P. V. Khrapov, Cluster expansion and spectrum of the transfer matrix of the two-dimensional ising model with strong external field, *TMF*, 1984, Volume 60, Number 1, 154–155

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 1
июль, 1984

КЛАСТЕРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И СПЕКТР ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ 2-МЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА С БОЛЬШИМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Храпов П. В.

Получена кластерная структура и исследованы старшие ветви спектра трансфер-матрицы 2-мерной модели Изинга с большим внешним полем.

Рассмотрим 2-мерную модель Изинга с гамильтонианом в объеме Λ:

$$H_\Lambda=-\Big(\beta\sum_{|t-t'|=1}\sigma_t\sigma_{t'}+h\sum_{t\in\Lambda}\sigma_t\Big),\qquad t,\ t'\in\Lambda,\qquad |\Lambda|<\infty. \tag{1}$$

Эту модель несложно редуцировать к контурной модели на двойственной решетке [1, с. 27]; с весами $k_\Gamma=\exp(-2\beta|\partial\Gamma|-2h|\Gamma|)$, где Γ—1-связный набор точек (т. е. для любых t', $t''\in\Gamma$ существует набор точек $t_1=t'$, $t_2,\dots$ $\dots, t_n=t''$ такой, что $t_i\in\Gamma$, $|t_i-t_{i+1}|=1$, $i=1,\dots,n$), $|\partial\Gamma|$ — число ребер, являющихся границей Γ на двойственной решетке, $|\Gamma|$ — число точек в Γ. Определим гиббсовскую меру на совокупности контуров в объеме Λ. Введем вертикальное направление по оси x^2.

Пусть X — множество конфигураций отрезков, высекаемых контурами Γ_j на всех горизонтальных прямых Z^2, X_k — на k-й, $k=0, \pm1,\dots$, $\mathscr{M}_k$ — множество конечных наборов непересекающихся отрезков на k-й горизонтальной прямой. Введем $\mathscr{L}_2(X, \mathfrak{B}, \mu)$ — пространство функционалов на X, квадратично суммируемых по предельной гиббсовской мере μ, $\mathscr{H}_\Phi\subset\mathscr{L}_2(X, \mathfrak{B}, \mu)$ — пространство функционалов, зависящих от конфигурации отрезков на нулевом горизонтальном слое. Определим трансфер-матрицу $\mathscr{T}$ в $\mathscr{H}_\Phi$: $\mathscr{T}f=P_{\mathscr{H}_\Phi}U_1f$, $f\in\mathscr{H}_\Phi$, где U_1 — оператор сдвига на единицу по вертикали, $P_{\mathscr{H}_\Phi}$— оператор ортогонального проектирования в $\mathscr{L}_2(X, \mathfrak{B}, \mu)$ на $\mathscr{H}_\Phi$.

Пусть $$\xi_{T_0}=\frac{\chi_{T_0}-\langle\chi_{T_0}|\mathscr{A}_{T_0}\rangle}{(\langle\chi_{T_0}|\mathscr{A}_{T_0}{}^*\rangle-\langle\langle\chi_{T_0}|\mathscr{A}_{T_0}\rangle^2|\mathscr{A}_{T_0}{}^*\rangle)^{1/2}},$$

где $\mathscr{A}_{T_0}$ (соответственно $\mathscr{A}_{T_0}{}^*$) — σ-алгебры, порожденные отрезками, которые младше в каком-то полном упорядочении T_0 (соответственно младше и не пересекаются с T_0); χ_T — характеристическая функция отрезка T.

Пример полного упорядочения: T_1 меньше T_2, если правый конец T_1 левее правого конца T_2, а если правые концы совпадают, что аналогично упорядочиваем по левым концам.

