С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина, Проблема Варинга с натуральными числами специального вида, *Чебышевский сб.*, 2014, том 15, выпуск 3, 31–47

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 3 (2014)

УДК 511.34

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА С НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

С. А. Гриценко (г. Москва), Н. Н. Мотькина (г. Белгород)

Аннотация

Работа является продолжением исследований авторов классических аддитивных проблем с переменными, принадлежащими некоторому специальному множеству. Ранее были рассмотрены задачи Гольдбаха, Хуа Ло–Кена, Лагранжа. Для числа решений этих проблем с числами специального вида получены асимптотические формулы. Задачи Гольдбаха, Хуа Ло–Кена — задачи с простыми числами. Они являются классическими проблеми теории чисел о числе решений уравнения $p_1^n+p_2^n+\cdots+p_k^n=N$ в простых числах $p_1,\ p_2,\ldots,p_k$, где $k\geqslant 2$ и $n\geqslant 1$ — натуральные числа. При $k=3$, $n=1$ — задача Гольдбаха, $k=5$, $n=2$ — задача Хуа Ло–Кена. Авторы рассматривали эти задачи при условии, что на простые числа p_i, $i=1,2,\ldots,k$, наложены дополнительные ограничения вида $a<\{\eta p_i^n\}<b$, где a и b — произвольные действительные числа, $0\leqslant a<b\leqslant 1$, η — квадратичная иррациональность. При выводе асимптотических формул использовали круговой метод Харди–Литтлвуда–Виноградова. Полученные формулы отличаются от асимптотических формул классических задач в простых числах без ограничений тем, что в главных членах появляются ряды специального вида:

$$\sigma_k(N,a,b)=\sum_{|m|<\infty}e^{2\pi im(\eta N-0{,}5k(a+b))}\frac{\sin^k\pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

Изучение поведения этих рядов представляет собой отдельную проблему, которая также исследована авторами. Задача Лагранжа — задача о представлении натурального числа в виде суммы четырех квадратов целых чисел: $l_1^2+l_2^2+l_3^2+l_4^2=N$. Авторами рассмотрен вариант задачи Лагранжа с целыми числами l_i, $i=1,2,3,4$, удовлетворяющими условию $a<\{\eta l_i\}<b$. При выводе асимптотической формулы в задаче Лагранжа авторы, в основном, следовали схеме Клоостермана. В этой задаче в главном члене ряда вида $\sigma_k(N,a,b)$ не возникает. Проблема Варинга — это задача о представлении любого натурального N суммой $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n=N$,

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — натуральные числа. В данной работе решается вариант проблемы Варинга с натуральными числами x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, такими, что $a \leqslant \{\eta x_i^n\} < b$, где η — алгебраическое иррациональное число. Здесь в главном члене появляется ряд $\sigma_k(N, a, b)$, как и в задачах Гольдбаха и Хуа Ло–Кена с простыми числами, удовлетворяющими условию $a < \{\eta p_i^n\} < b$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Основным результатом работы является получение асимптотической формулы для числа решений $J(N)$ проблемы Варинга с числами специального вида:

$$J(N) = I(N)\sigma_k(N, a, b) + O(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{c}{n^3 \log n}}),$$

где $I(N)$ — число решений классической проблемы Варинга в произвольных натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $c = c(\eta) > 0$, $n \geqslant 3$,

$$k \geqslant k_0 = \begin{cases} 2^n + 1, & \text{если } 3 \leqslant n \leqslant 10, \\ 2[n^2(2\log n + \log\log n + 5)], & \text{если } n > 10. \end{cases}$$

Ключевые слова: проблема Варинга, аддитивные задачи, числа специального вида, число решений, асимптотическая формула, квадратичная иррациональность, алгебраическое иррациональное число.

Библиография: 20 названий.

WARING'S PROBLEM

INVOLVING NATURAL NUMBERS OF A SPECIAL TYPE

S. A. Gritsenko (Moscow), N. N. Motkina (Belgorod)

Abstract

In 2008–2011, we solved several well–known additive problems such that Ternary Goldbach's Problem, Hua Loo Keng's Problem, Lagrange's Problem with restriction on the set of variables. Asymptotic formulas were obtained for these problems. The main terms of our formulas differ from ones of the corresponding classical problems.

In the main terms the series of the form

$$\sigma_k(N, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 0,5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

appear.

These series were investigated by the authors.

