T. Ya. Azizov, Completeness of the system of root vectors of operators in a space with indefinite metric, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21, Issue 1, 66–67

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 1, 66—67

УДК 517.43

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Т. Я. Азизов

1. Рассмотрим задачу о полноте системы корневых векторов линейного пучка $L_0(\lambda) = A_0 + A_1 + \lambda A_2$ в предположениях, что A_0, A_2 — обратимые самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $A_0 = J \mid A_0 \mid$ — полярное разложение оператора A_0, $H_1 = \mid A_0 \mid^{-1/2} A_2 \mid A_0 \mid^{-1/2}$ — оператор конечного порядка ($H_1 \in \mathfrak{S}_p$), $S_1 = \mid A_0 \mid^{-1/2} \times A_1 \mid A_0 \mid^{-1/2}$ — вполне непрерывный оператор ($S_1 \in \mathfrak{S}_\infty$) и отрицательный спектр ($\sigma(A_2) \cap (-\infty, 0)$) оператора A_2 состоит из $\varkappa_0 < \infty$ (с учетом кратности) собственных значений. С помощью стандартных преобразований (в случае обратимости оператора $A_0 + A_2$) приходим к вопросу о полноте системы корневых векторов оператора

$$A = H(I + S), \tag{1}$$

где $H = JH_1$, а $S = (I + JS_1)^{-1} - I$. Впервые операторы вида (1) детально изучал при $H = H^*$ М. В. Келдыш (см. [1, теорема V.8.1] и там же о дальнейшем развитии этого результата другими авторами), что в нашем случае эквивалентно коммутированию операторов J и A_2. Если же J и A_2 не коммутируют, то в (1) оператор H ($\neq H^*$) является лишь дефинизируемым [1]) по отношению к J-метрике $[x, y] = (Jx, y)$, а при $\varkappa_0 = 0$ J-положительным, т. е. $[Hx, x] > 0$ при $x \neq \theta$. Согласно теореме Ю. П. Гинзбурга (см. [2, теорема II.3.27]) спектр непрерывного J-положительного оператора H вещественен. Так как при определенных условиях («регулярность J-спектральной функции») оператор H подобен самосопряженному, то сказанное стимулирует исследование вопроса о полноте корневых векторов оператора (1) с J-положительным H и обобщение этой ситуации.

2. В отличие от случая $H = H^* \in \mathfrak{S}_p$ при J-положительном H оператор A может оказаться вольтерровым. Приведем соответствующий пример.

Пусть $\mathfrak{H} = L_2(0, 1) \oplus L_2(0, 1)$. Введем в $\mathfrak{H}$ J-метрику с помощью оператора J: $J(x_1 \oplus x_2) = x_2 \oplus x_1$. Пусть H_2 — оператор интегрирования в $L_2(0, 1)$: $(H_2 f)(t) = 2i\int_0^t f(s)\,ds$, а H: $H(x_1 \oplus x_2) = \mid H_2 \mid^{2\alpha/1+\alpha} x_2 \oplus \mid H_2 \mid^{-2/1+\alpha} x_1$, где $\alpha > 3$. В качестве S возьмем оператор S: $S(x_1 \oplus x_2) = S_2 x_2 \oplus \theta$, где $S_2 = -i \mid H_2 \mid^{-2/1+\alpha} (H_2 + H_2^*)$. Операторы H и S ядерные, причем H J-положителен, а $A = H(I + S)$ вольтерров.

Отметим, что указанный пример является ответом на вопрос А. С. Маркуса. Кроме того, в упомянутой выше теореме Келдыша при $H = H^*$ указывается поведение спектра $\sigma(A)$ оператора A (см. ниже теорему 1). В случае J-положительного H можно так подобрать S, чтобы спектр оператора A был как угодно «размазан» в окрестности нуля.

3. Приведем достаточные условия, при которых оператор вида (1) имеет полную систему корневых векторов, замкнутую линейную оболочку которых обозначим символом $\mathfrak{E}(A)$.

Анализ доказательства теоремы Келдыша, приведенного в [1], показывает, что справедлива

Теорема 1. *Пусть $A = H(I + S)$, $\lambda = 0$ — точка непрерывного спектра оператора A ($0 \in \sigma_c(A)$), $S \in \mathfrak{S}_\infty$, а оператор H удовлетворяет следующим условиям: а) $H \in \mathfrak{S}_p$; б) существует конечное число лучей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, выходящих из начала координат и образующих с положительной полуосью углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ соответственно, $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < 2\pi$, и таких, что в объединении любых замкнутых углов $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, расположенных строго между лучами P_1 и P_2, P_2 и P_3, ..., P_n и P_1 соответственно, находится не более конечного числа собственных* значений оператора H; в) $\| (I - \lambda H)^{-1} x \| \to 0$ при всех $x \in \mathfrak{H}$, $\lambda \to \infty$ и $\lambda \in \bigcup_1^n \Lambda_j$. *Тогда $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$ и $\sigma(A)$ удовлетворяет требованиям п. б).*

Условиям б) и в) теоремы 1 удовлетворяют, например, дефинизируемые операторы с регулярной в нуле J-спектральной функцией, J-самосопряженные операторы класса $\mathscr{K}(\mathscr{H})$, а также условие в) выполнено для J-нормальных операторов класса $\mathscr{K}(\mathscr{H})$, для которых выполнено условие б) и, в частности, сказанное справедливо для π-самосопряжен-

---

[1]) «Индефинитную» терминологию и соответствующие результаты см., например, в [2].

