С. Г. Колесников, Автоморфизмы силовских p-подгрупп групп Шевалле, определенных над кольцами вычетов целых чисел, *Алгебра и логика*, 2004, том 43, номер 1, 32–59

Алгебра и логика, 43, N 1 (2004), 32—59

УДК 512.544.3

АВТОМОРФИЗМЫ СИЛОВСКИХ p-ПОДГРУПП ГРУПП ШЕВАЛЛЕ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НАД КОЛЬЦАМИ ВЫЧЕТОВ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ*)

С. Г. КОЛЕСНИКОВ

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней нормального типа. Обозначим через $S\Phi(Z_{p^m})$ силовскую p-подгруппу группы Шевалле $G\Phi(Z_{p^m})$ типа Φ над кольцом Z_{p^m} классов вычетов целых чисел по p^m-примарному модулю. Ее автоморфизмы изучены при $m = 1$ в [1—3]. В настоящей работе описываются автоморфизмы группы $S\Phi(Z_{p^m})$ для произвольных системы корней Φ и целого числа $m > 1$ при условии, что $p > 3$. Показывается (теор. 1 и 2), что при данных ограничениях всякий автоморфизм группы $S\Phi(Z_{p^m})$ является произведением стандартных — внутреннего, графового, диагонального и центрального — автоморфизмов, а также явно указанных специальных автоморфизмов порядка p. Полученные теоремы дают ответ (при условии $p > 3$) на вопрос 12.42 В. М. Левчука из [4]: получить описание автоморфизмов силовской p-подгруппы группы Шевалле нормального типа над кольцом вычетов целых чисел по модулю p^m, где $m \geqslant 2$, а p — простое число.

§ 1. Порождающие множества и характеристические подгруппы группы $S\Phi(Z_{p^m})$

В этом параграфе приводятся порождающие множества и определяющие соотношения группы $S\Phi(Z_{p^m})$, а также порождающие множества

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект N 99-01-01256.

некоторых ее подгрупп. Доказывается характеристичность конгруэнц-подгрупп. В заключении параграфа определяются графовые, диагональные и центральные автоморфизмы группы $S\Phi(Z_{p^m})$, которые вместе с внутренними обычно называют *стандартными*.

Зафиксируем некоторые обозначения. Пусть Φ — система корней одного из классических A_n, B_n, C_n, D_n или исключительных E_6,E_7,E_8,F_4,G_2 типов, $\Pi(\Phi)$ — подмножество простых корней из Φ. Положим $p(A_1) = 2$, а $p(\Phi) = \max\{(r,r)/(s,s) \mid r,s \in \Phi\}$ для Φ ранга больше 1. Подмножества положительных и отрицательных корней из Φ обозначим через Φ^+ и Φ^- соответственно, и пусть $\Phi_0 = \Phi \cup \{0\}$.

Далее, определим функцию $f : \Phi_0 \times N \to N \cup \{0\}$, положив $f(r,k) = -[(ht(r) - k)/h]$, где h — число Кокстера системы корней Φ, $ht(r)$ — функция высоты корня, $ht(0) = 0$, $[\cdot]$ — целая часть числа. Пусть также $K = Z_{p^m}$ — кольцо классов вычетов целых чисел по модулю p^m (p — простое число, $m \geqslant 1$), а $J^i = (p^i)$ — идеалы кольца K.

Как следует из [5], силовская p-подгруппа $S\Phi(K)$ порождается подгруппами $X_r = X_r(J^{f(r,1)})$ и $H_r = H_r(1 + J^{f(0,1)})$, элементы $x_r(t)$ и $h_r(v)$ которых связаны следующими определяющими соотношениями:

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u), \tag{1}$$

$$h_r(w)h_r(v) = h_r(wv), \tag{2}$$

$$[x_r(t), h_s(w)] = x_r(tw^{(h_{\bar{s}},r)} - t), \tag{3}$$

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0, ir+js\in\Phi} x_{ir+js}(c_{ij,rs}(-t)^i u^j), \tag{4}$$

$$[x_r(t), x_{-r}(u)] = x_r(c^{-1}t^2u)h_r(c)x_{-r}(-c^{-1}tu^2),\ c = 1 - tu, \tag{5}$$

здесь $h_{\bar{s}} = 2s/(s,s)$ — ко-корень, соответствующий корню $s \in \Phi$, а числа $c_{ij,rs}$ выражаются через структурные константы N_{rs} алгебры Ли типа Φ и вместе с ними являются делителями числа $p(\Phi)!$.

Пусть $r_1, \ldots, r_n$ — множество всех простых корней из Φ, а r_0 — корень максимальной высоты. Для любого $r \in \Phi$ положим $x_r = x_r(1)$ и $h_r = h_r(1-p)$.

ЛЕММА 1. *Если* $p(\Phi)!\cdot K = K$, *то* $S\Phi(K) = \text{гр}\langle x_{r_1}, \dots, x_{r_n}, x_{-r_0}(p)\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через T подгруппу, порожденную элементами $x_{r_1}, \dots, x_{r_n}, x_{-r_0}(p)$, и покажем, что она совпадает с $S\Phi(K)$. Согласно [5] группа $S\Phi(K)$ допускает следующую факторизацию:

$$S\Phi(K) = U\Phi^+(K) \cdot H(J) \cdot U\Phi^-(J), \tag{6}$$

где $U\Phi^+(K)$ и $U\Phi^-(J)$ — унипотентные подгруппы, $H(J)$ — диагональная подгруппа (она порождается элементами $h_{r_i}(1-u)$, $u \in J$). Достаточно показать, что каждая из подгрупп $U\Phi^+(K)$, $U\Phi^-(J)$ и $H(J)$ лежит в T.

Включение $U\Phi^+(K)$ в T докажем индукцией по высоте корня. Кольцо K порождается элементом 1, поэтому включение подгрупп X_{r_i} в T очевидно. Предположим, что для всех положительных корней q высоты меньше k, $1 < k < h$, включение $X_q \subset T$ уже доказано и пусть s — произвольный корень высоты k. Выберем простой корень r так, чтобы разность $s-r$ лежала в Φ. Поскольку $ht(s-r) < ht(s)$, а константы из (4) являются делителями числа $p(\Phi)!$, которое предполагается обратимым в K, то

$$X_s \subseteq \text{гр}\langle [X_{s-r}, X_r], [X_{s-r}, X_r, X_r], [X_{s-r}, X_r, X_{s-r}]\rangle \subset T,$$

если $\Phi \neq G_2$. Включение $X_s \subset T$ доказывается аналогично и для случая $\Phi = G_2$. По определению $U\Phi^+(K)$ порождается подгруппами X_s, $s \in \Phi^+$, значит, $U\Phi^+(K) \subset T$. Аналогично устанавливается включение $U\Phi^-(J) \subset \subset T$.

Включение в T элементов $h_{r_i}(1-u)$, а значит, и подгруппы $H(J)$, легко проверяется, если соотношение (5) преобразовать к виду

$$h_r(1-ut) = x_r(-ut^2(1-ut)^{-1})[x_r(t), x_{-r}(u)]x_{-r}(tu^2(1-tu)^{-1}) \tag{7}$$

и положить $t = 1$, $r = r_i$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $p(\Phi)! \cdot K = K$, *то* $U\Phi^+(K) = \text{гр}\langle x_{r_1}, \dots, x_{r_n}\rangle$.

Рассмотрим некоторые характеристические подгруппы в $S\Phi(K)$. Очевидно, члены нижнего центрального ряда являются такими. В [5] показано: если $p(\Phi)! \cdot K = K$, то i-й централ группы $S\Phi(K)$ имеет вид

$$\Gamma_i(S\Phi(K)) = \langle x_r(t), h_r(1+u) \mid r \in \Phi,\ t \in J^{f(r,i)},\ u \in J^{f(0,i)}\rangle.$$

Покажем, что конгруэнц-подгруппа уровня i

$$\Phi(J^i) = \langle x_r(t), h_r(1+u) \mid r \in \Phi,\, t, u \in J^i \rangle$$

также является характеристической при $i = 1, 2, \ldots$, если число $p(\Phi)!$ обратимо в K.

ЛЕММА 2. *Если $p(\Phi)! \cdot K = K$, то $\Phi(J)$ является характеристической подгруппой в группе $G = S\Phi(K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что подгруппа $\Phi(J)$ совпадает с централизатором характеристической подгруппы $T = \Gamma_{(m-1)h}(G) = U\Phi^+(J^{m-1}) \cdot H(J^{m-1})$. Отсюда подгруппа $\Phi(J)$ будет характеристической, так как централизатор характеристической подгруппы также является характеристической подгруппой.

Включение $\Phi(J) \subseteq C_G(T)$ легко следует из коммутаторных соотношений (3)—(5). Проверим обратное включение. Пусть $c = x_{s_1}(t_1) \ldots x_{s_k}(t_k)a$ (здесь $s_i \in \Phi^+$, $t_i \in K$, $a \in \Phi(J)$) — произвольный элемент из $C_G(T)$, а $g = h_q(1+u)$ — неединичный элемент из T. Тогда

$$c^g = x_{s_1}(t_1(1+u)^{(h_{\bar{q}}, s_1)}) \ldots x_{s_k}(t_k(1+u)^{(h_{\bar{q}}, s_k)})a.$$

Последнее означает, что элемент c перестановочен с g в том и только том случае, если для любых $i = 1, \ldots, k$ и при любом выборе корня q выполняются равенства $t_i = t_i(1+u)^{(h_{\bar{q}}, s_i)}$. Зафиксируем i и выберем корень q так, чтобы $(h_{\bar{q}}, s_i) \neq 0$. Поскольку $u^2 = 0$, то $t_i(1+u)^{(h_{\bar{q}}, s_i)} - t_i = t_i u (h_{\bar{q}}, s_i) = 0$. Последнее возможно только при $t_i \in J$, так как $u \in J^{m-1}$ и $u \neq 0$, а $(h_{\bar{q}}, s_i)$ является делителем $p(\Phi)!$ и, следовательно, обратимо в K. Таким образом, $c \in \Phi(J)$, а значит, $\Phi(J) = C_G(T)$. Лемма доказана.

В силу леммы 2 и равенства $[\Phi(J^{i-1}), \Phi(J)] = \Phi(J^i)$ (см., напр., [5]) подгруппы $\Phi(J^i)$, $i = 2, 3, \ldots$, будут характеристическими.