Suppose that $k \geqslant 2$ and $n \geqslant 1$ are naturals. Consider the equation

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N \tag{1}$$

in natural numbers $x_1, x_2, \ldots, x_k$. The question on the number of solutions of the equation (1) is Waring's problem. Let η be the irrational algebraic number, $n \geqslant 3$,

$$k \geqslant k_0 = \begin{cases} 2^n + 1, & \text{if } 3 \leqslant n \leqslant 10, \\ 2[n^2(2\log n + \log\log n + 5)], & \text{if } n > 10. \end{cases}$$

In this report we represent the variant of Waring's Problem involving natural numbers such that $a \leqslant \{\eta x_i^n\} < b$, where a and b are arbitrary real numbers of the interval $[0,1)$.

Let $J(N)$ be the number of solutions of (1) in natural numbers of a special type, and $I(N)$ be the number of solutions of (1) in arbitrary natural numbers. Then the equality holds

$$J(N) \sim I(N)\sigma_k(N, a, b).$$

The series $\sigma_k(N, a, b)$ is presented in the main term of the asymptotic formula in this problem as well as in Goldbach's Problem, Hua Loo Keng's Problem.

Keywords: Waring's Problem, additive problems, numbers of a special type, number of solutions, asymptotic formula, quadratic irrationality, irrational algebraic number.

Bibliography: 20 titles.

1. Введение

Данная работа является продолжением исследований авторов аддитивных задач с числами из специальных множеств.

Для числа решений $I_{3,1}(N)$ *задачи Гольдбаха* о представимости нечетного натурального N в виде суммы трех простых чисел:

$$p_1 + p_2 + p_3 = N$$

в 1937 г. И.М. Виноградов получил асимптотическую формулу [1], а именно доказал, что:

$$I_{3,1}(N) \sim \frac{N^2}{2(\log N)^3} \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right).$$

В 1938 г. Хуа Ло–Кен доказал [2], что достаточно большое натуральное N, $N \equiv 5 \pmod{24}$, представимо суммой квадратов пяти простых чисел:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = N$$

(*задача Хуа Ло–Кена*). Для числа представлений $I_{5,2}(N)$ Хуа показал [3], что

$$I_{5,2}(N) \asymp \frac{N^{3/2}}{(\log N)^5}.$$

В 1770 г. Ж. Лагранж доказал, что каждое натуральное число есть сумма не более четырех квадратов натуральных чисел:

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N$$

(*задача Лагранжа*). Для числа решений $I_{4,2}(N)$ задачи Лагранжа известно, что [4]

$$I_{4,2}(N) = \pi^2 N \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q \\ (a,q)=1}} S_{a,q}^4 e^{-2\pi i N a/q} + O(N^{17/18+\varepsilon}),$$

где

$$S_{a,q} = \sum_{j=1}^{q} e^{2\pi i a j^2/q}.$$

Пусть η — квадратичная иррациональность, a и b — произвольные действительные числа, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Ранее нами получены следующие результаты.

Теорема 1. *[5] Для числа решений $J_{3,1}(N)$ задачи Гольдбаха с простыми p_i, $a < \{\eta p_i\} < b$, $i = 1, 2, 3$, при любом фиксированном положительном C справедливо равенство*

$$J_{3,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma_3(N, a, b) + O(N^2 \log^{-C} N),$$

где

$$\sigma_3(N, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1{,}5(a+b))} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}.$$

Теорема 2. *[6] Пусть $J_{5,2}(N)$ — число решений задачи Хуа Ло–Кена с простыми числами p_i, $a < \{\eta p_i^2\} < b$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Для достаточно большого $N \equiv 5 \pmod{24}$ справедлива формула*

$$J_{5,2}(N) = I_{5,2}(N)\sigma_5(N, a, b) + O(N^{3/2 - 0{,}00002}),$$

где

$$\sigma_5(N, a, b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2{,}5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}.$$

Теорема 3. *[7] Число решений $J_{4,2}(N)$ задачи Лагранжа в целых числах l_i, $a < \{\eta l_i\} < b$, $i = 1, 2, 3, 4$, для любого положительного малого ε выражается формулой*

$$J_{4,2}(N) = (b-a)^4 I_{4,2}(N) + O(N^{0{,}9+\varepsilon}).$$

Полученные нами в теоремах 1 и 2 формулы отличаются от асимптотических формул классических задач Гольдбаха и Хуа Ло–Кена в простых числах без ограничений. У нас в главных членах появляются ряды $\sigma_3(N,a,b)$, $\sigma_5(N,a,b)$ специального вида. Изучение поведения этих рядов представляет собой отдельную проблему, которая исследуется авторами в [8].

