А. Л. Вернер, Т. В. Иванова, О площади нерегулярных поверхностей в пространствах постоянной кривизны, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, номер 3, 20–27

https://www.mathnet.ru/ivm3284

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 513.735

А. Л. Вернер, Т. В. Иванова

О ПЛОЩАДИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

1. Введение. Методы изучения площади поверхности во многом зависят от способа задания поверхности. Наиболее подробно в работах Л. Тонелли [1] — [3], Т. Радо [4], И. Я. Верченко [5], [6] и др. изучена площадь поверхности, заданной в декартовых координатах уравнением $z=f(x, y)$. Для таких поверхностей Г. Я. Поплавской [7], [8] доказана эквивалентность всех имеющихся определений понятия площади. Во всех работах площадь поверхностей рассматривается только в евклидовом пространстве (подробная библиография по теории площади имеется в монографиях Т. Радо [9], Л. Чезари [10] и обзоре Федерера [11]).

В настоящей работе изучается площадь непрерывной поверхности, заданной в неевклидовом пространстве R постоянной кривизны $K=\pm 1$ в сферических координатах r, φ, θ уравнением

$$r=r(\varphi, \theta) \tag{1}$$

на сегменте $I_0=[\alpha_0 \leqslant \varphi \leqslant \beta_0, \gamma_0 \leqslant \theta \leqslant \delta_0]$. Вопрос о площади поверхности, заданной уравнением (1) в евклидовом пространстве, решен в работах А. И. Костовского [12], [13]. Уравнение (1) дает возможность ввести для F выражения, аналогичные известным в теории площади выражениям Гече. С помощью этих выражений строится функция сегмента $H(F)$, которую мы назовем площадью поверхности в смысле Гече. Кроме того, для поверхности F можно определить площадь $A(F)$ в смысле Лебега, как нижний предел площадей многогранников, равномерно сходящихся к F.

В нашей работе установлено, что необходимые и достаточные условия существования площадей $H(F)$ и $A(F)$ поверхности F в пространстве R будут такие же, как и для евклидова пространства, и показана эквивалентность этих двух определений площади в R. При этом мы будем следовать плану, по которому излагается в [14] (гл. V) вопрос о площади явно заданной поверхности F: $z=f(x, y)$ в евклидовом пространстве.

2. Площадь гладкой поверхности. Пусть R — трехмерное пространство постоянной кривизны $K=\pm 1$. Введем в R сферические координаты r, φ, θ с началом в точке O. Мы считаем R реализованным в евклидовом пространстве E_3 моделью Кэли — Клейна, причем абсолютом будет сфера с уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2+K=0$, имеющая центр в точке O. Тогда координаты φ, θ можно рассматривать как географические координаты на единичной сфере S в E_3 с центром в точке O, а r будет расстоянием в E_3 от O до образа соответствующей точки. Если $K=-1$ (R — пространство Лобачевского), то $0 \leqslant r < 1$; если $K=1$, то $0 \leqslant r < +\infty$.

Рассмотрим в R поверхность F, заданную в сферических координатах r, φ, θ уравнением (1) на сегменте $I_0=[\alpha_0, \beta_0; \gamma_0, \delta_0]$ (т. е. $\alpha_0 \leqslant \varphi \leqslant \beta_0$; $\gamma_0 \leqslant \theta \leqslant \delta_0$). Если поверхность F гладкая, то для ее площади имеем выражение

$$s(F)=\iint_{I_0}\sqrt{\frac{r^2\cos^2\theta}{(1+Kr^2)^2}+\frac{r^2r_\varphi^2}{(1+Kr^2)^3}+\frac{r^2r_\theta^2\cos^2\theta}{(1+Kr^2)^3}}\,d\varphi d\theta, \tag{2}$$

которое можно привести к виду

$$ds=\frac{(p^{-2}+K)^{1/2}}{(r^{-2}+K)^{3/2}}\cos\theta d\varphi d\theta, \tag{3}$$

где $p=p(\varphi, \theta)$ — расстояние в E_3 от O до касательной плоскости к F в точке $r(\varphi, \theta)$.