Рассмотрим стандартные автоморфизмы группы $S\Phi(K)$.

Обозначим через ρ линейное преобразование пространства, порожденного всеми корнями, индуцированное симметрией диаграммы Дынкина системы корней Φ. Известно [2, 3], что отображение Γ_Φ, действие которого на корневых элементах определяется равенством $\Gamma_\Phi(x_r(t)) =$

$= x_{\rho(r)}(\gamma_r t)$ ($r \in \Phi^+$, $\gamma_r = \pm 1$), продолжается до автоморфизма группы $U\Phi^+(K)$. Этот автоморфизм называется *графовым.* Он продолжается на группу $S\Phi(K)$, если положить $\Gamma_\Phi(x_{-r}(t)) = x_{-r}(\gamma_r t)$.

Пусть χ — гомоморфизм целочисленной решетки системы корней Φ в мультипликативную группу кольца K. Отображение, действующее тождественно на диагональной подгруппе и переводящее элементы $x_r(t)$ в $x_r(\chi(r)t)$, является автоморфизмом, который называется *диагональным.*

Центральным называется автоморфизм, тождественный по модулю центра группы и отличный от внутреннего, а центр группы $S\Phi(K)$ при условии $p(\Phi)! \cdot K = K$ совпадает с подгруппой $X_{r_0}(J^{m-1})$.

Пусть $r \in \Phi$ и $\lambda \in K$. Обозначим через C_r^λ отображение группы $S\Phi(K)$ в себя, которое элементы $x_r(t)$ переводит в $x_r(t)x_{r_0}(\lambda t)$, а элементы корневых подгрупп, отличных от X_r, оставляет на месте. Очевидно, имеет место

ЛЕММА 3. *Отображение C_r^λ продолжается до центрального автоморфизма группы $S\Phi(K)$, если либо $r = -r_0$ и $\lambda \in J^{m-2}$, либо $r = r_i$, $\lambda \in J^{m-1}$ и $r_0 - r \notin \Phi$.*

Обозначим через I_g, d_χ и Γ_Φ соответственно внутренний, диагональный и графовый автоморфизмы. Справедливы следующие соотношения:

$$d_\chi I_g d_\chi^{-1} = I_{d_\chi(g)}, \quad \Gamma_\Phi I_g \Gamma_\Phi^{-1} = I_{\Gamma_\Phi(g)}, \quad \Gamma_\Phi d_\chi \Gamma_\Phi^{-1} = d_{\chi'}. \tag{8}$$

§ 2. Автоморфизмы L_s^λ и Q_r^μ группы $S\Phi(K)$

Изучение группы $\mathrm{Aut}(S\Phi(K))$ начнем с описания автоморфизмов, действующих тождественно по модулю конгруэнц-подгруппы $\Phi(J^{m-1})$ и тривиально на элементах подгруппы $U\Phi^+(K)$. Пусть $s \in \Phi$, $s \neq r_0$ и $\lambda \in$ $\in J^{m-2}$. Обозначим через L_s^λ отображение множества $\{X_{r_1}, \ldots, X_{r_n}, X_{-r_0}\}$ в группу $S\Phi(K)$, которое оставляет на месте элементы $x_{r_i}(t)$, а элемент $x_{-r_0}(p)$ переводит в $x_{-r_0}(p)x_s(\lambda p)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение L_s^λ продолжается до автоморфизма группы $S\Phi(K)$, если*

1) *корень* s *отличен от корней* $-r_0, -r_1, \ldots, -r_n$;

2) *для всякого положительного корня* r *из* $s+r \in \Phi$ *следует* $r_0-r \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корень s, отличный от r_0 и удовлетворяющий условиям 1, 2 предложения 1, будем называть r_0-*экстремальным.* Выберем множество простых корней $r_1, \ldots, r_n$ системы Φ ранга $n > 1$, как и в [6, табл. I—IX]. Вначале докажем, что справедлива

ЛЕММА 4. *Следующие корни и только они являются* r_0-*экстремальными*:

$r_2 + \ldots + r_{n-1}$ для $A_n,\ n > 2$, r_1 для $B_n,\ n > 2$,

$r_0 - 2r_1$ для $C_n,\ n > 1$, r_1 для $G_2,\ D_n,\ n > 4$,

$r_2 + 2r_3 + 2r_4$ для F_4, $r_1 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6$ для E_6,

$2r_1 + r_3 + 4r_4 + 3r_5 + 2r_6 + r_7$ для E_8, $r_2 + r_3 + 2r_4 + 2r_5 + 2r_6 + r_7$ для E_7,

корень r_3, *если* Φ *типа* B_3 *и* D_4, *а также все корни высоты* $h-2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проведем для Φ типа C_n. Для остальных типов оно проводится аналогично. Напомним (см. [6]), что система корней типа C_n состоит из корней вида $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$ и $\pm 2\varepsilon_k$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — ортонормированный базис пространства R^n; простыми являются корни $r_0 = 2\varepsilon_1$, $r_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $1 \leqslant i < n$, $r_n = 2\varepsilon_n$.

Пусть теперь s — r_0-экстремальный корень из Φ. Так как $s \neq r_0$ и $-s \notin \Pi(\Phi)$, то сумма $s+q$ лежит в Φ для некоторого простого корня q. Для него имеется единственная возможность $q = r_1$, поскольку $r_0 - r_i \notin \Phi$, если $i > 1$. Значит, для корня s возможны только следующие случаи: а) $s = -\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j$, $3 \leqslant j \leqslant n$; б) $s = \varepsilon_2 \pm \varepsilon_j$, $3 \leqslant j \leqslant n$; в) $s = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2$; г) $s = 2\varepsilon_2$; д) $s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Однако случаи "а", "б" и "в" исключаются, поскольку $(-\varepsilon_1 \pm \varepsilon_j) + (\varepsilon_2 \mp \varepsilon_j)$, $(\varepsilon_2 \pm \varepsilon_j) + (\varepsilon_2 \mp \varepsilon_j) \in \Phi$, но $2\varepsilon_1 - (\varepsilon_2 \mp \varepsilon_j) \notin \Phi$, и $(-\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2\varepsilon_2 \in \Phi$, но $2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 \notin \Phi$. Корни $2\varepsilon_2 = r_0 - 2r_1$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = r_0 - r_1$, очевидно, удовлетворяют условиям 1, 2 предложения 1 и поэтому являются r_0-экстремальными.

Используя описание r_0-экстремальных корней, приведенное в лемме 4, легко убедиться в том, что справедлива

ЛЕММА 5. *Если корень s является r_0-экстремальным и $s+v, s+v+q \in \Phi$ для некоторых $v, q \in \Phi$, то либо $v+q \in \Phi$ и $s+q \notin \Phi$, либо $s+v+q = r_0$.*

Вернемся к доказательству предложения. Зафиксируем r_0-экстремальный корень s и доопределим отображение L_s^λ, полагая

$$L_s^\lambda(x_{kv-r_0}(u)) = x_{kv-r_0}(u)x_{s+kv}(\lambda u c_{k1,vs}/c_{k1,v,-r_0}),$$

если $s+kv \in \Phi$ для некоторого целого $k>0$, и тождественно на остальных корневых и диагональной подгруппах. Полученное отображение, очевидно, сохраняет определяющие соотношения (2) группы $S\Phi(K)$. Проверим инвариантность оставшихся соотношений.

Элемент $x_{s+kv}(\lambda u c_{k1,vs}/c_{k1,v,-r_0})$ лежит в подгруппе $\Phi(J^{m-1})$, поэтому он перестановочен с любым элементом из $\Phi(J)$. Значит, соотношение (1) инвариантно. Далее, соотношение (3) инвариантно относительно L_s^λ, поскольку $\lambda u c_{k1,vs}/c_{k1,v,-r_0} \in J^{m-1}$ и $J^{m-1}J = 0$. Поэтому же, учитывая $(s+kv)+(r_0-kv) = s+r_0 \notin \Phi$, соотношение (5) инвариантно. Среди соотношений вида (4) проверки требуют только соотношения вида

$$[x_{v-r_0}(u), x_q(t)] = \prod_{i,j>0} x_{iq+j(v-r_0)}(c_{ij,q,v-r_0}(-t)^i u^j), \tag{9}$$

когда $q \in \Phi^+$ и $s+v+q \in \Phi$. Так как

$$\begin{aligned}[L_s^\lambda(x_{v-r_0}(u)), L_s^\lambda(x_q(t))] &= [x_{v-r_0}(u)x_{s+v}(\lambda u c_{11,vs}/c_{11,v,-r_0}), x_q(t)] \\ &= \left(\prod_{i,j>0} x_{iq+j(v-r_0)}(c_{ij,q,v-r_0}(-t)^i u^j)\right) \\ &\quad \times \left(\prod_{i>0} x_{s+v+iq}(\lambda(-t)^i u c_{i1,q,s+v} c_{11,vs}/c_{11,v,-r_0})\right)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}L_s^\lambda &\left(\prod_{i,j>0} x_{iq+j(v-r_0)}(c_{ij,q,v-r_0}(-t)^i u^j)\right) = \\ &= \left(\prod_{i,j>0} x_{iq+j(v-r_0)}(c_{ij,q,v-r_0}(-t)^i u^j)\right) \\ &\quad \times \left(\prod_{i>0} x_{s+v+iq}(\lambda(-t)^i u c_{i1,q,v-r_0} c_{11,iq+v,s}/c_{11,iq+v,-r_0})\right),\end{aligned}$$

то соотношение (9) инвариантно в том и только том случае, если

$$c_{i1,q,s+v}c_{11,vs}/c_{11,v,-r_0} = c_{i1,q,v-r_0}c_{11,iq+v,s}/c_{11,iq+v,-r_0} \tag{10}$$

при любом возможном натуральном i. Для проверки (10) воспользуемся следующими свойствами структурных констант (см., напр., [1]):

$$N_{q_1,q_2}N_{q_1+q_2,q_3} + N_{q_2,q_3}N_{q_2+q_3,q_1} + N_{q_3,q_1}N_{q_3+q_1,q_2} = 0, \tag{11}$$

если $q_1, q_2, q_3, q_1 + q_2 + q_3 \in \Phi$, и $N_{rs} = -N_{sr}$ для любых $r, s \in \Phi$.