В данной работе рассмотрена *проблема Варинга*:

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N \tag{2}$$

с натуральными числами $x_1, x_2, \ldots, x_k$ специального вида.

Первое общее решение проблемы Варинга в 1909 г. дано Д. Гильбертом [9]. Он доказал, что при любом целом $n \geqslant 4$ существует $k = k(n)$, для которого число решений уравнения (2) положительно при любом $N \geqslant 1$.

В 1921 г. Г. Харди и Дж. Литтлвуд [10], применив свой круговой метод [11]–[14], получили асимптотическую формулу для числа решений проблемы Варинга при k порядка $n2^{n-1}$.

В 1924 г. И. М. Виноградов усовершенствовал рассуждения Харди и Литтлвуда [15]. Он доказал, что асимптотическая формула Харди–Литтлвуда для числа решений проблемы Варинга справедлива при k порядка $n^2 \log n$, и уравнение (2) разрешимо для всех достаточно больших N при числе слагаемых k порядка $n \log n$.

Нами получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть η — алгебраическое число степени $s \geqslant 2$, a и b — произвольные действительные числа, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Пусть $n \geqslant 3$, $k \geqslant k_0$, где*

$$k_0 = \begin{cases} 2^n + 1, & \text{если } 3 \leqslant n \leqslant 10, \\ 2[n^2(2\log n + \log\log n + 5)], & \text{если } n > 10. \end{cases}$$

Тогда для числа решений $J(N)$ проблемы Варинга в натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$ таких, что $a \leqslant \{\eta x_j^n\} < b$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, справедлива асимптотическая формула.

$$J(N) = I(N)\sigma(N,a,b) + O\left(N^{\frac{k}{n} - 1 - \frac{c}{n^3 \log n}}\right),$$

где $I(N)$ — число решений уравнения (2) в произвольных натуральных числах $x_1, x_2, \ldots, x_k$,

$$\sigma(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

Положительная постоянная c зависит только от η.

Для $I(N)$ известно [16], что при $k \geqslant cn^2 \log n$,

$$I(N) \sim \frac{(\Gamma(1 + 1/n))^k}{\Gamma(k/n)} N^{k/n - 1}.$$

Последовательность натуральных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant \{\eta x^n\} < b$ имеет плотность $(b-a)$. Естественно предположить, что

$$J(N) \sim (b-a)^k I(N).$$

Однако, это предположение не верно. Действительно, возможно, что

$$b - a \leqslant \frac{1}{2k}.$$

При $a = 0$, $\{\eta x_j^n\} < b$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ имеем

$$\{\eta x_1^n\} + \{\eta x_2^n\} + \ldots + \{\eta x_k^n\} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Тогда из равенства

$$\eta x_1^n + \eta x_2^n + \ldots + \eta x_k^n = \eta N$$

следует, что

$$\{\eta x_1^n + \eta x_2^n + \ldots + \eta x_k^n\} = \{\eta N\},$$

то есть

$$\{\eta x_1^n\} + \{\eta x_2^n\} + \ldots + \{\eta x_k^n\} = \{\eta N\}. \tag{4}$$

Но возможно, что

$$\{\eta N\} > \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Из (3)–(5) имеем, что $J(N) = 0$. Приходим к противоречию с предположением о том, что

$$J(N) \sim (b-a)^k I(N),$$

поскольку

$$b^k I(N) \gg N^{k/n-1}.$$

Таким образом, число решений $J(N)$ рассматриваемой задачи связано с числом решений $I(N)$ классической задачи так, что в главном члене появляется ряд $\sigma(N, a, b)$ того же типа, что и в теоремах 1, 2.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (Дирихле). *Пусть $\tau \geqslant 1$, α — вещественное число. Тогда существуют целые взаимно простые числа a и q, $1 \leqslant q \leqslant \tau$, такие, что*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Доказательство см., например, в [16], с. 158.

Лемма 2 (Лиувилль). *Для любого действительного алгебраического числа α степени n можно подобрать положительное c, зависящее только от α, такое, что для всех рациональных чисел a/b $(a/b \neq \alpha)$ будет иметь место неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{c}{b^n}.$$

Доказательство см., например, в [17], с. 264.