ных и π-нормальных операторов. Утверждение для π-нормальных операторов является ключевым при доказательстве формулируемой ниже теоремы 2. Прежде чем ее привести, обозначим символом $\tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ множество таких непрерывных операторов A, для которых $\sigma(A)\setminus\setminus\{0\}$ — множество их нормальных собственных значений. Кроме того, непрерывный оператор B, действующий в G-пространстве, назовем G-нормальным, если его G-сопряженный B^c ограничен, задан на всем пространстве и $B^cB = BB^c$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — $G^{(\varkappa)}$-пространство, $A = H(I+S)$, где $H \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ — $G^{(\varkappa)}$-нормальный оператор, удовлетворяющий условию б) теоремы 1 и $\sum_j |\lambda_j(H)|^p < \infty$ ($\{\lambda_j(H)\}$ — множество собственных значений оператора H), а S — такой непрерывный оператор, что его $|G^{(\varkappa)}|^{1/2}$-сопряженный вполне непрерывен. Тогда при $0 \in \sigma_c(A)$ линеал $G^{(\varkappa)}\mathfrak{C}(A)$ плотен в $\mathfrak{H}$ и $\sigma(A)$ удовлетворяет условию б) теоремы 1. Если кроме того $H = FG^{(\varkappa)}$, где F — непрерывный оператор, то $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{H}$.*

Отметим, что условие б) выполнено, коль скоро H — $G^{(\varkappa)}$-самосопряженный оператор. При этом $n = 2$, $P_1 = [0, \infty)$, $P_2 = (-\infty, 0]$, т. е. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$. Требование $\sum_j |\lambda_j(H)|^p < \infty$ справедливо, например, для любого оператора $H \in \mathfrak{S}_p$. Условие полной непрерывности оператора $|G^{(\varkappa)}|^{1/2}$-сопряженного с оператором S может быть заменено требованием полной непрерывности оператора S^cS. Если в условиях теоремы 2 $G^{(\varkappa)} = \pm I$, то H — нормальный оператор конечного порядка, а $S \in \mathfrak{S}_\infty$ и мы приходим к некоторому уточнению известного результата.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Пусть $\mathfrak{H}$ — J-пространство, $A = H(I+S) = (I+S_0)H$, где $H \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ — дефинизируемый оператор, $\sum_j |\lambda_j(H)|^p < \infty$, S, S_0 — непрерывные операторы, $S_0^*JS \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда при $0 \in \sigma_c(A)$ имеем $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{H}$ и сколь мало ни было бы $\varepsilon > 0$, все собственные значения оператора A, за исключением, быть может, конечного числа, лежат в углах $-\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon$, $\pi - \varepsilon < \arg\lambda < \pi + \varepsilon$. Если $A \in \mathfrak{S}_p$,* то *$\mathfrak{C}(JA) = \mathfrak{H}$ и если $\mathfrak{H}$ не является при этом пространством Понтрягина, то все собственные значения оператора JA, за исключением, быть может, конечного числа, лежат в одном из названных выше углов.*

Для доказательства следствия достаточно положить $G^{(\varkappa)} = JH$, $F = J$ и воспользоваться теоремой 2. При этом учесть, что условие $S_0^*JS \in \mathfrak{S}_\infty$ влечет полную непрерывность оператора S^cS, где S^c — JH-сопряженный с S оператор.

4. Доказательство приводимых ниже теорем 3 и 4 опирается на соответствующий результат о полноте системы корневых векторов дефинизируемых операторов ([2, теорема IV.2.15]).

Теорема 3. *Пусть A — J-самосопряженный оператор, $A = H(I+S)$, где H — дефинизируемый оператор и $H, S \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty$. Тогда коль скоро* $\operatorname{Ker} A = \{\theta\}$, *то A — дефинизируемый оператор, $A \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty$ и $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{H}$.*

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — J-пространство, не являющееся пространством Понтрягина, $A = H(I+S)$, где H — дефинизируемый вполне непрерывный оператор, $I + S$ — ограниченный и ограничено обратимый J-самосопряженный оператор. Тогда при* $\operatorname{Ker} A = \{\theta\}$ *оператор A дефинизируем относительно индефинитной метрики $[(I+S)\cdot, \cdot]$ и $\mathfrak{C}(A) = \mathfrak{H}$.*

В теоремах 3 и 4 мы не описывали положение спектра на плоскости поскольку известно, что невещественный спектр дефинизируемого оператора может состоять разве лишь из конечного числа точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. **2.** *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1968.

НИИ математики
Воронежского государственного
университета

Поступило в редакцию
22 марта 1985 г.