Пусть $i = 1$. Так как $s + v + q \in \Phi$ и, по лемме 5, $s + q \notin \Phi$, то $N_{s,v}N_{s+v,q} + N_{v,q}N_{v+q,s} = 0$. Аналогично, $N_{v,-r_0}N_{q,v-r_0} + N_{v,q}N_{v+q,-r_0} = 0$. Выразив константу $N_{v,q}$ из последнего равенства и подставив полученное выражение в равенство $N_{s,v}N_{s+v,q} + N_{v,q}N_{v+q,s} = 0$, приходим к

$$N_{q,s+v}N_{v,s}/N_{v,-r_0} = N_{q,v-r_0}N_{v+q,s}/N_{v+q,-r_0},$$

что равносильно (10), поскольку $c_{11,rs} = N_{r,s}$.

Если $i = 2$, то $v + s + q, q + (q + v) + s \in \Phi$ и, по лемме 5, $s + q \notin \Phi$, а потому $N_{v,s}N_{v+s,q} + N_{q,v}N_{q+v,s} = 0$ и $N_{q,q+v}N_{2q+v,s} + N_{q+v,s}N_{q+v+s,q} = 0$. Выразив константу $N_{q+v,s}$ из первого равенства и подставив найденное выражение в последнее, после очевидных преобразований получим

$$N_{v,s}N_{q,s+v}N_{q,s+v+q}/N_{2q+v,s} = N_{q,v}/N_{q,q+v}. \tag{12}$$

Аналогично доказывается, что

$$N_{v,-r_0}N_{q,v-r_0}N_{q,v+q-r_0}/N_{2q+v,-r_0} = N_{q,v}/N_{q,q+v}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует

$$N_{v,s}N_{q,s+v}N_{q,s+v+q}/N_{v,-r_0} = N_{q,v-r_0}N_{q,q+v-r_0}N_{2q+v,s}/N_{2q+v,-r_0},$$

что равносильно (10), поскольку $c_{21,rs} = (1/2)N_{r,s}N_{r,r+s}$.

Случай $i \geqslant 3$ невозможен, поэтому равенство (10) доказано. Таким образом, отображение L_s^λ сохраняет определяющие соотношения группы $S\Phi(K)$ и потому является автоморфизмом. Предложение доказано.

Пусть $\Phi = A_n$ и простые корни $r_1, \ldots, r_n$ выбраны как в [6], в частности, $r_0 - r_1 \in \Phi$ и $\mu \in J^{m-1}$. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение $Q^{\mu}_{r_1}$, тождественное на подгруппе $U\Phi^+(K)$ и переводящее элемент $x_{-r_0}(p)$ в элемент $x_{-r_0}(p)h_{r_1}(1+$ $+\mu)$, если $\Phi = A_2$, и в элемент $x_{-r_0}(p)h_{r_1}(1+2\mu)h_{r_2}(1+\mu)$, если $\Phi = A_3$, продолжается до автоморфизма групп $SA_2(K)$ и $SA_3(K)$ соответственно. Кроме того,*

$Q^{\mu}_{r_1}(h_{r_1}) = h_{r_1}x_{r_0}(-\mu)$, $Q^{\mu}_{r_1}(h_{r_2}) = h_{r_2}x_{r_0}(2\mu)$, *если* $\Phi = A_2$,

$Q^{\mu}_{r_1}(h_{r_1}) = h_{r_1}x_{r_0}(-\mu)$, $Q^{\mu}_{r_1}(h_{r_2}) = h_{r_2}$, $Q^{\mu}_{r_1}(h_{r_3}) = h_{r_3}x_{r_0}(3\mu)$, *если* $\Phi = A_3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякий автоморфизм группы $S\Phi(K)$, тождественный по модулю конгруэнц-подгруппы $\Phi(J^{m-1})$ и совпадающий с единичным на $U\Phi^+(K)$, раскладывается в произведение внутреннего, центрального и специальных L^{λ}_s, Q^{μ}_r автоморфизмов, если $6K = K$ и ранг Φ больше* 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть автоморфизм ϕ группы $S\Phi(K)$ удовлетворяет условиям. Тогда $\phi(x_{-r_0}(p)) = x_{-r_0}(p)v$ для некоторого элемента $v \in \Phi(J^{m-1})$. Пусть $v = \prod h_{r_i}(1+\theta_i)\prod x_s(\lambda_s)$ — разложение v в произведение корневых и диагональных элементов из $\Phi(J^{m-1})$. Покажем, что элементы λ_s отличны от нуля в том и только том случае, если корень s является r_0-экстремальным.

Действительно, пусть корень s_0 не удовлетворяет условию 2 предложения 1 и, кроме того, $s_0 \notin \{-r_1, \ldots, -r_n, \pm r_0\}$. Тогда найдется такой положительный корень q, что $s_0 + q \in \Phi$ и $q - r_0 \notin \Phi_0$. Рассмотрим коммутатор $[\phi(x_{-r_0}(p)), \phi(x_q)]$. Он равен единице, так как $q - r_0 \notin \Phi$. В то же время,

$$\begin{aligned}
[\phi(x_{-r_0}(p)), \phi(x_q)] &= \left[x_{-r_0}(p)\prod_{i=1}^{n} h_{r_i}(1+\theta_i)\prod_{s\in\Phi} x_s(\lambda_s), x_q\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n}[h_{r_i}(1+\theta_i), x_q]\prod_{s\in\Phi}[x_s(\lambda_s), x_q].
\end{aligned}$$

Значит,

$$\prod_{s\in\Phi}[x_s(\lambda_s), x_q] = \prod_{i=1}^{n}[x_q, h_{r_i}(1+\theta_i)] \in X_q, \tag{14}$$

что, очевидно, останется верным, если $q = r_i$ при $s_0 = -r_i$ и $r_i - r_0 \notin \Phi$. Вычисляя коммутаторы $[x_s(\lambda_s), x_q]$ и приводя подобные члены, видим, что произведение $\prod[x_s(\lambda_s), x_q]$ содержит сомножитель $x_{s_0+q}(c_{11q,s_0}\lambda_{s_0})$, если $s_0 - q \notin \Phi$, произведение $x_{s_0}(c_{11q,s_0-q}\lambda_{s_0-q})x_{s_0+q}(c_{21q,s_0-q}\lambda_{s_0-q} + c_{11q,s_0}\lambda_{s_0})$, если $s_0 - q \in \Phi$, и (единственный) диагональный элемент $h_{r_i}(1+\lambda_{s_0})$, если $s_0 = -r_i$ и $r_i - r_0 \notin \Phi$. Ввиду (14) эти сомножители равны единице и, значит, $\lambda_{s_0} = 0$.

Докажем, что $\lambda_{-r_0} = 0$. Обозначим через r простой корень, для которого $r_0 - r \in \Phi$ и рассмотрим коммутатор $W = [x_{-r_0}(p), x_{r_0-r}, x_{r_0}]$. Используя соотношения (4), находим, что $W = \prod x_{r_0-jr}(c_{1jr_0,-r}(pN_{r_0-r,-r_0})^j)$, где произведение берется по всем целым j, удовлетворяющим условию $r_0 - jr \in \Phi$. Так как $r_0 - jr \in \Phi^+$, а автоморфизм ϕ совпадает с единичным на $U\Phi^+(K)$, то $\phi(W) = W$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\phi(W) &= [x_{-r_0}(p)\prod h_{r_i}(1+\theta_i)\prod x_s(\lambda_s), x_{r-r_0}, x_{r_0}]\\ &= W\cdot\prod[x_s(\lambda_s), x_{r-r_0}(1), x_{r_0}].\end{aligned}$$

Значит, $1 = \prod[x_s(\lambda_s), x_{r-r_0}, x_{r_0}] = x_{r_0-r}(c_{11r_0,-r}\lambda_{-r_0})\ldots$, а поскольку $c_{11r_0,-r}$ — обратимый элемент кольца, то $\lambda_{-r_0} = 0$.

Рассматривая коммутатор $[x_{-r_0}(p), x_{r_0}, x_{r_i}]$, нетрудно убедиться в том, что $\lambda_{-r_i} = 0$, если $r_0 - r_i \in \Phi$. Таким образом, равенства нулю элементов λ_s, когда s не является r_0-экстремальным корнем, можно считать доказанными.

Домножим автоморфизм ϕ слева на произведение автоморфизмов $L_s^{-\lambda_s}$, взятое по всем r_0-экстремальным корням s, и на центральный автоморфизм $C_{-r_0}^{-\lambda_{r_0}}$, где λ является решением уравнения $px = \lambda_{-r_0}$. Полученный автоморфизм обозначим через ϕ_1. Очевидно, что $\phi_1(x_{r_i}) = x_{r_i}$ и $\phi_1(x_{-r_0}(p)) = x_{-r_0}(p)\prod h_{r_i}(1+\theta_i)$. Покажем, что ϕ_1 с точностью до умножения на внутренний автоморфизм и автоморфизмы $Q_{r_1}^{\mu}$, если Φ типа A_2 или A_3, совпадает с единичным автоморфизмом группы $S\Phi(K)$.