Лемма 3. *При натуральном $N \geqslant 2$ справедливо равенство*

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n} + O(r(x)),$$

где

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}}.$$

Имеем разложение функции $r(x)$ в ряд Фурье

$$r(x) = \sum_{0<|m|\leqslant N \log N} c_m e^{2\pi imx} + O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

с коэффициентами $c_m \ll \frac{\log N}{N} e^{-|m|/N}$.

Доказательство см., например, в [18], с. 473, с. 660, с. 668.

Лемма 4. *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 \leqslant a < q \leqslant \tau, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Пусть η — алгебраическое число степени $s \geqslant 2$, m — натуральное число, $m \leqslant 2M$. Тогда существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left|\alpha + \eta m - \frac{A}{Q}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\tau} qQ},$$

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leqslant Q \leqslant 2\sqrt{\tau} q,$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$.

Доказательство. В силу теоремы Дирихле существуют целые числа A_1 и Q_1 такие, что

$$\left|\eta - \frac{A_1}{Q_1}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\tau} Q_1}, \quad (A_1, Q_1) = 1, \quad 1 \leqslant Q_1 \leqslant \sqrt{\tau}. \tag{6}$$

По условию леммы 4

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad (a,q)=1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau. \tag{7}$$

Тогда из теоремы Дирихле следует, что существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left|\alpha + \eta m - \frac{A}{Q}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ}, \quad 1 \leqslant Q \leqslant 2\sqrt{\tau}q. \tag{8}$$

Докажем, что

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leqslant Q \leqslant 2\sqrt{\tau}q,$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$.

Из неравенства (6) имеем

$$\left|\eta m - \frac{A_1 m}{Q_1}\right| \leqslant \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_1}.$$

Пусть

$$\frac{A_1 m}{Q_1} = \frac{A_2}{Q_2}, \quad (A_2, Q_2) = 1, \quad Q_2 \leqslant Q_1 \leqslant \sqrt{\tau},$$

тогда

$$\left|\eta m - \frac{A_2}{Q_2}\right| \leqslant \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2}. \tag{9}$$

Из (7) и (9) следует, что

$$\left|\alpha + \eta m - \frac{aQ_2 + qA_2}{qQ_2}\right| \leqslant \frac{1}{q\tau} + \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2}.$$

Поскольку $Q_2 \leqslant \sqrt{\tau}$, то

$$\frac{1}{q\tau} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\tau}Q_2}, \quad \frac{1}{q\tau} + \frac{m}{\sqrt{\tau}Q_2} \leqslant \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2},$$

и

$$\left|\alpha + \eta m - \frac{A_3}{Q_3}\right| \leqslant \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2},$$

где

$$\frac{A_3}{Q_3} = \frac{aQ_2 + qA_2}{qQ_2}, \quad (A_3, Q_3) = 1.$$

Пусть в приближении (8) числа $\alpha + \eta m$ рациональной дробью A/Q сначала $Q \neq Q_3$. Тогда

$$\frac{1}{QQ_3} \leqslant \left|\frac{A}{Q} - \frac{A_3}{Q_3}\right| = \left|\left(\frac{A}{Q} - \alpha - \eta m\right) - \left(\frac{A_3}{Q_3} - \alpha - \eta m\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ} + \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2}. \tag{10}$$

Поскольку $Q_3 \leqslant Q_2 q \leqslant q\sqrt{\tau}$, из (10) имеем

$$\frac{1}{QQ_3} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ} + \frac{2m}{\sqrt{\tau}Q_2} \leqslant \frac{1}{2QQ_3} + \frac{2mq}{\sqrt{\tau}Q_3},$$

поэтому

$$Q \geqslant \frac{\sqrt{\tau}}{4mq}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда в неравенстве (8) Q совпадает с Q_3. Пусть $\delta|(aQ_2+qA_2, qQ_2)$, тогда $\delta|(aqQ_2+q^2A_2, q^2Q_2)$, следовательно, $\delta|(q^2A_2, q^2Q_2) = q^2$, откуда $\delta \leqslant q^2$. Тогда имеем:

$$Q_3 \geqslant \frac{Q_2}{q}.$$

Кроме того

$$Q_2 \geqslant \frac{Q_1}{m},$$

значит,

$$Q_3 \geqslant \frac{Q_1}{mq}.$$

По теореме Лиувилля:

$$\frac{c_0}{Q_1^s} \leqslant \left|\eta - \frac{A_1}{Q_1}\right| \leqslant \frac{1}{Q_1\sqrt{\tau}},$$