3. Выражения Гече и их интегралы. Функцию $r(\varphi, \theta)$ в уравнении (1) считаем непрерывной, и в случае $K=-1$ $\max|r(\varphi, \theta)|=r_0<1$. Рассмотрим две функции

$$v(\varphi, \theta)=[1+Kr^2(\varphi, \theta)]^{-1/2} \tag{4}$$

и

$$u(\varphi, \theta)=v(\varphi, \theta)\cos\theta+\int_{\gamma_0}^{\theta}v(\varphi, t)\sin t\,dt. \tag{5}$$

Отметим, что если функция $r(\varphi, \theta)$ дифференцируема, то

$$v_\varphi=\frac{|rr_\varphi|}{(1+Kr^2)^{3/2}}, \quad \text{а} \quad u_\theta=\frac{|rr_\theta\cos\theta|}{(1+Kr^2)^{3/2}}.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Если одна из функций $r(\varphi, \theta)$, $u(\varphi, \theta)$ и $v(\varphi, \theta)$ обладает одним из следующих свойств:*

1) *непрерывна на сегменте I_0;*

2) *имеет ограниченную вариацию в смысле Тонелли* (BVT) *на I_0;*

3) *является абсолютно непрерывной функцией в смысле Тонелли* (ACT) *на сегменте I_0, — то две другие функции обладают соответствующими свойствами.*

Доказательство леммы 1 очевидно следует из соотношений (4) и (5).

Введем теперь функции плоского сегмента $I=[\alpha, \beta; \gamma, \delta] \subset I_0$, которые и будут выражениями Гече в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned}
G_1&=G_1(u, I)=\int_\alpha^\beta|u(\varphi, \delta)-u(\varphi, \gamma)|\,d\varphi;\\
G_2&=G_2(v, I)=\int_\gamma^\delta|v(\beta, \theta)-v(\alpha, \theta)|\,d\theta;\\
G_3&=G_3(r, I)=\iint_I\frac{r(\varphi, \theta)\,|\cos\theta|}{1+Kr^2}\,d\varphi d\theta;\\
G&=G(r, I)=\sqrt{G_1^2(u, I)+G_2^2(v, I)+G_3^2(r, I)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тогда имеет место

Теорема 1. *Выражения Гече суть непрерывные функции сегмента, и их интегралы (в смысле Бёркиля) по любому сегменту* $I=[\alpha, \beta; \gamma, \delta]\subset I_0$ *существуют и удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\int_I G_1=\int_\alpha^\beta W(u;\ \varphi;\ \gamma,\ \delta)\,d\varphi;\ \int_I G_2=\int_\gamma^\delta W(v;\ \theta;\ \alpha,\ \beta)\,d\theta;$$

$$\int_I G_3=\iint_I \frac{r(\varphi,\ \theta)\,|\cos\theta|}{1+Kr^2}\,d\varphi d\theta;$$

$$\int_I G_1\geqslant G_1(u,\ I);\ \int_I G_2\geqslant G_2(v,\ I);\ \int_I G\geqslant G(r,\ I);$$

$$\int_I G_i\leqslant\int_I G\leqslant\int_I G_1+\int_I G_2+\int_I G_3,\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

где $W(u;\ \varphi;\ \gamma,\ \delta)$ — *абсолютная вариация функции* $u(\varphi,\ \theta)$, *как функции переменного* θ *на сегменте* $[\gamma,\ \delta]$ *при фиксированном* φ.

Теорема 2. *Для того чтобы выражение Гече* $G(I)=G(r,\ I)$ *как функция сегмента было интегрируемо на* I_0 (*т. е.* $\int_{I_0} G(I)<\infty$), *необходимо и достаточно, чтобы непрерывная функция* $r(\varphi,\ \theta)$ *была функцией ограниченной вариации в смысле Тонелли на* I_0.