Пусть $\Phi \neq A_n$, а r_{j_0} — тот простой корень, для которого $r_0 - r_{j_0} \in \Phi$. В разложении $h_{r_0} = \sum n_i h_{r_i}$ коэффициент n_{j_0} отличен от нуля, поэтому, полагая $g = x_{r_0}(\lambda)$, где $\lambda n_{j_0} p = -\theta_{j_0}$, получим

$$I_g \phi_1(x_{-r_0}(p)) = x_{-r_0}(p) \prod_{i \neq j} h_{r_i}(1+\mu_i), \text{ где } \mu_i = \theta_i + n_i p \lambda \in J^{m-1},$$

и, в то же время, $I_g\phi_1(x_{r_i}) = x_{r_i}$ для всех $r_i \in \Pi(\Phi)$. Покажем, что все элементы μ_i равны нулю. Для этого положим $\phi_2 = I_g\phi_1$ и рассмотрим коммутаторы вида $[\phi_2(x_{r_k}), \phi_2(x_{-r_0}(p))]$, когда $r_k - r_0 \notin \Phi$. Они должны равняться единице, однако вычислив их, получим

$$\begin{aligned}
[\phi_2(x_{r_k}), \phi_2(x_{-r_0}(p))] &= \left[x_{r_k}, x_{-r_0}(p) \prod_{i \neq j_0} h_{r_i}(1+\mu_i) \right] \\
&= x_{r_k}\left(\sum_{i \neq j_0} (h_{\bar{r}_k}, r_i)\mu_i \right).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\sum\limits_{i \neq j_0} (h_{\bar{r}_k}, r_i)\mu_i = 0$ и элементы μ_i удовлетворяют системе линейных однородных уравнений. В зависимости от типа Φ эта система имеет вид

$$B_2, G_2 : 2\mu_1 = 0, \quad B_3 : \begin{cases} 2\mu_1 = 0, \\ 2\mu_3 = 0, \end{cases} \quad C_3 : \begin{cases} 2\mu_1 - \mu_3 &= 0, \\ 2\mu_3 - 2\mu_1 &= 0, \end{cases} \tag{15}$$

в общем случае матрица $\Delta(\Phi)$ системы уравнений получается из матрицы Картана системы корней Φ вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих простым корням r с условием $r_0 - r \in \Phi$. Таким образом,

$$\Delta(D_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta(F_4) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(D_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(E_6)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(E_7)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(E_8)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Delta(B_n)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ n>3,$$

$$\Delta(C_n) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 2 \end{pmatrix}, \ n > 3,$$

$$\Delta(D_n) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ n > 5.$$

Очевидно, что системы (15) имеют только тривиальные решения при условии обратимости числа 6 в кольце Z_{p^m}. Вычислив определители приведенных выше матриц, получим, что $\Delta(\Phi) = 4$, если Φ типа E_7 или B_n, D_n при $n > 4$, $\Delta(\Phi) = 2$, если Φ типа G_2, F_4, E_8 или C_n при $n > 3$, наконец, $|\Delta(E_6)| = 6$ и $\Delta(D_4) = 8$. Так как $6K = K$, соответствующие системы имеют только тривиальные решения.

Рассмотрим тип A_n. Выберем простые корни $r_1, \dots, r_n$ как в [6]. Тогда $r_0 - r_1, r_0 - r_n \in \Phi$, а $r_k + r_i \in \Phi$ в том и только том случае, если $|k - i| = 1$. Обозначим через λ решение уравнения $px = -\theta_n$ в кольце K, и пусть $g = x_{r_0}(\lambda)$. Рассмотрим автоморфизм $\phi_2 = I_g\phi_1$. Легко понять, что

$$\phi_2(x_{-r_0}(p)) = x_{-r_0}(p)h_{r_1}(1 + \theta_1 - \theta_n) \dots h_{r_{n-1}}(1 + \theta_{n-1} - \theta_n)$$

и $\phi_2(x_{r_i}) = x_{r_i}$ для всех $r_i \in \Pi(\Phi)$. Положим $\mu_i = \theta_i - \theta_n$ для $i = 1, \dots, n-1$ и покажем, что при $n > 3$ элементы $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ равны нулю. Действительно, как и выше из равенства единице коммутаторов $[\phi_2(x_{r_k}), \phi_2(x_{-r_0}(p))]$ при $k \neq 1, n$ вытекают соотношения

$$-\mu_1+2\mu_2-\mu_3 = 0,\ \ldots,\ -\mu_{n-3}+2\mu_{n-2}-\mu_{n-1} = 0,\ -\mu_{n-2}+2\mu_{n-1} = 0. \quad (16)$$

Далее, выбрав знаки структурных констант N_{rs} соответствующих экстраспециальным парам корней так, чтобы $N_{r_i+\ldots+r_k, r_{k+1}+\ldots+r_l} = 1$, когда $1 \leqslant i \leqslant k < l \leqslant n$, получим

$$\begin{aligned}
\phi_2(x_{-r_i}(p)) &= [\phi_2(x_{r_{i+1}+\ldots+r_n}), [\phi_2(x_{-r_0}(p)), \phi_2(x_{r_1+\ldots+r_{i-1}})]] \\
&= x_{-r_i}(p), \\
\phi_2(x_{-r_1}(p)) &= [\phi_2(x_{r_2}), \ldots, [\phi_2(x_{r_n}), \phi_2(x_{-r_0}(p))] \ldots] \\
&= x_{-r_1}(p) x_{r_0-r_1}(\mu_{n-1}), \\
\phi_2(x_{-r_n}(p)) &= [\phi_2(x_{-r_0}(p)), \phi_2(x_{r_1}), \ldots, \phi_2(x_{r_{n-1}})] \\
&= x_{-r_n}(p) x_{r_0-r_n}(\mu_2 - 2\mu_1).
\end{aligned}$$

Используя соотношение (7) и тождественность ϕ_2 на элементах подгруппы $U\Phi^-(J^2)$ находим, что $\phi_2(h_{-r_i}) = h_{-r_i}$, когда $1 < i < n$, а образы элементов h_{-r_0}, h_{-r_1}, h_{-r_n} соответственно равны $h_{-r_0}x_{r_0}(-\mu_1)$, $h_{-r_1}x_{r_0}(\mu_{n-1})$, $h_{-r_n}x_{r_0}(\mu_2 - 2\mu_1)$. Поскольку $h_{-\bar{r}_0} = h_{-\bar{r}_1} + \ldots + h_{-\bar{r}_n}$, то $\phi_1(h_{-r_0}) = \phi_2(h_{-r_1}) \ldots \phi_2(h_{-r_n})$ и, следовательно, выполняется равенство $\mu_2 - 2\mu_1 + \mu_{n-1} = -\mu_1$. Дополняя систему (16) уравнением $\mu_2 - \mu_1 + \mu_{n-1} = 0$, получим систему линейных однородных уравнений с квадратной матрицей $\Delta'(A_n)$, определитель которой равен 2. Поэтому $\mu_1 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$ и ϕ_2 — тождественный автоморфизм. Если Φ равно A_2 или A_3, то нетрудно видеть, что $\phi_2 = Q_{r_1}^{\mu_1}$. Предложение доказано.

§ 3. Автоморфизмы T_r^γ группы $S\Phi^+(K)$

В этом параграфе при условии, что $6K = K$, исследуются автоморфизмы, тождественные по модулю $H(J^{m-1})$ на корневых подгруппах, соответствующих простым корням.

Следующая лемма содержит ряд соотношений, из которых, по существу, и вытекает основной результат этого параграфа — предложение 4.

ЛЕММА 6. *Пусть r и s — различные простые корни системы корней Φ, отличной от G_2, ϕ — автоморфизм группы $S\Phi(K)$, причем $\phi(x_q) = x_q d_q$, где $d_q \in H(J^{m-1})$ для всякого простого корня q. Тогда*

а) $[x_s, d_r] = 1$, *если* $r + s \notin \Phi$;

б) $[x_s, d_r, x_r][x_{r+s}(N_{sr}), d_r] = 1$, *если* $r + s \in \Phi$, $2r + s, r + 2s \notin \Phi$;

в) $[x_{r+2s}(c_{21sr}), d_r] = 1$, *если* $r + s, r + 2s \in \Phi$;

г) $[x_s, d_r, x_r, x_r][x_{r+s}(N_{sr}), d_r, x_r][x_{2r+s}(2c_{21,rs}), d_r] = 1$, *если* $r+s, 2r+ +s \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что элементы d_r, d_s и коммутаторы $[x_r, d_s]$, $[d_s, x_r]$ лежат в подгруппе $\Phi(J^{m-1})$, а значит, перестановочны между собой. Кроме того, для любых $a, b \in \Phi(J^{m-1})$ из коммутаторных тождеств $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ и $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$ вытекает соотношение

$$[x_r a, x_s b] = [x_r, b][x_r, x_s]^{ab}[a, x_s]. \tag{17}$$

а) Пусть $r + s \notin \Phi$. Тогда $[x_s, x_r] = 1$ и в силу (17) имеем $1 = [\phi(x_s), \phi(x_r)] = [x_s, d_r][d_s, x_r]$. Однако, $[x_s, d_r] \in X_s$, $[d_s, x_r] \in X_r$ и $X_s \cap X_r = 1$, а значит, $[x_s, d_r] = 1$.

б) Если $r + s \in \Phi$ и $2r + s, r + 2s \notin \Phi$, то $[x_s, x_r, x_r] = 1$. Вычисляя коммутатор $[\phi(x_s), \phi(x_r)]$, а затем, используя соотношения $[x_s, d_r, x_r d_r] = = [x_s, d_r, x_r]$, $[x_{r+s}(N_{sr})^{d_r d_s}, d_r] = [x_{r+s}(N_{sr}), d_r]$, $[d_s, x_r, x_r d_r] = 1$, и коммутатор $[\phi(x_s), \phi(x_r), \phi(x_r)]$, получаем $1 = [x_s, d_r, x_r][x_{r+s}(N_{sr}), d_r]$.

в) При данных условиях справедливо

$$1 = [\phi(x_s), \phi(x_r), \phi(x_r)] = [x_{r+s}(N_{sr}), d_r][x_{r+2s}(c_{12rs}), d_r][x_s, d_r, x_r],$$

причем $[x_{r+s}(N_{sr}), d_r], [x_s, d_r, x_r] \in X_{r+s}$, $[x_{r+2s}(c_{12rs}), d_r] \in X_{r+2s}$ и $X_{r+s} \cap \cap X_{r+2s} = 1$. Поэтому $[x_{r+2s}(c_{12rs}), d_r] = 1$.