где $c_0 = c_0(\eta) > 0$. Тогда имеем

$$Q_1 \geqslant (c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}, \quad Q = Q_3 \geqslant \frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{mq}.$$

Мы доказали, что существуют целые взаимно простые числа A и Q такие, что

$$\left|\alpha + \eta m - \frac{A}{Q}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\tau}qQ},$$

при

$$\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{8Mq} \leqslant \min\left(\frac{(c_0\sqrt{\tau})^{\frac{1}{s-1}}}{mq}, \frac{\sqrt{\tau}}{4m}\right) \leqslant Q \leqslant 2\sqrt{\tau}q.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $f(x) = \alpha_{n+1}x^{n+1} + \ldots + \alpha_1 x$, α_j — вещественные числа.*

$$\alpha_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant P^{n+1}, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Тогда

$$\left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant c_1(n)P\Delta,$$

где

$$\Delta = \left(\min\left(P, \frac{P^{n+1}}{q}, q\right)\right)^{-\frac{1}{16n^2\log n}},$$

$c_1(n)$ — *положительная константа.*

Доказательство см., например, в [16], с. 198.

Лемма 6. *Пусть* $1 \leqslant j \leqslant l$, ε — *произвольное положительное число,*

$$f(\alpha) = \sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i\alpha m^l}.$$

Тогда

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^{2^j} d\alpha \ll N^{2^j - j + \varepsilon}.$$

Доказательство см., например, в [19], с. 20–21.

Лемма 7. *Пусть* $b \geqslant b_0$, $b_0 = 2[l^2(2\log l + \log\log l + 4)]$, l — *натуральное число, большее* 10,

$$S(\alpha) = \sum_{x=1}^{a} e^{2\pi i\alpha x^l}.$$

Тогда имеем

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^b d\alpha \ll a^{b_0 - l}.$$

Доказательство см., например, в [20], с. 84–85.

3. Доказательство теоремы 4

1. Определим функцию $\psi_0(x)$:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant x < b, \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant x < a \text{ или } b \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом 1 на всю числовую ось. Пусть

$$S_0(\alpha) = \sum_{x\leqslant P} \psi_0(\eta x^n) e^{2\pi i\alpha x^n},$$

где $P = N^{1/n}$. Тогда число решений уравнения

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = N$$

в натуральных числах x_j, удовлетворяющих условию $a \leqslant \{\eta x_j^n\} < b$, $j = 1, 2, \ldots, k$, равно

$$J(N) = \int_0^1 S_0^k(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Поскольку

$$\psi_0(x) = b - a + \rho(x-a) - \rho(x-b),$$

тогда в силу леммы 3

$$\psi_0(\eta x^n) = \sum_{|m| \leqslant M} \frac{\sin \pi(b-a)m}{\pi m} e^{-\pi i m(a+b)} e^{2\pi i m \eta x^n} +$$

$$+ O(r(\eta x^n - a)) + O(r(\eta x^n - b)),$$

где

$$r(x) = \sum_{0 < |m| \leqslant M \log M} c_m e^{2\pi i m x} + O\left(\frac{\log M}{M}\right).$$

Отсюда получаем

$$S_0(\alpha) = \sum_{|m| \leqslant M} \frac{\sin \pi(b-a)m}{\pi m} e^{-\pi i m(a+b)} S(\alpha + \eta m) +$$

$$+ O\left(\sum_{x \leqslant P} r(\eta x^n - a)\right) + O\left(\sum_{x \leqslant P} r(\eta x^n - b)\right),$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i \alpha x^n}.$$

Пусть d любое из чисел a, b. Тогда

$$\sum_{x \leqslant P} r(\eta x^n - d) = \sum_{x \leqslant P} \sum_{0 < |m| \leqslant M \log M} c_m e^{2\pi i m(\eta x^n - d)} + O\left(P \frac{\log M}{M}\right).$$

Оценим

$$R_1 = \sum_{x \leqslant P} \sum_{0 < |m| \leqslant M \log M} c_m e^{2\pi i m(\eta x^n - d)}.$$