Обозначим интегралы (в смысле Бёркиля) выражений Гече через $H_i(I)=\int_I G_i$, $i=1,\ 2,\ 3$, $H(r,\ I)=\int_I G$. Тогда справедлива

Теорема 3. *Для любой непрерывной функции* $r(\varphi,\ \theta)$, *имеющей ограниченную вариацию* (BVT) *на* I_0, *выражения* $H_1(I)$, $H_2(I)$, $H_3(I)$ *и* $H(r,\ I)$ *суть аддитивные неотрицательные функции сегмента* $I\subset I_0$, *и почти во всех точках сегмента* I_0 *имеют место равенства:*

$$H_1'(\varphi,\ \theta)=|u_\theta(\varphi,\ \theta)|;\ H_2'(\varphi,\ \theta)=|v_\varphi(\varphi,\ \theta)|,$$

$$H'(\varphi,\ \theta)=\lim_{I\to(\varphi,\theta)}\frac{H(r,\ I)}{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}=\left[\frac{r^2(1+Kr^2)\cos^2\theta+r^2r_\varphi^2+r^2r_\theta^2\cos^2\theta}{(1+Kr^2)^3}\right]^{1/2}.$$

Для того чтобы функция сегмента $H(r,\ I)$ *была абсолютно непрерывна на сегменте* I_0, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $r(\varphi,\ \theta)$ *была* ACT, *если это верно, то*

$$H(r,\ I_0)=\iint_{I_0}\left[\frac{r^2\cos^2\theta}{(1+Kr^2)^2}+\frac{r^2r_\varphi^2}{(1+Kr^2)^3}+\frac{r^2r_\theta^2\cos^2\theta}{(1+Kr^2)^3}\right]^{1/2}d\varphi d\theta.$$

Доказательства теорем 1, 2 и 3 дословно повторяют доказательства теорем 5.3, 5.13 и 6.1 — 6.5 ([14], гл. V). В силу теоремы 3 и формулы (2) выражение $H(r,\ I_0)$ естественно назвать площадью поверхности F в смысле Гече. Для $H(r,\ I)$ имеет место обычное свойство полунепрерывности снизу.

Теорема 4. *Пусть* $r_n(\varphi,\ \theta)$ — *последовательность непрерывных функций, заданных на* I_0, *сходящаяся к* $r(\varphi,\ \theta)$.

Тогда для любого сегмента $I\subset I_0$ *имеет место* $\varliminf_{n\to\infty} H(r_n,\ I)\geqslant H(r,\ I)$.

Теорема 4 является аналогом теоремы 6.8 ([14], гл. V).

4. Средние функции. Для функции $v(\varphi, \theta)$ построим ее среднюю (в смысле В. А. Стеклова) функцию

$$v_h(\varphi, \theta) = \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h v(\varphi+a, \theta+b)\, da db.$$

Как известно, $v_h(\varphi, \theta)$ — гладкая функция, и при $h \to 0$ $v_h(\varphi, \theta) \to v(\varphi, \theta)$ равномерно.

По функции $v_h(\varphi, \theta)$ определяем гладкие (класса C^1) функции $r^h(\varphi, \theta) = \sqrt{Kv_h^{-2} - 1}$ и $u^h(\varphi, \theta) = v_h(\varphi, \theta)\cos\theta + \int_{\gamma_0}^{\theta} v_h(\varphi, t)\sin t\, dt$.

Очевидно, при $h \to 0$ функции $r^h(\varphi, \theta)$ и $u^h(\varphi, \theta)$ равномерно сходятся к $r(\varphi, \theta)$ и (φ, θ) соответственно.

Покажем, что площади $H(r^h, I_0)$ поверхностей F^h, заданных уравнениями $r = r^h(\varphi, \theta)$, сходятся к площади $H(r, I_0)$ поверхности F. Из теоремы 4 вытекает, что

$$\varliminf_{h\to 0} H(r^h; I_0) \geqslant H(r; I_0). \tag{7}$$

Для получения противоположного неравенства построим выражения:

$$G_1(u^h, I) = \int_\alpha^\beta |u^h(\varphi, \delta) - u^h(\varphi, \gamma)|\, d\varphi,\quad G_2(I_h, I) = \int_\gamma^\delta |v_h(\beta, \theta) - v_h(\alpha, \theta)|\, d\theta,$$