г) При данных условиях справедливо

$$\begin{aligned} 1 &= [\phi(x_s), \phi(x_r), \phi(x_r), \phi(x_r)] \\ &= [x_s, d_r, x_r, x_r][x_{r+s}(N_{sr}), d_r, x_r][x_{2r+s}(2c_{21rs}), d_r]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть Φ — система корней ранга, большего 1, $\phi \in \mathrm{Aut}(S\Phi(K))$ и $\phi(x_{r_i}) = x_{r_i} d_{r_i}$, где $d_{r_i} \in H(J^{m-1})$ для всех*

$i = 1, \ldots, n$. *Тогда существуют внутренний* I_g, *диагональный* d_χ, *а при* $\Phi = A_n$ *и* $(p, n+1) \neq 1$ — *специальные* $T_{r_i}^{\mu_i}$ *автоморфизмы такие, что* $d_\chi I_g \phi(x_r) = x_r$ *и* $T_{r_1}^{\mu_1} \ldots T_{r_n}^{\mu_n} d_\chi I_g \phi(x_r) = x_r$ *для всякого* $r \in \Phi^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $d_{r_i} \in H(J^{m-1})$, а значит, $d_{r_i} = \prod_{i=1}^{n} h_{r_j}(1+\theta_j^i)$, где $\theta_j^i \in J^{m-1}$ для всех i, j. Обозначим через χ гомоморфизм целочисленной решетки системы корней Φ в $K^\#$, для которого $\chi(r_i) = 1 + \theta_i^i$, $i = 1, \ldots, n$, и пусть $g = \prod_{i=1}^{n} x_{-r_i}(\theta_i^i)$. Тогда

$$d_\chi I_g \phi(x_{r_i}) = d_\chi I_g \left(x_{r_i} \prod_{j=1}^{n} h_{r_j}(1+\theta_j^i) \right) = x_{r_i} \prod_{j \neq i} h_{r_j}(1+\theta_j^i).$$

Покажем, что $\prod_{j \neq i} h_{r_j}(1+\theta_j^i) = 1$, кроме, быть может, случая, когда $\Phi = A_n$ и $(p, n+1) \neq 1$. Для этого подставим в соотношения "а"—"г" леммы 6 произведение $\prod_{j \neq i} h_{r_j}(1+\theta_j^i)$ вместо d_r и при фиксированном i заставим корень s пробегать множество простых корней $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_n$. Вычислив коммутаторы, стоящие в левых частях равенств, и приравняв полученные выражения к 1, получим следующую систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j \neq i} (r_k, h_{\bar{r}_j})\theta_j^i = 0, & \text{если } r_i + r_k \notin \Phi, \\ \sum_{j \neq i} (2r_k + r_i, h_{\bar{r}_j})\theta_j^i = 0, & \text{если } r_i + r_k \in \Phi, \text{ но } 2r_i + r_k \notin \Phi, \\ \sum_{j \neq i} (r_k + 2r_i, h_{\bar{r}_j})\theta_j^i = 0, & \text{если } 2r_i + r_k \in \Phi, \end{cases} \tag{18}$$

где i пробегает множество натуральных чисел от 1 до n. В зависимости от типа Φ система (18) после очевидных преобразований принимает вид

$$\begin{cases} \theta_j^i = (n+1-j)\theta_n^i, \ i = 1, \ldots, n-1, \\ \qquad\qquad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n-1, \\ (n+1)\theta_1^n = (n+1)\theta_n^i = 0, \ i = 1, \ldots, n-1, \\ \theta_j^n = j\theta_1^n, \ j = 2, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{19}$$

если $\Phi = A_n$ и $n \geqslant 4$;

$$\begin{cases} \theta_j^i = 2\theta_n^i, \ i = 1, \ldots, n-1, \ j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n-1, \\ 2\theta_n^1 = \ldots = 2\theta_n^{n-1} = 3\theta_1^n = 0, \\ \theta_j^n = j\theta_1^n, \ j = 2, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{20}$$

если $\Phi = B_n$ и $n \geqslant 5$;

$$\begin{cases} \theta^i_j = \theta^i_n, \ i = 1, \ldots, n-1, \ j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n-1, \\ \theta^1_n = \ldots = \theta^{n-1}_n = \theta^n_{n-1} = 0, \\ \theta^n_j = \theta^n_{n-1}, \ j = 1, \ldots, n-2, \end{cases} \tag{21}$$

если $\Phi = C_n$ и $n \geqslant 5$;

$$\begin{cases} \theta^i_j = 2\theta^i_n, \ i = 1, \ldots, n-1, \ j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n-2, \\ \theta^i_{n-1} = \theta^i_n, \ i = 1, \ldots, n-2, \\ \theta^n_j = 2\theta^n_{n-1}, \ j = 1, \ldots, n-2, \\ 2\theta^1_n = \ldots = 2\theta^{n-1}_n = \theta^n_{n-1} = 0, \end{cases} \tag{22}$$

если $\Phi = D_n$ и $n \geqslant 6$.

Системы (20)—(22) и (19), когда $(p, n+1) = 1$, при условии $6K = K$ имеют только тривиальные решения, поэтому $d\chi I_g(x_r) = x_r$ для любого $r \in \Pi(\Phi)$.

Пусть $\Phi = A_n$ и $(p, n+1) = p$. Определим отображение

$$T^{\mu}_{r_i}(x_{r_i}) = x_{r_i} \prod_{i \neq j} h_{r_j}(1 + j\mu),$$

а на остальных корневых и диагональных элементах пусть оно действует тождественно. Нетрудно проверить, что $T^{\mu}_{r_i}$ продолжается до автоморфизма группы $SA_n(Z_{p^m})$ и $T^{\theta^1_n}_{r_1} \ldots T^{\theta^{n-1}_n}_{r_{n-1}} T^{\theta^n_1}_{r_n} I_g d_\chi(x_r) = x_r$ для любого $r \in \Pi(A_n)$.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Обозначим через $\Delta_i(\Phi)$ матрицу системы уравнений (18) при фиксированном i. Матрица $\Delta_i(\Phi)$ получается из матрицы Картана системы корней Φ в результате следующих преобразований: 1) умножения k-ой строки на 2 и прибавления к ней i-ой, если $r_i + r_k \in \Phi$ и $2r_i + r_k \notin \Phi$; 2) прибавления к k-ой строке i-ой, умноженной на 2, если $2r_i + r_k \in \Phi$; 3) вычеркивания i-ой строки и i-го столбца полученной матрицы. Вычислив определители матриц $\Delta_i(\Phi)$ для оставшихся систем корней, увидим, что они делятся только на числа $2, 3$ и их степени. Поэтому соответствующие системы тоже имеют только тривиальные решения и $d\chi I_g(x_r) = x_r$ для любого $r \in \Pi(\Phi)$.

Используя инвариантность соотношений $[x_r, x_{3r+2s}] = 1$, $[x_s, x_{2s+r}] = 1$, убеждаемся в том, что $\theta_2^1 = \theta_1^2 = 0$, если Φ типа G_2.

Таким образом, автоморфизм ϕ с точностью до умножения на внутренний, диагональный и специальные T_r^μ автоморфизмы тождествен на элементах $x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}$, а в силу следствия 1 — и на всей подгруппе $U\Phi^+(K)$. Предложение доказано.

§ 4. Автоморфизмы, тождественные по модулю подгруппы $\Phi(J^{m-1})$

Пусть Φ — система корней ранга, больше 1, r_0 — ее максимальный корень, а r — простой корень, для которого $r_0 - r \in \Phi$. С каждым таким корнем r и ненулевым числом λ из идеала J^{m-1} свяжем отображение R_r^λ группы $S\Phi(K)$, $\Phi \neq C_n$, на себя, которое действует на элементах $x_r(t)$ по правилу

$$R_r^\lambda(x_r(t)) = x_r(t)x_{r_0-r}(2\lambda t N_{r_0-r,r}^{-1})x_{r_0}(\lambda(t^2-t)), \tag{23}$$

а на диагональной подгруппе и корневых подгруппах отличных от X_r — тождественно.

ЛЕММА 7. *Отображение R_r^λ продолжается до автоморфизма группы $S\Phi(K)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства

$$\begin{aligned} &R_r^\lambda(x_r(t))R_r^\lambda(x_r(u)) = \\ &\quad = x_r(t)x_{r_0-r}(\mu t)x_{r_0}(\lambda(t^2-t))x_r(u)x_{r_0-r}(\mu u)x_{r_0}(\lambda(u^2-u)) \\ &\quad = x_r(t+u)x_{r_0-r}(\mu(t+u))x_{r_0}(\lambda(t^2-t+u^2-u))[x_{r_0-r}(\mu t), x_r(u)] \\ &\quad = x_r(t+u)x_{r_0-r}(\mu(t+u))x_{r_0}(\lambda((t+u)^2-(t+u))) = R_r^\lambda(x_r(t+u)), \end{aligned}$$

где $\mu = 2\lambda N_{r_0-r,r}^{-1}$, показывают, что отображение R_r^μ сохраняет соотношение $x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u)$.

Элемент $x_{r_0}(\lambda(t^2-t))$ является центральным, а $x_{r_0-r}(\mu t)$ перестановочен с любыми диагональными и корневыми элементами, кроме тех, что лежат во множестве $X_r \setminus X_r(J)$. Отсюда и из тождественности R_r^λ на подгруппе $X_r(J)$ вытекает инвариантность соотношений (3)—(5), если в них присутствуют элементы из X_r. Инвариантность остальных определяющих соотношений очевидна, поскольку R_r^λ тождественно на диагональной подгруппе и корневых подгруппах, отличных от X_r. Лемма доказана.

Если Φ — система корней типа C_n, то разность r_0-2r также является корнем, а отображение P_r^λ ($\lambda \in J^{m-1}$), тождественное на диагональной и корневых подгруппах, отличных от X_r, и такое, что

$$P_r^\lambda(x_r(t)) = x_r(t)x_{r_0-2r}(6\lambda t)x_{r_0-r}(3\lambda t^2 N_{r_0-r,r})x_{r_0}(2\lambda t^3 c_{21,r,r_0-2r}), \qquad (24)$$

продолжается до автоморфизма группы $SC_n(K)$.