Применим неравенство Коши и воспользуемся тем, что

$$c_m \ll \frac{\log M}{M},$$

имеем:

$$R_1^2 \ll P^2 \sum_{0<|m|\leqslant M\log M} |c_m|^2 + P \sum_{0<m_1<m_2\leqslant M\log M} |c_{m_1}||c_{m_2}|\left|\sum_{x\leqslant P} e^{2\pi i(m_2-m_1)(\eta x^n-d)}\right| \ll$$

$$\ll P^2\frac{\log^3 M}{M} + P\frac{\log^2 M}{M^2} \sum_{0<m_1<m_2\leqslant M\log M} |S(\eta(m_2-m_1))|.$$

Пусть

$$\left|\eta(m_2-m_1)-\frac{A}{Q}\right| \leqslant \frac{1}{Q^2}, \quad (A,Q)=1, \quad Q\leqslant P^{n-1}.$$

Оценим сумму $|S(\eta(m_2-m_1))|$ по лемме 5. Пусть в лемме 4

$$\alpha=0, \quad q=1, \quad a=0, \quad \theta=0, \quad m=m_2-m_1,$$

$$\sqrt{\tau}=P^{n-1}, \quad M=P^{\frac{1}{8}\frac{n-1}{s-1}}.$$

Согласно лемме 4 получим

$$P^{\frac{7}{8}\frac{n-1}{s-1}} \ll Q \ll P^{n-1}.$$

Тогда из леммы 5 имеем

$$|S(\eta(m_2-m_1))| \ll P^{1-\frac{c_1}{n^2\log n}},$$

где $c_1=c_1(\eta)>0$.

Получаем

$$R_1 \ll P^{1-\frac{c_2}{n^2\log n}}, \quad c_2=c_2(\eta)>0.$$

В результате

$$S_0(\alpha)=\sum_{|m|\leqslant M}\frac{\sin\pi(b-a)m}{\pi m}e^{-\pi i m(a+b)}S(\alpha+\eta m)+O\left(P^{1-\frac{c_2}{n^2\log n}}\right).$$

2. Рассмотрим

$$J(N)=\sum_{|m_1|\leqslant M}\frac{\sin\pi(b-a)m_1}{\pi m_1}e^{-\pi i m_1(a+b)}\int_0^1 S(\alpha+\eta m_1)S_0^{k-1}(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha+$$

$$+O\left(P^{1-\frac{c_2}{n^2\log n}}\int_0^1|S_0(\alpha)|^{k-1}d\alpha\right). \qquad (11)$$

Оценим интеграл

$$\int_0^1|S_0(\alpha)|^{k-1}d\alpha.$$

Пусть $3 \leqslant n \leqslant 10$.

$$\int_0^1 |S_0(\alpha)|^{k-1} d\alpha \leqslant P^{k-2^n-1} \int_0^1 |S_0(\alpha)|^{2^n} d\alpha.$$

В силу леммы 6 имеем

$$\int_0^1 |S_0(\alpha)|^{k-1} d\alpha \ll P^{k-n+\varepsilon-1}.$$

При $n > 10$ по лемме 7 имеем

$$\int_0^1 |S_0(\alpha)|^{k-1} d\alpha \ll P^{k-n-1}.$$

Выбирая в лемме 6

$$\varepsilon = \frac{c_2}{2n^2 \log n},$$

получаем, что при любом $n \geqslant 3$ остаток в формуле (11) будет оценен как:

$$P^{1-\frac{c_2}{n^2 \log n}} \int_0^1 |S_0(\alpha)|^{k-1} d\alpha = O(P^{k-n-\frac{c_3}{n^2 \log n}}),$$

где $c_3 = c_2/2$.

Таким образом получено равенство

$$J(N) = \sum_{|m_1| \leqslant M} \frac{\sin \pi(b-a)m_1}{\pi m_1} e^{-\pi i m_1 (a+b)} \int_0^1 S(\alpha + \eta m_1) S_0^{k-1}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha +$$

$$+ O\left(P^{k-n-\frac{c_3}{n^2 \log n}}\right).$$

3. Далее аналогично получаем, что

$$\int_0^1 S(\alpha + \eta m_1) S_0^{k-1}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha =$$

$$= \sum_{|m_2| \leqslant M} \frac{\sin \pi(b-a)m_2}{\pi m_2} e^{-\pi i m_2 (a+b)} \int_0^1 S(\alpha + \eta m_1) S(\alpha + \eta m_2) S_0^{k-2}(\alpha) e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha +$$

$$+ O\left(P^{1-\frac{c_2}{n^2 \log n}} \int_0^1 |S(\alpha + \eta m_1)| |S_0(\alpha)|^{k-2} d\alpha\right).$$

Воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\int_0^1 |S(\alpha + \eta m_1)| |S_0(\alpha)|^{k-2} d\alpha \ll \int_0^1 |S(\alpha + \eta m_1)|^{k-1} d\alpha + \int_0^1 |S_0(\alpha)|^{k-1} d\alpha \ll$$

$$\ll \int_0^1 |S(\alpha)|^{k-1} d\alpha.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства не превосходит по порядку

$$O\left(P^{k-n+\frac{c_3}{n^2\log n}-1}\right),$$

получаем

$$J(N) = \sum_{|m_1|\leqslant M} \frac{\sin\pi(b-a)m_1}{\pi m_1} e^{-\pi i m_1(a+b)} \sum_{|m_2|\leqslant M} \frac{\sin\pi(b-a)m_2}{\pi m_2} e^{-\pi i m_2(a+b)} \times$$

$$\times \int_0^1 S(\alpha+\eta m_1)S(\alpha+\eta m_2)S_0^{k-2}(\alpha)e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha +$$

$$+O\left(P^{k-n-\frac{c_3}{n^2\log n}}\log P\right).$$

Повторяя эти рассуждения еще $(k-2)$ раза, приходим к формуле

$$J(N) = \sum_{|m_1|\leqslant M} \frac{\sin\pi(b-a)m_1}{\pi m_1} e^{-\pi i m_1(a+b)} \dots \sum_{|m_k|\leqslant M} \frac{\sin\pi(b-a)m_k}{\pi m_k} e^{-\pi i m_k(a+b)} \times$$

$$\times \int_0^1 S(\alpha+\eta m_1)\dots S(\alpha+\eta m_k)e^{-2\pi i\alpha N} d\alpha +$$

$$+O\left(P^{k-n-\frac{c_3}{n^2\log n}}\log^{k-1} P\right).$$

4. При $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = m$ рассмотрим

$$I_1(N) = \sum_{|m|\leqslant M} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} \times$$

$$\times \sum_{x_1\leqslant P} \dots \sum_{x_k\leqslant P} \int_0^1 e^{2\pi i(\alpha+m\eta)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n-N)} d\alpha.$$

Учтем, что подынтегральная функция периодична по x с периодом 1, получим

$$I_1(N) = I(N) \sum_{|m|\leqslant M} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k} e^{2\pi i m(\eta N - k(a+b)/2)} =$$

$$= I(N)\left(\sigma(N,a,b) + O\left(\frac{1}{M^{k-1}}\right)\right).$$

5. Если среди $m_1, m_2, \ldots, m_k$ есть два не равных друг другу числа, то допустим, что $m_1 < m_2$. Рассмотрим

$$I(N, m_1, m_2, \ldots, m_k) = \int_0^1 |S(\alpha+m_1\eta)| \dots |S(\alpha+m_k\eta)| d\alpha,$$

где
$$S(\alpha) = \sum_{x \leqslant P} e^{2\pi i \alpha x^n}.$$

Сделаем замену $t = \alpha + m_1\eta$. Поскольку подынтегральная функция является периодичной по t с периодом 1, интеграл можно рассматривать на промежутке $E = [-1/\tau_1; 1 - 1/\tau_1)$, где $\tau_1 = P^{n-1}$.

По теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами t представимо в виде
$$t = \frac{d}{q} + \frac{\theta}{q\tau_1}, \quad (d, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant \tau_1, \quad |\theta| \leqslant 1. \tag{12}$$

Промежуток интегрирования по t разобьем на два непересекающихся множества: E_1 — «большие» дуги и E_2 — «малые» дуги. На «больших» дугах E_1 в разложении (12) выберем $q \leqslant M$. Тогда $E_2 = E \backslash E_1$.