а также средние функции от этих выражений Гече:

$$[G_1(u, I)]_h = \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h G_1(u, I^{(a, b)})\, da db = \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h \Big[\int_\alpha^\beta |v(\varphi+a, \delta+b)\cos(\delta+b) +$$

$$+ \int_{\alpha_0}^{\delta+b} v(\varphi+a, t)\sin t\, dt - v(\varphi+a, \gamma+b)\cos(\gamma+b) -$$

$$- \int_{\alpha_0}^{\gamma+b} v(\varphi+a, t)\sin t\, dt\,|\, d\varphi\Big]\, da db;$$

$$[G_2(v, I)]_h = \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h G_2(u, I^{(a, b)})\, da db =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h\Big[\int_\gamma^\delta |v(\beta+a, \theta+b) - v(\alpha+a, \theta+b)|\, d\theta\Big] da db,$$

где $I^{(a, b)}$ — сегмент, полученный из I сдвигом на вектор (a, b). Тогда имеют место неравенства:

$$G_2(v_h, I) = \int_\gamma^\delta \Big|\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h v(\beta+a, \theta+b)\, da db -$$

$$- \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h v(\alpha+a, \theta+b)\, da db\Big|\, d\theta \leqslant \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h\Big[\int_\gamma^\delta |v(\beta+\alpha, \theta+b) -$$

$$- v(\alpha+a, \theta+b)|\, d\theta\Big] da db = [G_2(v, I)]_h;$$

$$G_1(u^h, I)=\int\limits_\alpha^\beta \Big| v_h(\varphi, \delta)\cos\delta - v_h(\varphi, \gamma)\cos\gamma +$$

$$+\int\limits_\gamma^\delta v_h(\varphi, t)\sin t\, dt\Big|\, d\varphi \leqslant \frac{1}{h^2}\int\limits_\alpha^\beta\Big[\int\limits_0^h\int\limits_0^h \Big| v(\varphi+a, \delta+b)\cos(\delta+b) -$$

$$- v(\varphi+a, \gamma+b)\cos(\gamma+b) + \int\limits_{\gamma+b}^{\delta+b} v(\varphi+a, t)\sin t dt\Big|\, dadb\Big]\, d\varphi +$$

$$+ h\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h\int\limits_0^h\Big[\int\limits_\alpha^\beta\Big| v(\varphi+a, \delta+b)\sin\left(\delta+\frac{b}{2}\right)-$$

$$- v(\varphi+a, \gamma+b)\sin\left(\gamma+\frac{b}{2}\right)\Big|\, d\varphi\Big]\, dadb +$$

$$+ h\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h\int\limits_0^h\Big[\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_\gamma^\delta v(\varphi+a, t+b)\Big|\cos\left(t+\frac{b}{2}\right)\Big|\, dtd\varphi\Big] dadb =$$

$$= [G_1(u, I)]_h + h\,[G_4(v, I)]_h, \tag{8}$$

где через $[G_4(v, I)]_h$ обозначена средняя функция для $G_4(v, I) = \int\limits_\alpha^\beta |v(\varphi, \delta)\sin\delta - v(\varphi, \gamma)\sin\gamma|\, d\varphi$, причем в синусе и косинусе при усреднении к аргументу прибавляется не b, а $b/2$, что, очевидно, не меняет свойств средней функции. Если $r(\varphi, \theta)$ — функция BVT, то $G_4(v, I)$ интегрируема на I_0 (в смысле Бёркиля), ее интеграл обозначим через $H_4(v, I)$. Пусть

$$G_3(r^h, I) = \iint\limits_I v_h^2 r^h(\varphi, \theta)\,|\cos\theta|\, d\varphi d\theta,$$

а

$$[G_3(r, I)]_h =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h\int\limits_0^h\Big[\iint\limits_I v^2(\varphi+a, \theta+b)\, r(\varphi+a, \theta+b)\,|\cos(\theta+b)|\, d\varphi d\theta\Big]\, dadb.$$