Для произвольного $\phi \in \mathrm{Aut}(S\Phi(K))$ образ элемента x_r, $r \in \Phi^+$, запишем в виде

$$\phi(x_r) = x_r d_r^\phi \prod_{q\in\Phi} x_q(\lambda_{r,q}^\phi) = x_r a_r^\phi, \text{ где } d_r^\phi \in H(J).$$

В частности, если автоморфизм ϕ тождествен по модулю подгруппы $\Phi(J^{m-1})$, то $d_r^\phi \in H(J^{m-1})$ и $\lambda_{r,q}^\phi \in J^{m-1}$ для всех $q \in \Phi$. Подгруппу, порожденную центральными, внутренними I_g, где $g \in \Phi(J^{m-1})$, диагональными d_χ, где $\chi \in \mathrm{Hom}(Z\Phi, 1+J^{m-1})$, и специальными вида (23) и (24) автоморфизмами, обозначим через V.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть ϕ — автоморфизм группы $S\Phi(K)$, тождественный по модулю конгруэнц-подгруппы $\Phi(J^{m-1})$. Тогда существует автоморфизм $\phi' \in V$ такой, что $\phi'\phi(x_r) = x_r d_r$, где $d_r \in H(J^{m-1})$, для всякого простого корня r.*

Для доказательства нам потребуется

ЛЕММА 8. *Пусть q — положительный корень, а r — простой корень такой, что $q-r \notin \Phi_0$. Тогда либо существует положительный корень s, удовлетворяющий одному из условий:*

а) $q+s \in \Phi, s+r \notin \Phi$, *причем* $q+s-r \notin \Phi$,

б) $q+s+r, s+r \in \Phi, 2r+s \notin \Phi$, *причем* $q+s-r, q+s-2r \notin \Phi$ *и*

$$N_{q,s}N_{q+s,r} + N_{r,s}N_{r+s,q} = \pm 1, \pm 2,$$

в) $q+s+2r, s+r, s+2r \in \Phi, 3r+s \notin \Phi$, *причем*

$$N_{s,r}N_{s+r,r}N_{s+2r,q} + N_{s,r}N_{s+r,q}N_{s+r+q,r} + N_{s,q}N_{s+q,r}N_{q+s+r,r} = \pm 1, \pm 2, \pm 3;$$

либо корень q удовлетворяет одному из условий:

г) $q + r = r_0$,

д) $\Phi = C_n$ *и* $q + 2r = r_0$,

е) $q = r_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы очевидно при $\mathrm{ht}(q) = 1, h-2, h$, в остальных случаях см. [1, лемма 6.6 и док-во леммы 6.7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения. Упорядочим корни из Φ следующим образом. Сначала разобьем их на подмножества, состоящие из корней одной высоты, и будем считать, что $s \prec r$, если $\mathrm{ht}(s) < \mathrm{ht}(r)$, а затем произвольным образом упорядочим корни одной высоты. Упорядоченные корни занумеруем числами от 1 до $|\Phi|$ так, чтобы выполнялось неравенство $\rho_i \prec \rho_{i+1}$.

Согласно введенному упорядочению $\rho_1 = -r_0$. Для любого простого корня r имеем $r + r_0 \notin \Phi$ и, значит,

$$\begin{aligned} 1 &= [\phi(x_r), \phi(x_{r_0})] = [x_r a_r^{\phi}, x_{r_0} a_{r_0}^{\phi}] \\ &= [x_r, a_{r_0}^{\phi}][a_r^{\phi}, x_{r_0}] = h_r(1 - \lambda_{r_0,r}^{\phi}) h_{r_0}(1 + \lambda_{r,-r_0}^{\phi}) \ldots, \end{aligned} \tag{25}$$

где многоточием обозначено произведение корневых элементов. Поскольку ко-корни $h_{\bar r}$ и $h_{-\bar\rho_1}$ не пропорциональны и $p > 3$, то из (25) следует, что $\lambda_{r,-\rho_1}^{\phi} = 0$.

Далее воспользуемся индукцией. Пусть уже найден автоморфизм $\alpha \in \in V$ такой, что $\lambda_{r,\rho_i}^{\alpha\phi} = 0$ для всех простых корней r и всех i, $1 \leqslant i < k$. Положим $\psi = \alpha\phi$ и покажем существование автоморфизма β такого, что $\lambda_{r,\rho_i}^{\beta\psi} = 0$ для всех простых корней r и всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Зафиксируем простой корень r, и пусть $q = \rho_k$. Возможны два случая: $q - r \notin \Phi$ и $q - r \in \Phi$.

С л у ч а й 1. Пусть $q - r \notin \Phi$. Если $q \in \Phi^-$ и $q \neq -r$, то $1 = [\psi(x_r), \psi(x_{-q})] = h_r(1 - \lambda_{-q,r}^{\psi}) h_q(1 + \lambda_{r,q}^{\psi}) \ldots$ и, рассуждая как и выше, получим $\lambda_{r,q}^{\psi} = 0$.

Допустим, что $\rho_k = -r$. Обозначим через s простой корень, для которого $r+s \in \Phi$. Если $2r+s \notin \Phi$, то $1 = [\psi(x_{r+s}), \psi(x_r)] = x_s(\lambda_{r,-r}^{\psi} N_{r+s,-r}) \ldots$ и $\lambda_{r,-r}^{\psi} = 0$. Если $2r + s \in \Phi$ и $3r + s \notin \Phi$, то $1 = [\psi(x_{r+s}), \psi(x_r), \psi(x_r)] =$

$= x_{r+s}(\lambda^{\psi}_{r,-r}N)\ldots$, где

$$N = N_{s+r,-r}N_{s,r} + N_{r+s,r}N_{2r+s,-r} = 2N^2_{s,r} + 2N^2_{r+s,r} = 4,$$

поэтому $\lambda^{\psi}_{r,-r} = 0$. Если же $3r+s \in \Phi$, то $\Phi = G_2$, а более громоздкие вычисления показывают, что и в этом случае выполняется $\lambda^{\psi}_{r,-r} = 0$.

Пусть $q = r$. Положим $\beta = d_{\chi}$, где $\chi(r) = 1 - \lambda^{\psi}_{r,r}$ и $\chi(s) = 1$ для всех простых корней s, отличных от r. Тогда $\lambda^{\beta\psi}_{s,\rho_i} = 0$ для всех простых корней s и всех i, $1 \leqslant i < k$, и $\lambda^{\beta\psi}_{r,q} = 0$.

Допустим, что $q \in \Phi^+$ и $q \neq r$. Тогда либо существует положительный корень s, удовлетворяющий одному из условий "а"—"в" леммы 8, либо выполняется одно из условий "г"—"е". В первых трех случаях имеем $1 = [\phi(x_s),_i \phi(x_r)] = x_{q+s+(i-1)r}(\lambda^{\psi}_{r,q}N_i)\ldots,\ i = 1,2,3$ и $N_1 = N_{r,q}$, $N_2 = N_{s,q}N_{q+s,r} + N_{s,r}N_{r+s,q}$,

$$N_3 = N_{s,r}N_{s+r,r}N_{s+2r,q} + N_{s,r}N_{s+r,q}N_{s+r+q,r} + N_{s,q}N_{s+q,r}N_{q+s+r,r}.$$

Так как $0 < |N_i| \leqslant 3$, то $\lambda^{\psi}_{r,q} = 0$. Если выполняется одно из условий "г"—"е", то, полагая β равным соответственно R^{μ}_r, P^{μ}_r или подходящему центральному автоморфизму, получим, что $\lambda^{\beta\psi}_{s,\rho_i} = 0$ для всех простых корней s и всех i, $1 \leqslant i < k$, а кроме того, $\lambda^{\beta\psi}_{r,q} = 0$.

С л у ч а й 2. Пусть $q - r \in \Phi$. Обозначим через β внутренний автоморфизм, индуцированный элементом $g = x_{q-r}(-\lambda^{\psi}_{r,q}N^{-1}_{r,q-r})$. Тогда

$$\beta\psi(x_r) = x_r[x_r, g]x_q(\lambda^{\psi}_{r,q})x_{\rho_{k+1}}(\lambda^{\psi}_{r,\rho_{k+1}})\ldots = x_r x_{\rho_{k+1}}(\lambda^{\beta\psi}_{r,\rho_{k+1}})\ldots.$$

Если r — единственный простой корень, который в сумме с $q-r$ лежит в Φ, то получаем требуемое.

Допустим, что существует $s \in \Pi(\Phi)$, для которого $s + q - r \in \Phi$ и $s \neq r$. Тогда корень s определяется однозначно и либо $r+s, s+q \in \Phi$, либо $r + s \notin \Phi$ и $q = -s$. Покажем, что в обоих случаях $\lambda^{\beta\psi}_{s,s+q-r} = 0$.

Если $r + s \notin \Phi$, то $1 = [\beta\psi(x_r), \beta\psi(x_s)] = x_{s+q}(\lambda^{\beta\psi}_{s,s+q-r}N_{r,s+q-r})\ldots$ и, следовательно, $\lambda^{\beta\psi}_{s,s+q-r}N_{r,s+q-r} = 0$. Пусть $r+s \in \Phi$. Если $s+2r \notin \Phi$, то $1 = [\beta\psi(x_s), \beta\psi(x_r), \beta\psi(x_r)] = x_{s+q}(-2\lambda^{\beta\psi}_{s,-r})\ldots$, отсюда $\lambda^{\beta\psi}_{s,-r} = 0$. Если же $s+2r\in\Phi$, то r и s порождают подсистему корней типа B_2 или G_2 и $2s+r\notin\Phi$. В этом случае

$$1=[\beta\psi(x_s),\beta\psi(x_r),\beta\psi(x_s)]=x_{s+q}(\lambda^{\beta\psi}_{s,-r}(N_{s,r}N_{r+s,-r}-(h_r,s)))\dots,$$

а число $N_{s,r}N_{r+s,-r}-(h_r,s)$ равно 4, если $\Phi=B_2$, и 6, если $\Phi=G_2$. Поэтому $\lambda^{\beta\psi}_{s,-r}=0$. Предложение доказано.

§ 5. Основная теорема

Обозначим через $W^m(\Phi)$ подгруппу группы $\mathrm{Aut}(S\Phi(K))$, порожденную в зависимости от типа Φ автоморфизмами вида $L^\mu_s, Q^\mu_s, T^\mu_s, R^\mu_s, P^\mu_s$ и всеми центральными автоморфизмами. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Φ — система корней ранга больше 1, $p>3$ и $m\geqslant 1$. Тогда произвольный автоморфизм группы $S\Phi(Z_{p^m})$ раскладывается в произведение внутреннего, диагонального, графового автоморфизмов и некоторого автоморфизма из подгруппы $W^m(\Phi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по m. Автоморфизмы группы $S\Phi(Z_p)=U\Phi^+(Z_p)$ при $p>3$ описаны в [1], и для них указанное разложение справедливо.

