончар А. А.*, *Рахманов Е. А.* О задаче равновесия для векторных потенциалов // УМН. 1985. Т. 40, вып. 4(244). С. 155–156.

[14] *Гончар А. А.*, *Рахманов Е. А.* Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134(176), № 3(11). С. 306–352.

[15] *Гончар А. А.*, *Рахманов Е. А.*, *Сорокин В. Н.* Об аппроксимациях Эрмита — Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 5. С. 33–58.

[16] *Икономов Н. Р.*, *Суетин С. П.* Скалярная задача равновесия и предельное распределение нулей полиномов Эрмита — Паде II типа // Современные проблемы математической и теоретической физики: Сб. статей. М.: МИАН, 2020. С. 174–197. (Труды МИАН; Т. 309).

[17] *Калягин В. А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Матем. сб. 1979. Т. 110(152), № 4(12). С. 609–627.

[18] *Комлов А. В.* Полиномиальная m-система Эрмита — Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 12. С. 40–76.

[19] *Комлов А. В.*, *Пальвелев Р. В.*, *Суетин С. П.*, *Чирка Е. М.* Аппроксимации Эрмита — Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности // УМН. 2017. Т. 72, вып. 4(436). С. 95–130.

[20] *Лапик М. А.* О семействах векторных мер, равновесных во внешнем поле // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 2. С. 41–56.

[21] *Лопатин И. А.* Об обобщении скалярного подхода к задаче о распределении нулей полиномов Эрмита — Паде для системы Никишина // Матем. сб. 2022. Т. 213 (в печати).

[22] *Лопес Лагомасино Г.*, *Ван Ассе В.* Метод задачи Римана — Гильберта в применении к системе Никишина // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 7. С. 106–138.

[23] *Лысов В. Г.* Сильная асимптотика аппроксимаций Эрмита — Паде для системы стилтьесовских функций с весом Лагерра // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 12. С. 99–122.

[24] *Лысов В. Г.* Аппроксимации Эрмита — Паде смешанного типа для системы Никишина // Анализ и математическая физика: Сб. статей. М.: МИАН, 2020. С. 213–227. (Труды МИАН; Т. 311).

[25] *Лысов В. Г.*, *Туляков Д. Н.* О векторной теоретико-потенциальной задаче равновесия с матрицей Анжелеско // Комплексный анализ и его приложения: Сб. статей. М.: Наука, 2017. С. 185–215. (Труды МИАН; Т. 298).

[26] *Никишин Е. М.* О совместных аппроксимациях Паде // Матем. сб. 1980. Т. 113(155), № 4(12). С. 499–519.

[27] *Никишин Е. М.*, *Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

[28] *Рахманов Е. А.* Распределение нулей полиномов Эрмита — Паде в случае Анжелеско // УМН. 2018. Т. 73, вып. 3(441). С. 89–156.

[29] *Рахманов Е. А.*, *Суетин С. П.* Распределение нулей полиномов Эрмита — Паде для пары функций, образующей систему Никишина // Матем. сб. 2013. V. 204, № 9. P. 115–160.

[30] *Сорокин В. Н.* Циклические графы и теорема Апери // УМН. 2002. Т. 57, вып. 3(345). С. 99–134.

[31] *Сорокин В. Н.* Об интеграле Салихова // Тр. ММО. 2016. Т. 77, вып. 1. С. 131–154.

[32] *Сорокин В. Н.* Многоточечные аппроксимации Эрмита — Паде для трех бета-функций // Тр. ММО. 2018. Т. 79, вып. 1. С. 133–153.

[33] *Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита — Паде функции Вейля и ее производной для дискретных мер // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 10. С. 139–156.

[34] *Сорокин В. Н.* Об одном обобщении дискретной формулы Родрига для многочленов Мейкснера // Матем. сб. 2022. Т. 213, № 11. С. 79–101.

[35] *Суетин С. П.* О новом подходе к задаче о распределении нулей полиномов Эрмита — Паде для системы Никишина // Комплексный анализ, математическая физика и приложения: Сб. статей М.: Наука, 2018. С. 259–275. (Тр. МИАН; Т. 301).