Тогда

$$G_3(r^h, I) = \iint\limits_I \Big[\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h\int\limits_0^h v(\varphi+a, \theta+b)\, dadb\Big]^2 r^h(\varphi, \theta)\,|\cos\theta|\, d\varphi d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_I\Big[\frac{1}{h^4}\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^h dadb\right)\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^h v^2(\varphi+a, \theta+b)\, dadb\right) r^h(\varphi, \theta)\,|\cos\theta|\Big]\, d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{1}{h^2}\iint\limits_I\Big[\int\limits_0^h\int\limits_0^h v^2(\varphi+a, \theta+b)\, r(\varphi+a, \theta+b)\,|\cos(\theta+b)|\, dadb\Big]\, d\varphi d\theta +$$

$$+ \frac{1}{h^2}\iint\limits_I\Big\{\int\limits_0^h\int\limits_0^h v^2(\varphi+a, \theta+b)\,[r^h(\varphi, \theta)\,|\cos\theta| -$$

$$- r(\varphi+a, \theta+b)\,|\cos(\theta+b)|\,]\, dadb\Big\}\, d\varphi d\theta. \tag{9}$$

В силу равномерной сходимости функции $r^h(\varphi, \theta)$ к $r(\varphi, \theta)$, равномерной непрерывности $r(\varphi, \theta)$ на I_0 и ограниченности $v(\varphi, \theta)$ на I_0 функция

$$g_h(\varphi, \theta) = \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h v^2(\varphi + a, \theta + b)\,[r^h(\varphi, \theta)\,|\cos\theta| - - r(\varphi + a, \theta + b)\,|\cos(\theta + b)|]\,da\,db$$

равномерно сходится к нулю при $h \to 0$. Поэтому из (9) вытекает, что

$$G_3(r^h, I) \leqslant [G_3(r, I)]_h + \varepsilon(h)\,|I|, \tag{10}$$

где $|I| = (\beta - \alpha)(\delta - \gamma)$, $\varepsilon(h) = \max|g_h(\varphi, \theta)| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Теперь, используя (8) и (10), получаем:

$$\begin{gathered} G(r^h, I) = \{G_1^2(u^h, I) + G_2^2(v_h, I) + G_3^2(r^h, I)\}^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \{[G_1(u, I)]_h^2 + [G_2(v, I)]_h^2 + [G_3(r, I)]_h^2\}^{1/2} + \\ + 2\sqrt{h}\,[G_1(u, I)]_h^{1/2}\,[G_4(v, I)]_h^{1/2} + 2\sqrt{\varepsilon(h)}\,[G_3(r, I)]_h^{1/2}\,|I|^{1/2} + \\ + \varepsilon(h)\,|I| + h\,[G_4(v, I)]_h \leqslant \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h [G_1^2(u, I^{(a, b)}) + G_2^2(v, I^{(a, b)}) + \\ + G_3^2(r, I^{(a, b)})]^{1/2}\,da\,db + 2\sqrt{h}\,\{[G_1(u, I)]_h + [G_4(v, I)]_h\} + \\ + 2\sqrt{\varepsilon(h)}\,\{[G_3(r, I)]_h + |I|\} + \varepsilon(h)\,|I| + h\,[G_4(v, I)]_h. \end{gathered} \tag{11}$$

Обозначим $\delta(h) = \max[\sqrt{h}, \sqrt{\varepsilon(h)}]$, $G_5(r, I) = 2G_1(u, I) + 2G_3(r, I) + 3G_4(v, I) + 3|I|$, тогда из (11) получаем

$$G(r^h, I) \leqslant \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h G(r, I^{(a, b)})\,da\,db + \delta(h)\,\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h G_5(r, I^{(a, b)})\,da\,db. \tag{12}$$

Заметим, что функция сегмента $G_5(r, I)$ интегрируема на I_0 (в смысле Бёркиля). Ее интеграл обозначим $H_5(r, I_0) < \infty$. Разобьем сегмент I_0 на n^2 равных сегментов I_k, тогда из (12) вытекает

$$\begin{gathered} \sum G(r^h, I_k) \leqslant \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h \sum_k G(r, I_k^{(a, b)})\,da\,db + \\ + \delta(h)\,\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h G_5(r, I^{(a, b)})\,da\,db. \end{gathered} \tag{13}$$