Теорема 1. *Для модели Изинга с гамильтонианом* (1) *при достаточно больших* $h=h(\beta)$, $\beta\in R$, в $\mathscr{H}_\Phi$ *с ортогональным базисом*

$\xi_I=\prod_{T\in I}\xi_T$, $\quad I\in\mathscr{M}_0$ *матричные элементы трансфер-матрицы равны*

$$a_{I,I'}=\langle\xi_I\xi_{U_1I'}\rangle=\sum\omega(J_1)\dots\omega(J_k),$$

где суммирование ведется по всем разбиениям множества отрезков $I\cup$ $\cup U_1 I'$, *и* $|\omega(J)|\leqslant(Ce^{-h})^{|J|}\varkappa(h)^{d_J}$, *где* d_J — *длина минимального графа из точек, делающего* J *1-связным множеством,* $|J|=\sum_{T_i\in J}|T_i|$, $|T|$ — *число точек* $t\in T$ *решетки* Z^2, $\varkappa(h)\underset{h\to\infty}{\to}0$. *Для* $a_{t,\,t}$ *можно написать более точную оценку* $a_{t,\,t}=e^{-2h}e^{-4\beta}(1-e^{-4\beta})+o(e^{-2h})$.

Идея исследования спектра трансфер-матрицы восходит к работе [2] и развита в работах [3]. Из теоремы 1, опираясь на статьи [2—3], а также на доклады В. А. Малышева, Р. А. Минлоса, П. В. Храпова «Отсутствие одночастичных подпространств в спектре трансфер-матрицы некоторых контурных моделей» и П. В. Храпова «Кластерные свойства и связанные состояния трансфер-матриц решетчатых моделей статистической физики и квантовой теории поля» на VI Международном симпозиуме по теории информации, нетрудно получить следующую теорему.

Теорема 2. *Для модели Изинга при достаточно больших* $h=h(\beta)$ *существует одночастичное инвариантное подпространство* $\mathcal{H}_0$ *трансфер-матрицы* $\mathcal{F}$ *со спектром* $a(\lambda)=K_0e^{-2h}e^{-4\beta}(1-e^{-4\beta})+o(e^{-2h})$, *где* K_0 — *некоторая абсолютная константа,* $K_0\sim1$. *В ортогональном дополнении к* $\mathcal{H}_0$ *норма трансфер-матрицы* $\mathcal{F}$ *допускает оценку* $\|\mathcal{F}\|<(Ce^{-2h})^{\alpha}$, $\alpha>1$, C — *некоторая константа. Таким образом, при достаточно больших* $h=h(\beta)$ *спектр* $\mathcal{F}$ *в* $\mathcal{H}_0$ *отделен от его спектра в ортогональном дополнении.*

Полученная кластерная структура трансфер-матрицы позволяет исследовать и k-частичные подпространства со спектрами меньших порядков, чем $a(\lambda)$, $k=1, 2, \ldots$.

Совершенно аналогичные результаты получаются для 2-мерных контурных моделей прямоугольников (внешних или обычных). В модели внешних прямоугольников все прямоугольники лежат один вне другого; обычная модель прямоугольников аналогична редуцированной модели Изинга (см. начало заметки), в которой граница каждого контура состоит из набора непересекающихся прямоугольников. В обеих моделях вес каждого контура $k_\tau=\lambda_1^{|\partial\Gamma|}\lambda_2^{|\Gamma|}$, λ_1 соответствует $e^{-2\beta}$, λ_2 соответствует e^{-2h}.

Автор благодарит Р. А. Минлоса за полезные обсуждения рассмотренной задачи.

Литература

[1] *Малышев В. А.* Элементарное введение в математическую физику бесконечночастичных систем. Препринт Р17-83-363, Дубна: ОИЯИ, 1983.
[2] *Минлос Р. А., Синай Я. Г.*— ТМФ, 1970, *2*, № 2, 230—243.
[3] *Malyshev V. A., Minlos R. A.*— J. Stat. Phys., 1979, *21*, № 3, 231—242; Commun. Math. Phys., 1981, *82*, 211—226.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
27.II.1984 г.

CLUSTER EXPANSION AND SPECTRUM OF TRANSFER-MATRIX IN TWO-DIMENSIONAL ISING MODEL WITH A LARGE EXTERNAL FIELD

Khrapov P. V.

Cluster structure is obtained and senior branches in the spectrum of transfer-matrix are investigated in two-dimensional Ising model with a large external field.