Пусть ϕ — произвольный автоморфизм группы $S\Phi(Z_{p^m})$, и $m>1$. Ввиду изоморфизма $S\Phi(Z_{p^m})/\Phi(J^{m-1})\simeq S\Phi(Z_{p^{m-1}})$ и поскольку подгруппа $\Phi(J^{m-1})$ характеристическая, ϕ индуцирует автоморфизм $\bar\phi$ группы $S\Phi(Z_{p^{m-1}})$. В силу индуктивного предположения $\bar\phi$ раскладывается в произведение внутреннего $I_{\bar g}$, $\bar g\in S\Phi(Z_{p^{m-1}})$, диагонального $d_{\bar\chi}$, $\bar\chi\in\in \mathrm{Hom}(\Phi, Z^{\#}_{p^{m-1}})$, графового Γ_Φ автоморфизмов и некоторого автоморфизма $\bar\psi\in W^{m-1}(\Phi)$. Обозначим через ζ естественный гомоморфизм кольца Z_{p^m} на кольцо $Z_{p^{m-1}}$, через g — прообраз элемента $\bar g$ относительно гомоморфизма групп $S\Phi(Z_{p^m})$ и $S\Phi(Z_{p^{m-1}})$ индуцированного ζ, наконец, через χ — тот гомоморфизм из $\mathrm{Hom}(\Phi, Z^{\#}_{p^m})$, для которого $\zeta(\chi(r))=\bar\chi(r)$, и положим $\phi_1=\Gamma^{-1}_\Phi d^{-1}_\chi I^{-1}_g\phi$. Автоморфизм $\bar\phi_1$ индуцирует автоморфизм $\bar\psi$ из подгруппы $W^{m-1}(\Phi)$. Покажем, что в действительности $\bar\phi_1=1$.

Вначале установим, что $\bar{\phi}_1(x_{-r_0}(p)) = x_{-r_0}(p)$ или, другими словами, $\phi_1(x_{-r_0}(p)) = x_{-r_0}(p)a_{-r_0}$ для некоторого элемента a_{-r_0} из $\Phi(J^{m-1})$. Это очевидно (следует из характеристичности подгруппы $\Phi(J)$) при $m = 2$. Для случая $m > 2$ нам потребуется

ЛЕММА 9. *Пусть G — произвольная группа, $a, b \in G$ и $y_i = [b,_i a]$ для $i = 1, \ldots$. Если $by_i = y_i b$ и $y_i y_{i+1} = y_{i+1} y_i$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$, то справедлива формула*

$$(ab)^k = a^k b^k y_1^{C_k^2} \ldots y_{k-1}^{C_k^k}, \tag{26}$$

где C_k^i – биномиальные коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по k. При $k = 2$ формула, очевидно, верна. Используя предположение индукции, находим

$$(ab)^{k+1} = (ab)^k(ab) = a^k b^k y_1^{C_k^2} \ldots y_{k-1}^{C_k^k}(ab).$$

Переставляя элемент a с элементами $y_i^{C_k^{i+1}}$ и b^k, приходим к равенству

$$(ab)^{k+1} = a^{k+1} b^k [b^k, a] y_1^{C_k^2} [y_1^{C_k^2}, a] \ldots y_{k-1}^{C_k^k} [y_{k-1}^{C_k^k}, a] b. \tag{27}$$

Из условий леммы вытекает, что $[b^k, a] = y_1^k$ и $[y_i^{C_k^{i+1}}, a] = y_{i+1}^{C_k^{i+1}}$, поэтому (27) можно переписать в виде

$$(ab)^{k+1} = a^{k+1} b^{k+1} y_1^{C_k^2 + k} \ldots y_i^{C_k^{i+1} + C_k^i} \ldots y_k^{C_k^k}$$

(здесь также используется перестановочность элементов y_i и b). Однако, $C_k^{i+1} + C_k^i = C_{k+1}^{i+1}$ и $C_k^k = C_{k+1}^{k+1}$, отсюда и следует (26). Лемма доказана.

Пусть теперь $m > 2$ и

$$L_{s_1}^{\bar{\gamma}_1} \ldots L_{s_k}^{\bar{\gamma}_k} Q_{r_1}^{\bar{\alpha}} T_{r_1}^{\bar{\beta}_1} \ldots T_{r_n}^{\bar{\beta}_n} R_{q_1}^{\bar{\delta}_1} \ldots R_{q_l}^{\bar{\delta}_l} P_{r_1}^{\bar{\theta}} C_{-r_0}^{\bar{\lambda}_0} \prod_{r_i, r_0 - r_i \notin \Phi} C_{r_i}^{\bar{\lambda}_i} - \tag{28}$$

разложение $\bar{\psi}$ в произведение автоморфизмов, порождающих группу $W^{m-1}(\Phi)$. Обозначим через $\lambda_0, \alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ произвольные прообразы элементов $\bar{\lambda}_0, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_k$ относительно гомоморфизма ζ. Тогда образ $\phi_1(x_{-r_0}(p))$ раскладывается в произведение

$$x_{-r_0}(p) x_{r_0}(\lambda_0) h_{r_1}(1 + n_1\alpha) h_{r_2}(1 + n_2\alpha) h \prod_{i=1}^{k} x_{s_i}(\gamma_i) \prod_{q \in \Phi} x_q(\lambda_q) = x_{-r_0}(p) a_{-r_0},$$

где $h \in H(J^{m-1})$, $\lambda_q \in J^{m-1}$ для всех $q \in \Phi$ и $n_2 = 1$, если $\Phi = A_2$ или A_3, $n_1 = 2$, если $\Phi = A_3$, $n_1 = n_2 = 0$ в остальных случаях. Элементы $\lambda_0, \alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, очевидно, лежат в идеале J^{m-2}. Покажем, что в действительности они лежат в идеале J^{m-1}, поэтому $\bar{\psi}$ и будет тождествен на $x_{-r_0}(p)$.

Так как

$$[x_{-r_0}(p), a_{-r_0}] =$$

$$x_{-r_0}(-p(n_1h_{r_1} + n_2h_{r_2}, r_0)\alpha)h_{r_0}(1 + p\lambda_0)\prod_{i=1}^{k} x_{s_i - r_0}(\gamma_i N_{-r_0, s_i}) = g \in \Phi(J^{m-1})$$

и $[x_{-r_0}(p), g] = 1$, то по лемме 9 и в силу попарной перестановочности элементов, входящих в разложение a_{-r_0}, для произвольного $t \in Z_{p^m}$ имеем

$$\begin{aligned}\phi_1(x_{-r_0}(pt)) = x_{-r_0}(pt)x_{r_0}(\lambda_0 t)h_{r_1}(1 + n_1\alpha t)h_{r_2}(1 + n_2\alpha t)h^{t'} \\ \times \prod_{i=1}^{k} x_{s_i}(\gamma_i t) \prod_{q \in \Phi} x_q(\lambda_q t) g^{(t'^2 - t')/2},\end{aligned} \tag{29}$$

где t' — произвольный прообраз элемента t относительно естественного гомоморфизма кольца Z на кольцо Z_{p^m}. Центральные автоморфизмы и автоморфизмы $L_{s_i}^{\bar{\gamma}_i}, T_{r_j}^{\bar{\beta}_j}, R_{q_k}^{\bar{\delta}_k}, P_{r_1}^{\bar{\theta}}$ действуют тождественно на диагональной подгруппе. Поэтому $\phi_1(h_s) = h_s c_s$, где $c_s \in \Phi(J^{m-1})$ для всех $s \in \Phi$, если Φ не является системой типа A_2 или A_3. В последних двух случаях образы $\phi_1(h_{r_1}), \ldots, \phi_1(h_{r_n})$ соответственно равны (см. предл. 2) $h_{r_1}x_{r_0}(-\alpha)c_{r_1}$, $h_{r_2}x_{r_0}(2\alpha)c_{r_2}$, если $\Phi = A_2$, и $h_{r_1}x_{r_0}(-\alpha)c_{r_1}$, $h_{r_2}c_{r_2}$, $h_{r_3}x_{r_0}(3\alpha)c_{r_3}$, если $\Phi = A_3$.

Рассмотрим теперь определяющие соотношения вида $[x_{-r_0}(p), h_s] = = x_{-r_0}(w)$, где $w = p((1-p)^{-(h_{\bar{s}}, r_0)} - 1)$. Используя (29), найдем образ элемента $x_{-r_0}(w)$:

$$\begin{aligned}\phi_1(x_{-r_0}(w)) = x_{-r_0}(w)x_{r_0}(\lambda_0 a)h_{r_1}(1 + n_1 a\alpha)h_{r_2}(1 + n_2 a\alpha) \\ \times \prod_{i=1}^{k} x_{s_i}(a\gamma_i),\ a = p(h_s, r_0).\end{aligned} \tag{30}$$

В то же время,

$$[\phi_1(x_{-r_0}(p)), \phi_1(h_s)] = x_{-r_0}(w))x_{r_0}(-\lambda_0 p(h_s, r_0))\prod_{i=1}^{k} x_{s_i}(a\gamma_i p(h_{\bar{s}}, s_i)). \tag{31}$$

Так как всякий автоморфизм сохраняет определяющие соотношения, то правые части формул (30) и (31) должны быть равны. Отсюда следует, что $n_1 a\alpha = 0$, т. е. $\alpha \in J^{m-1}$, и

$$2p\lambda_0(h_{\bar{s}}, r_0) = \gamma_1 p(h_{\bar{s}}, r_0 + s_1) = \ldots = \gamma_k p(h_{\bar{s}}, r_0 + s_k) = 0.$$

Выбирая корень s так, чтобы $(h_{\bar{s}}, r_0) \neq 0$, и учитывая, что $|(h_{\bar{s}}, r_0)| < 4$, получаем $\lambda_0 \in J^{m-1}$. Аналогично доказывается $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in J^{m-1}$. Таким образом, $\phi_1(x_{-r_0}(p)) = x_{-r_0}(p)a_{-r_0}$, где $a_{-r_0} \in \Phi(J^{m-1})$.

Докажем, что автоморфизм $\bar{\psi}$ тождествен на элементах $x_{r_1}, \ldots, x_{r_n}$. Для этого обозначим через $\lambda_i, \beta_i, \delta_i, \theta$ произвольные прообразы относительно гомоморфизма ζ элементов $\bar{\lambda}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\delta}_i, \bar{\theta}$ соответственно и покажем, что они также лежат в идеале J^{m-1}.

Пусть $r_0 - r_i \notin \Phi$. Тогда

$$\phi_1(x_{r_i}) = x_{r_i} x_{r_0}(\lambda_i) \cdot \prod_{j \neq i} h_{r_j}(1 + j\theta\theta_i) \cdot a_{r_i},$$

где $a_{r_i} \in \Phi(J^{m-1})$, а $\theta = 1$, если $\Phi = A_{p-1}$ и $m > 2$, и $\theta = 0$ в противном случае. Рассмотрим коммутатор $[\phi_1(x_{r_i}), \phi_1(x_{-r_0}(p))]$. Ввиду условия $r_0 - r_i \notin \Phi$ он должен равняться единице, однако вычислив его, получим

$$[\phi_1(x_{r_i}), \phi_1(x_{-r_0}(p))] = x_{r_i} x_{r_0}(\lambda_i) x_{-r_0}(-p\theta\theta_i)[x_{r_i}, a_{-r_0}].$$

Тогда $p\lambda_i = p\theta\theta_i = 0$, и поэтому $\lambda_i, \theta_i \in J^{m-1}$.