[36] *Суетин С. П.* Об эквивалентности скалярной и векторной задач равновесия для пары функций, образующей систему Никишина // Матем. заметки. 2019. Т. 106, вып. 6. С. 904–916.

[37] *Чирка Е. М.* Равновесные меры на компактной римановой поверхности // Математическая физика и приложения: Сб. статей. М.: МИАН, 2019. С. 313–351. (Труды МИАН; Т. 306).

[38] *Чирка Е. М.* Теория потенциала и комплексный анализ на компактной римановой поверхности. М.: МИАН, 2022 (в печати).

[39] *Angelesco A.* Sur deux extensions des fractions continues algébriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1919. V. 168. P. 262–265.

[40] *Aptekarev A. I.*, *Denisov S. A.*, *Yattselev M. L.* Self-adjoint Jacobi matrices on trees and multiple orthogonal polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 2020. V. 373, № 2. P. 875–917.

[41] *Aptekarev A. I.*, *Denisov S. A.*, *Yattselev M. L.* Jacobi matrices on trees generated by Angelesco system: asymptotics of coefficients and essential spectrum // J. Spectral Theory. 2021. V. 11, № 4. P. 1511–1597.

[42] *Aptekarev A. I.*, *Kalyagin V. A.*, *López Lagomasino G.*, *Rocha I. A.* On the limit behavior of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials // J. Approx. Theory. 2006. V. 139, № 1–2. P. 346–370.

[43] *Aptekarev A. I.*, *Kalyagin V. A.*, *Lysov V. G.*, *Toulyakov D. N.* Equilibrium of vector potentials and uniformization of the algebraic curves of genus 0 // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 233, № 3. P. 602–616.

[44] *Aptekarev A. I.*, *Lapik M. A.*, *Lysov V. G.* Direct and inverse problems for vector logarithmic potentials with external fields // Anal. Math. Phys. 2019. V. 9, № 3. P. 919–935.

[45] *Van Assche W.*, *Geronimo J. S.*, *Kuijlaars A. B. J.* Riemann — Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials // Special functions 2000: current perspective and future directions. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 23–59. (NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.; V. 30).

[46] *Van Assche W.*, *Geronimo J. S.*, *Iliev P.* Alpert multiwavelets and Legendre — Angelesco multiple orthogonal polynomials // SIAM J. Math. Anal. 2017. V. 49, № 1. P. 626–645.

[47] *Van Assche W.*, *Leurs M.* Jacobi — Angelesco multiple orthogonal polynomials on an r-star // Constr. Approx. 2020. V. 51, № 2. P. 353–381.

[48] *Van Assche W.*, *Martínez-Finkelshtein A.* What is... a multiple orthogonal polynomial? // Notices Amer. Math. Soc. 2016. V. 63, № 9. P. 1029–1031.

[49] *Beckermann B.*, *Kalyagin V.*, *Matos A. C.*, *Wielonsky F.* Equilibrium problems for vector potentials with semidefinite interaction matrices and constrained masses // Constr. Approx. 2013. V. 37, № 1. P. 101–134.

[50] *Bertola M.*, *Gekhtman M.*, *Szmigielski J.* The Cauchy two-matrix model // Comm. Math. Phys. 2009. V. 287, № 3. P. 983–1014.

[51] *Bertola M.*, *Gekhtman M.*, *Szmigielski J.* Cauchy biorthogonal polynomials // J. Approx. Theory. 2010. V. 162, № 4. P. 832–867.

[52] *Bertola M.*, *Gekhtman M.*, *Szmigielski J.* Strong asymptotics for Cauchy biorthogonal polynomials with application to the Cauchy two-matrix model // J. Math. Phys. 2013. V. 54, № 4. 043517.

[53] *Bertola M.*, *Bothner T.* Universality conjecture and results for a model of several coupled positive-definite matrices // Comm. Math. Phys. 2015. V. 337, № 3. P. 1077–1141.

[54] *Criado del Rey J. G.*, *Kuijlaars A. B. J.* A vector equilibrium problem for symmetrically located point charges on a sphere // Constr. Approx. 2022. V. 55, № 3. P. 775–827.