При $h \to \infty$ сумма $\sum\limits_k G(r^h, I_k)$ сходится к $H(r^h, I_0)$, а сумма $\sum\limits_k G(r, I_k^{(a, b)})$ сходится к $H(r, I_0^{(a, b)})$ равномерно по a и b (см. [14], гл. V, 3.4). Поэтому

$$\begin{gathered} H(r^h, I) \leqslant \frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h H(r, I_0^{(a, b)})\,da\,db + \\ + \delta(h)\,\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h H_5(r, I_0^{(a, b)})\,da\,db. \end{gathered} \tag{14}$$

Площади фигур $I_0 \setminus I_0^{(a,b)}$ и $I_0^{(a,b)} \setminus I_0$ стремятся к нулю вместе с h и $\delta(h)$, а так как $H(r, I)$ — непрерывная функция сегмента, то, переходя к пределу в (14), получим

$$\overline{\lim_{h \to 0}} H(r^h, I_0) \leqslant H(r, I_0). \tag{15}$$

Объединяя (15) и (7), получаем требуемое равенство

$$\lim_{h \to 0} H(r^h, I_0) = H(r, I_0). \tag{16}$$

5. Площадь поверхности в смысле Лебега. Если функция $r = r(\varphi, \theta)$ на $I_0 = [\alpha_0, \beta_0; \gamma_0, \delta_0]$ задает многогранник, то через $A(r, I)$ обозначим площадь соответствующего многогранника; если же $r(\varphi, \theta)$ — произвольная непрерывная функция, то через $A(r, I)$ обозначим площадь в смысле Лебега поверхности, заданной функцией $r = r(\varphi, \theta)$. Пусть $r = r(\varphi, \theta)$ задает многогранник. Поскольку в этом случае $r(\varphi, \theta)$ — функция АСТ, то в силу формулы (3) и теоремы 3 имеет место равенство

$$A(r, I) = \iint\limits_I \frac{(p^{-2} + K)^{1/2}}{(r^{-2} + K)^{3/2}} d\sigma = H(r, I). \tag{17}$$

Лемма 2. *Пусть функция $r = r(\varphi, \theta)$ класса C^1 задает гладкую поверхность F.*

Тогда существует последовательность многогранников $F_n : r = r_n(\varphi, \theta)$, вписанных в F, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} A(r_n, I) = H(r, I)$.

Доказательство. Разобьем I на n^2 равных сегментов, а затем каждый из сегментов разобьем диагональю на два треугольника. Многогранники F_n вписываем в F так, что каждому треугольнику разбиения соответствует треугольная грань на F_n с вершинами в соответствующих точках. При таком разбиении плоскости граней многогранника F_n сходятся к касательным плоскостям поверхности F в тех точках, к которым стягивается грань. Поэтому имеет место равномерная сходимость функций $r_n(\varphi, \theta)$ к $r(\varphi, \theta)$, а функций $p_n(\varphi, \theta)$ к $p(\varphi, \theta)$ на I. А тогда

$$\lim_{n \to \infty} A(r_n, I) = \lim_{n \to \infty} \iint\limits_I \frac{(p_n^{-2} + K)^{1/2}}{(r_n^{-2} + K)^{3/2}} d\sigma = \iint\limits_I \frac{(p^{-2} + K)^{1/2} d\sigma}{(r^{-2} + K)^{3/2}} = H(r, I),$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 2 вытекает, что для гладких поверхностей

$$A(r, I) \leqslant H(r, I). \tag{18}$$

Теорема 5. *Для любой поверхности F, заданной непрерывной функцией $r = r(\varphi, \theta)$ на I, имеет место равенство $A(r, I) = H(r, I)$.*

Доказательство. Возьмем последовательность средних функций $r^h(\varphi, \theta)$ для $r(\varphi, \theta)$. Как доказано в п. 4, существует $\lim\limits_{h \to \infty} H(r^h, I) = H(r, I)$. Из (18) вытекает, что

$$\overline{\lim_{h \to \infty}} H(r^h, I) = H(r, I). \tag{19}$$

Возьмем последовательность многогранников $P_n : r_n = r_n(\varphi, \theta)$, сходящуюся к F_n и такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} A(r_n, I) = A(r, I)$. В силу полунепрерывности снизу $A(r, I)$ и $H(r_n, I)$ имеет место

$$\underline{\lim_{h \to 0}} A(r^h, I) \geqslant A(r, I) = \lim_{n \to \infty} A(r_n, I) = H(r_n, I) \geqslant H(r, I). \tag{20}$$

Из (19) и (20) вытекает требуемое равенство.

