Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

D. D. Sokolov, On convex surfaces with an indefinite metric,
*Uspekhi Mat. Nauk*, 1978, Volume 33, Issue 4, 227–228

https://www.mathnet.ru/eng/rm3509

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.90
January 16, 2026, 18:27:48

## О ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Д. Д. Соколов

**1.** Как известно, точная верхняя грань гауссовой кривизны на полной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве неотрицательна (теорема Н. В. Ефимова [1]). Оказывается, что сходное неравенство можно получить для поверхностей в трехмерном псевдоевклидовом пространстве $E^3_{(2;\,1)}$, метрика которого имеет вид $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Любопытно, что приводимое ниже доказательство этого неравенства, существенно использующее специфические свойства пространства $E^3_{(2;\,1)}$, оказывается несравненно более простым, чем доказательство теоремы Н. В. Ефимова.

**2.** Поверхность $\Phi$ называется *внешне полной*, если любая предельная (в смысле топологии объемлющего пространства) точка поверхности $\Phi$ принадлежит этой поверхности.

Теорема. *Пусть $\Phi$ — внешне полная $C^2$-поверхность с индефинитной метрикой в пространстве $E^3_{(2;\,1)}$ и $K$ — гауссова кривизна $\Phi$. Тогда*

$$\sup_{\Phi} K \geqslant 0.$$

Доказательство. Наряду с пространством $E^3_{(2;\,1)}$ будем рассматривать евклидово пространство $E^3_*$ с метрикой $ds^2_* = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Пусть $\Delta$ и $K$ — дискриминант и кривизна первой квадратичной формы, индуцированной на поверхности $\Phi$ метрикой пространства $E^3_{(2;\,1)}$, а $\Delta^*$ и $K^*$ — соответствующие величины для метрики поверхности $\Phi^*$, т. е. поверхности $\Phi$, рассмотренной по отношению к $E^3_*$. Тогда [2]

$$(\Delta^*)^2 K^* + K\Delta^2 = 0. \tag{1}$$

Пусть утверждение теоремы неверно и в $E^3_{(2;\,1)}$ существует внешне полная поверхность $\Phi$ с индефинитной метрикой и кривизной $K \leqslant -a^2 < 0$. В силу (1) $K^* > 0$ и поверхность $\Phi$ локально строго выпукла, а так как она является внешне полной, то она выпукла в целом [3]. Следовательно, существует плоскость $\alpha$ с индефинитной метрикой, на которую однозначно проектируется поверхность $\Phi$. Пусть $\Lambda$ — предельный конус поверхности $\Phi$, а $\lambda$ — направляющая этого конуса, лежащая в плоскости $\alpha$. Кривая $\lambda$ выпуклая и поэтому в каждой точке $P$ она имеет левую и правую полукасательные $t_{1P}$ и $t_{2P}$. Пусть $Q_{iP}$ $(i = 1,\ 2)$ — плоскость, проходящая через эти полукасательные и вершину конуса $\Lambda$. В силу индефинитности метрики $\Phi$ либо плоскость $Q_{iP}$ имеет индефинитную метрику и определитель первой квадратичной формы этой плоскости есть $\Delta(Q_{iP}) = -c < 0$, либо плоскость $Q_{iP}$ имеет вырожденную метрику и $\Delta(Q_{iP}) = 0$. В первом случае в силу выпуклости кривой $\lambda$ точка $P$ является граничной точкой некоторого отрезка $\overline{\lambda}$ кривой $\lambda$, для точек $\overline{P}$ которого справедливо неравенство $|\Delta(Q_{i\overline{P}})| > c/2$. Однако в [4] (теоремы 1 и 2) доказано, что такое неравенство невозможно и поэтому во всех точках кривой $\lambda$

$$\Delta(Q_{iP}) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим сферическое изображение $\Omega$ поверхности $\Phi^*$. Пусть $\Gamma$ — граница $\Omega$. Кривая $\Gamma$ является также границей сферического изображения конуса $\Lambda$. Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — две связные компоненты границы сферического изображения изотропного конуса пространства $E^3_{(2;\,1)}$ и $w$ — замкнутая связная область на сфере, ограниченная кривыми $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Из выпуклости поверхности $\Phi$ и индефинитности ее метрики следует, что $\Gamma$ — выпуклая кривая, лежащая вместе с ограниченной ею областью $\Omega$ в области $w$. Из (2) следует, что $\Gamma$ может состоять лишь из (быть может, бесконечного числа) отрезков кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$ и отрезков геодезических, соединяющих точки кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$ (последние соответствуют угловым точкам кривой $\lambda$). Однако, заметив, что область $w$ — дополнение к двум выпуклым областям, ограниченным кривыми $\gamma_1$ и $\gamma_2$, легко показывается, что такой кривой на сфере не существует. Теорема доказана.

Доказанная теорема является обобщением теоремы 2 в [4]; именно, сняты условия выпуклости в целом поверхности Ф и гладкости ее предельного конуса.

3. Пусть теперь Ф — полная в смысле внутренней дефинитной метрики $C^1$-поверхность в $E^3_{(2;\,1)}$. Тогда $\inf\limits_{\Phi} K \leqslant 0$. Действительно, если бы $K \geqslant a^2 > 0$, то поверхность Ф была бы гомеоморфна сфере. Однако таких поверхностей в $E^3_{(2;\,1)}$ не существует [5]. Заметим, однако, что из внутренней полноты Ф еще не следует ее внешняя полнота [2]. Хотя для внешне полных поверхностей с дефинитной метрикой неравенство $\inf\limits_{\Phi} K \leqslant 0$ также, вероятно, имеет место, его доказательство не получено. Для поверхностей в другом трехмерном псевдоевклидовом пространстве $E^3_{(1;\,2)}$ с метрикой $ds^2 = -dx^2 - dy^2 + dz^2$ получаются такие неравенства: а именно, для внешне полных поверхностей с индефинитной метрикой $\inf\limits_{\Phi} K \leqslant 0$, для внутренне полных поверхностей с отрицательно определенной метрикой $\sup\limits_{\Phi} K \geqslant 0$. Действительно, при переходе от пространства $E^3_{(2;\,1)}$ к пространству $E^3_{(1;\,2)}$ кривизна поверхности Ф меняет знак, сохраняя абсолютную величину.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Ефимов, Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны, Матем. сб. **64** (1964), 286—320.

[2] Д. Д. Соколов, О двумерных выпуклых поверхностях с дефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, Труды геометр. семинара, Ин-т научн.-техн. информ. АН **6** (1974), 271—288.

[3] R. Sacksteder, On hypersurfaces with nonnegative sectional curvatures, Amer. J. Math. **82** (1960), 609—630.

[4] Д. Д. Соколов, О строении предельного конуса выпуклой поверхности в псевдоевклидовом пространстве, УМН **30:1** (1975), 261—262.

[5] Д. Д. Соколов, О некоторых свойствах индефинитной метрики, Матем сб. **86** (1971), 3—8.

Поступило в Правление общества 18 ноября 1976 г.