[55] *Degasperis A.*, *Procesi M.* Asymptotic integrability. Symmetry and perturbation theory (Rome, 1998). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1999. P. 23–37.

[56] *Delvaux S.*, *Kuijlaars A. B. J.* A graph-based equilibrium problem for the limiting distribution of non-intersecting Brownian motions at low temperature // Constr. Approx. 2010. V. 32, № 3. P. 467–512.

[57] *Denisov S. A.*, *Yattselev M. L.* Spectral theory of Jacobi matrices on trees whose coefficients are generated by multiple orthogonality // Adv. Math. 2022. V. 396. 108114.

[58] *Hardy A.*, *Kuijlaars A. B. J.* Weakly admissible vector equilibrium problems // J. Approx. Theory. 2013. V. 170. P. 44–58.

[59] *Fidalgo Prieto U.*, *López García A.*, *López Lagomasino G.*, *Sorokin V. N.* Mixed type multiple orthogonal polynomials for two Nikishin systems // Constr. Approx. 2010. V. 32, № 2. P. 255–306.

[60] *Fidalgo Prieto U.*, *López Lagomasino G.* Nikishin systems are perfect // Constr. Approx. 2011. V. 34, № 3. P. 297–356.

[61] *Fidalgo U.*, *López Lagomasino G.*, *Medina Peralta S.* Asymptotic of Cauchy biorthogonal polynomials // Mediterr. J. Math. 2020. V. 17, № 1. 22.

[62] *González Ricardo L. G.*, *López Lagomasino G.* Strong asymptotic of Cauchy biorthogonal polynomials and orthogonal polynomials with varying measure // Constr. Approx. 2022 (в печати).

[63] *González Ricardo L. G.*, *López Lagomasino G.*, *Medina Peralta S.* Logarithmic asymptotic of multi-level Hermite — Padé polynomials // Integral Transform. Spec. Funct. 2021. V. 32, № 5–8. P. 493–511.

[64] *González Ricardo L. G.*, *López Lagomasino G.*, *Medina Peralta S.* On the convergence of multi-level Hermite — Padé approximants // Phys. D. 2022. V. 440. 133487.

[65] *Kuijlaars A. B. J.* Multiple orthogonal polynomial ensembles // Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory. Providence, RI: AMS, 2010. P. 155–176. (Contemporary Mathematics; V. 507).

[66] *Kuijlaars A. B. J.* A vector equilibrium problem for the Muttalib — Borodin biorthogonal ensemble // SIGMA. 2016. V. 12. 065.
[67] *Kuijlaars A. B. J.*, *Román P.* Recurrence relations and vector equilibrium problems arising from a model of non-intersecting squared Bessel paths // J. Approx. Theory. 2010. V. 162. P. 2048–2077.
[68] *López Lagomasino G.*, *Medina Peralta S.* On the convergence of type I Hermite — Padé approximants // Adv. Math. 2015. V. 273. P. 124–148.
[69] *López Lagomasino G.*, *Medina Peralta S.*, *Szmigielski J.* Mixed type Hermite — Padé approximation inspired by the Degasperis — Procesi equation // Adv. Math. 2019. V. 349. P. 813–838.
[70] *Lysov V.*, *Wielonsky F.* Strong asymptotics for multiple Laguerre polynomials // Constr. Approx. 2008. V. 28, № 1. P. 61–111.
[71] *Mahler K.* Perfect systems // Compos. Math. 1968. V. 19. P. 95–166.
[72] *Markoff A.* Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues // Acta Math. 1895. V. 19, № 1. P. 93–104.
[73] *Martínez-Finkelshtein A.*, *Silva G. L. F.* Critical measures for vector energy: asymptotics of non-diagonal multiple orthogonal polynomials for a cubic weight // Adv. Math. 2019. V. 349. P. 246–315.
[74] *Yattselev M.* Strong asymptotics of Hermite — Padé approximants for Angelesco systems // Canad. J. Math. 2016. V. 68(5). P. 1159–1200.

Владимир Генрихович Лысов
ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
E-mail: v.g.lysov@gmail.com

Представлено в редакцию 12.08.2022