Итак, площадь в смысле Лебега эквивалентна площади в смысле Гече. Для функции $A(r, l)$ может быть сформулирована теорема, аналогичная теореме 3.

г. Ленинград

Поступило
23 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Tonelli L. Sur la quadrature des surfaces. C. R. Acad. sci., Paris, v. 182, 1926, p. 1198—1200.
2. Tonelli L. Sulla quadrature delle superficie Atti. Accad. Naz. Lincei (6), v. 3, 1926, p. 357—363, 445—450, 633—658.
3. Tonelli L. Su un polinomio d'approssimazione e l'area di una superficie. Atti Accad. Naz. Lincei (6), v. 5, 1927, p. 313—318.
4. Rado T. On the problem of Plateau. Ergebn. Math., Berlin, 1933.
5. Верченко И. Я. О поверхностной мере множеств. Матем. сб., т. 10 (52) : 1, 2, 1942, с. 11—32.
6. Верченко И. Я. Исследования по теории площади поверхностей вида $z = \omega(x, y)$. ДАН СССР, т. 68, № 1, 1949, с. 5—8.
7. Поплавская Г. Я. Эквивалентность различных определений площади непрерывной поверхности $t = f(x, y)$. ДАН СССР, т. 77, № 1, 1951, с. 21—24.
8. Поплавская Г. Я. Об эквивалентности различных определений площади непрерывной поверхности. Матем. сб., т. 30 (72) : 3, 1952, с. 651—668.
9. Rado T. Length and area. New York, 1948.
10. Cesari L. Surface area. Ann. Math. stud., v. 35, 1956.
11. Federer H. On Lebesgue area. Ann. Math., Ser. 2, v. 61. 1955.
12. Костовский А. Н. Квадрируемость непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах. УМЖ, т. 6, № 1, 1954, с. 81—104.
13. Костовский А. Н. Выражение двойным интегралом площади поверхности, заданной в полярных координатах. УМЖ, т. 6, № 4, 1954, с. 398—404.
14. Сакс С. Теория интеграла. М., ИИЛ, 1949.

Р. К. РОМАНОВСКИЙ. ПРИЗНАКИ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - A\frac{\partial z}{\partial y} - B\frac{\partial z}{\partial x} - Cz = f(x, y), \tag{1}$$

$$z\Big|_{\substack{y=0\\ x\geqslant x_0}} = z\Big|_{x=\psi(y)} = 0; \tag{1'}$$

$z(x, y)$, $f(x, y)$ — вектор-функции со значениями в банаховом (комплексном) пространстве E; A, B, C — линейные ограниченные операторы в E; $\psi(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция на полуоси $y \geqslant 0$; $\psi(0) = 0$; $x_0 = \inf\limits_{y\geqslant 0} \psi(y)$; $f(x, y)$ предполагается заданной и непрерывной в области $\Pi \bigcup L$, где $\Pi\{x \geqslant \psi(y),\ y \geqslant 0\}$, L — совокупность точек вида $(\psi(y), t)$, $0 \leqslant t \leqslant y$. Ищутся условия, при которых всякой ограниченной в $\Pi \bigcup L$ правой части $f(x, y)$ отвечает ограниченное там же решение краевой задачи (1)—(1′).

Полученные признаки ограниченности и оценка роста решения обобщают (в сторону достаточности) критерий устойчивости по Ляпунову решений краевой задачи Гурса для уравнения (1), принадлежащий М. А. Рутману (получен для более общего линейного уравнения n-го порядка со „старшим членом“ и „медленно меняющимися“ коэффициентами (см. ДАН СССР, т. 147, № 4, 1962)). Получил дальнейшее развитие метод исследования устойчивости, построенный М. А. Рутманом в указанной выше работе и дополненный автором в связи с изучением устойчивости по Ляпунову решений задачи Коши для уравнения (1) (см. ДАН СССР, т. 163, № 5, 1965). (Работа поступила в журнал „Математика“ 18. X. 1967.)