Аналогично, используя соотношения $[x_{-r_0}(p), x_{r_i}, x_{r_i}] = 1$, $[x_{r_i}, h_s, x_{r_i}] = 1$, когда $r_0 - r_i \in \Phi$, доказывается, что $\beta_i, \delta_i \in J^{m-1}$.

Таким образом, автоморфизм ϕ_1 тождествен по модулю подгруппы $\Phi(J^{m-1})$ и остается применить предложения 5, 4 и 3. Теорема доказана.

§ 6. Описание автоморфизмов группы $SA_1(Z_{p^m})$

ТЕОРЕМА 2. *Всякий автоморфизм группы $SA_1(Z_{p^m})$ при $p > 3$ разложим в произведение внутреннего, диагонального, центрального автоморфизмов и автоморфизма R_λ, тождественного на $H(J) \cdot UA_1^-(J)$ и* *переводящего элементы* $x_a(t)$ *из* $UA_1^+(K)$ *в*

$$x_a(t+\lambda(3t^2-2t^3-t))h_a(1+3\lambda(t^2-t))x_{-a}(6\lambda t),$$

которые существуют для любого $\lambda \in J^{m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что отображение R_λ действительно является автоморфизмом группы $SA_1(Z_{p^m})$. Пусть $\phi \in \in \mathrm{Aut}(SA_1(Z_{p^2}))$ и

$$x_a(\lambda)h_a(1+\mu_1)x_{-a}(\gamma),\ x_a(\lambda_1)h_a(1+\mu_2)x_{-a}(\gamma_1),\ x_a(\lambda_2)h_a(1+\mu_3) -$$

образы относительно ϕ элементов $x_a, x_{-a}(p)$ и h_a соответственно. Из характеристичности подгрупп $A_1(J)$ и $\Gamma_2(SA_1(Z_{p^m}))$ следует, что λ — обратимый элемент кольца, $\gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_2 = 0$, а остальные аргументы лежат в J. Рассмотрим автоморфизм $\psi = \psi_{-\gamma}C^{\delta}_{-a}d_\chi I_g\phi$, где $\delta = 2\mu\mu_2 + \mu^2\gamma_1 - \lambda_1$ и

$$g = x_a(\mu)x_{-a}(\lambda^{-1}(\mu_1+\mu\gamma)), \quad \chi(a) = (\lambda - 2\mu\mu_1 - \mu^2\gamma + \lambda\mu_1 + \lambda\gamma\mu)^{-1},$$

а элемент μ из Z_{p^2} является решением уравнения $\mu_2 = x\gamma_1$. Имеем $\psi(x_a) = = x_a$, $\psi(x_{-a}(p)) = x_{-a}(\gamma_1\lambda)$ и $\psi(h_a) = x_a(\lambda_2 - 2\mu\mu_3)h_a(1+\mu_3)$. Покажем, что в действительности $\psi = 1$. В самом деле, из инвариантности соотношений $[x_a, h_a] = x_a(-2p)$ и $[x_a, x_{-a}(p)] = x_a(p)h_a$ вытекают равенства $x_a(2\mu_3) = = x_a(-2p)$ и $x_a(\gamma_1\lambda)h_a(1-\gamma_1\lambda) = x_a(p+\lambda_2-2\mu\mu_3)h_a(1+\mu_3)$, откуда $\mu_3 = -p$, $\gamma_1\lambda = p$ и $\lambda_2 - 2\mu\mu_3 = 0$. Следовательно, $\psi = I_g^{-1}d_\chi^{-1}C^{\delta}_{-a}\psi_\gamma$.

Далее воспользуемся индукцией по m. Пусть ϕ — произвольный автоморфизм группы $SA_1(Z_{p^m})$ и $m > 2$. Ввиду изоморфизма $SA_1(Z_{p^m})/A_1(J^{m-1}) \simeq SA_1(Z_{p^{m-1}})$ и леммы 3, ϕ индуцирует автоморфизм $\bar{\phi}$ группы $SA_1(Z_{p^{m-1}})$, который, в силу индукционного предположения, разложим в произведение $\bar{\phi} = I_{\bar{g}}d_{\bar{\chi}}C^{\bar{\mu}}_{-a}\psi_{\bar{\lambda}}$, где $\bar{\mu}, \bar{\gamma} \in J^{m-2}$. Обозначим через I_g и d_χ те автоморфизмы, для которых $\bar{I}_g = I_{\bar{g}}$ и $\bar{d}_\chi = d_{\bar{\chi}}$, и положим $\phi_1 = d_\chi^{-1}I_g^{-1}\phi$. Пусть $\lambda, \mu \in Z_{p^m}$ и $\zeta(\lambda) = \bar{\lambda}, \zeta(\mu) = \bar{\mu}$. Тогда образами элементов $x_a, x_{-a}(p)$ и h_a относительно ϕ_1 будут соответственно

$$x_a(1+\lambda_1)h_a(1+\lambda_2)x_{-a}(\lambda),\ x_a(\mu)h_a(1+\mu_1)x_{-a}(p+\mu_2),$$

$$x_a(\gamma_1)h_a(1-p+\gamma_2)x_{-a}(\gamma_3),$$

где $\lambda_i, \mu_j, \gamma_k \in J^{m-2}$ для всех возможных i, j, k.

Покажем, что $\lambda, \mu \in J^{m-1}$. Для доказательства включения $\lambda \in J^{m-1}$ воспользуемся инвариантностью соотношения $[x_a, h_a, x_a] = 1$. Вычислив образы левой и правой частей последнего равенства относительно ϕ_1, получим соотношение $x_a(\gamma_3 - 6p\lambda)h_a(1 + 4p\lambda) = 1$, т. е. $\gamma_3 = 0$ и $\lambda \in J^{m-1}$. Домножим ϕ_1 слева на произведение $d_{\chi 1}\psi_{-\lambda}I_{g_1}$, где $g_1 = x_a(-\gamma_1/2)x_{-a}(\lambda_2)$, $\chi_1(a) = 1 - \lambda_1 + \gamma_2$, и обозначим через ϕ_2 полученное произведение. Тогда $\phi_2(x_a) = x_a$, $\phi(h_a) = h_a(1 - p + \gamma_2)$ и $\phi_2(x_{-a}(p)) = \phi_1(x_{-a}(p))$.

Докажем теперь включение $\mu \in J^{m-1}$. Из инвариантности соотношения $[x_a, h_a] = x_a(p^2 - 2p)$ вытекает $\gamma_2 = 0$. Пусть $t \in Z_{p^m}$, и $\bar{t} \in Z$ — произвольный прообраз элемента t. Найдем $\phi_2(x_{-a}(pt))$. Так как

$$[x_a(\mu)h_a(1 + \mu_2), x_{-a}(p + \lambda_{-a-b})] = h_a(1 - p\mu),$$

$[h_a(1 - p\mu), x_{-a}(p + \mu_3)] = 1$, в силу леммы 9, а также из инвариантности соотношений (1) и (2), получаем

$$\begin{aligned}\phi_2(x_{-a}(pt)) &= [x_a(\mu)]^{\bar{t}}[h_a(1 + \mu_2)]^{\bar{t}}[x_{-a}(p + \mu_3)]^{\bar{t}}[h_a(1 - p\mu)]^{\frac{\bar{t}^2-\bar{t}}{2}}\\ &= x_a(t\mu)h_a(1 + t\mu_2 - p\mu(t^2 - t)/2)x_{-a}(pt + \mu_3 t).\end{aligned}$$

Вычислив образы правой и левой частей соотношения $[x_{-a}(p), h_a] = x_{-a}(w)$, где $w = p(1-p)^{-2} - p$, приходим к равенству $x_a(-2p\mu)x_{-a}(w) = x_a(2p\mu)x_{-a}(w)$, из которого следует, что $\mu \in J^{m-1}$. Соотношение (5) инвариантно, поэтому

$$x_a(\kappa + 2\mu_2 + \mu_3)h_a(1 - p - \mu_3)x_{-a}(-p\kappa) = [\phi_2(x_a), \phi_2(x_{-a})]$$

$$= \phi_2(x_a(\kappa))\phi_2(h_a)\phi_2(x_{-a}(-p\kappa)) = x_a(\kappa)h_a x_{-a}(-p\kappa), \text{ где } \kappa = p^2 - 2p.$$

Значит, $\mu_3 = \mu_2 = 0$ и $C_{-a}^{-\mu}\phi_2 = 1$. Отсюда $\phi = I_g d_\chi I_{g_1^{-1}}\psi_\lambda d_{\chi_1}^{-1}C_{-a}^{\mu}$ или (ввиду соотношений (8) и перестановочности автоморфизмов ψ_λ, d_χ^{-1}) $\phi = I_{gd_\chi g_1^{-1}}d_\chi d_{\chi_1}^{-1}\psi_\lambda C_{-a}^{\mu}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. A. Gibbs*, Automorphisms of certain unipotent groups, J. Algebra, **14**, N 2 (1970), 203—228.

2. *В. М. Левчук*, Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов, Алгебра и логика, **29**, N 2 (1990), 141—161.
3. *В. М. Левчук*, Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле, Алгебра и логика, **29**, N 3 (1990), 315—338.
4. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь, 15-е изд., Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 2002.
5. *В. М. Левчук*, Коммутаторное строение некоторых подгрупп групп Шевалле, Укр. матем. ж., **44**, N 6 (1992), 786—795.
6. *Н. Бурбаки*, Группы и алгебры Ли, Главы IV—VI, М., Мир, 1972.
7. *R. Carter*, Simple groups of Lie type, New York, Wiley and Sons, 1972.

Поступило 18 февраля 2002 г.

Адрес автора:

КОЛЕСНИКОВ Сергей Геннадьевич, Красноярский гос. технич. университет, ул. Киренского, 26, г. Красноярск, 660074, РОССИЯ. Тел.: (3912) 49-76-47. e-mail: sklsnkv@e-mail.ru