Имеем
$$I(N, m_1, m_2, \ldots, m_k) = \int_{E_1} F(t)dt + \int_{E_2} F(t)dt,$$
где
$$F(t) = |S(t)||S(t + (m_2 - m_1)\eta)| \ldots |S(t + (m_k - m_1)\eta)|.$$

6. Если t принадлежит множеству E_2, то в силу леммы 5 и выбора
$$M = P^{\frac{1}{8}\frac{n-1}{s-1}}$$
имеем
$$|S(t)| \ll P\left(P^{-\frac{1}{16n^2 \log n}} + M^{-\frac{1}{16n^2 \log n}}\right) \ll P^{1 - \frac{c_4}{n^2 \log n}}, \quad c_4 = c_4(\eta) > 0.$$

7. Пусть t принадлежит множеству E_1. Тогда по лемме 4 существуют взаимно простые числа A и Q такие, что
$$\left|t + \eta m - \frac{A}{Q}\right| \leqslant \frac{1}{Q^2},$$
при
$$\frac{(c_0\sqrt{\tau_1})^{\frac{1}{s-1}}}{8M^2} \leqslant Q \leqslant 2M\sqrt{\tau_1}.$$

По лемме 5 для t, принадлежащих «большим» дугам E_1, имеем
$$|S(t + m\eta)| \ll P\left(P^{-\frac{1}{16n^2 \log n}} + M^{-\frac{1}{8n^2 \log n}}\right) \ll P^{1 - \frac{c_4}{n^2 \log n}}.$$

8. Из рассмотренных оценок получаем
$$I(N, m_1, m_2, \ldots, m_k) \ll \left(\max_{t \in E_1} |S(t + m\eta)| + \max_{t \in E_2} |S(t)|\right) \int_0^1 |S(t)|^{k-1} dt \ll$$

$$\ll P^{k-n-\frac{c_5}{n^2 \log n}} \quad c_5 = c_5(\eta) > 0.$$

Окончательная оценка остатка имеет вид

$$O\left(N^{\frac{k}{n}-1-\frac{c}{n^3 \log n}}\right), \quad c = c(\eta) > 0.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

В данной работе получена асимптотическая формула для проблемы Варинга с числами специального вида. В главном члене появляется ряд специального вида, поведение которого было изучено авторами ранее. Причина появления такого ряда представляет интерес и требует дальнейшего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // ДАН СССР. 1937. Т. 15. С. 169–172.

2. Hua L. K. On the representation of numbers as the sum of powers of primes // Math. Z. 1938. *44*. P. 335–346.

3. Хуа Ло–ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М.: Мир, 1964. 194 с.

4. Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Acta mathematica. 1926. *49*. P. 407–464.

5. Gritsenko S., Motkina N. Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a Special type. Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812.4606 – 25 Dec 2008

6. Gritsenko S., Motkina N. Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type. Режим доступа: http://arXiv.org/abs/0812. 4665 – 26 Dec 2008

7. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. Представление натуральных чисел суммами четырех квадратов целых чисел специального вида // Современная математика и ее приложения. 2010. Т. 67. С. 71–77.

8. Гриценко С.А., Мотькина Н.Н. О вычислении некоторых особых рядов // Чебышевский сборник. 2011. Т.12, вып. 4. С. 85–92

9. D. Hilbert Beweis f*ü*r die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n–ter Potenzen (Waringsches Problem) // Math. Annalen. 1909. *67*. P. 281–300.

10. Hardy G. Collected papers of G. H. Hardy, including joint papers with J. E. Littlewood and others, ed. by a committee appointed by the London Mathematical Society, vol. I. Oxford: Clarenon Press, 1966.

11. Hardy G. H., Littlewood J. E. A new solution of Waring's problem, Quart. J. Math., 48, (1919), 272–293.

12. Hardy G., Littlewood J. Some problems of «Partitio Numerorum»: I A new solution of Waring's problem // Göttingen nachrichten. 1920. P. 33–54.

13. Hardy G., Littlewood J. Some problems of «Partitio Numerorum»: III On the expression of a number as a sum of primes // Acta. Math. 1923. *44*. P. 1–70.

14. Hardy G., Littlewood J. Some problems of «Partitio Numerorum»: V A further contribution to the study of Goldbach's problem // Proc. Lond. Math. Soc. 1923. (2) *22*. P. 46–56.

15. Виноградов И. М. Sur un theoreme general de Waring //Мат. сб. —1922–1924. —Т. 31. —С. 490–507. Рез. на рус. яз.

16. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. —М.: Наука, 1983. 240 с.

17. Бухштаб А. А. Теория чисел. —М.: Просвещение, 1966. —384 с.

18. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. —М.: Высш. шк., 1999. 695 с.

19. Вон Р. Метод Харди–Литтлвуда. —М.: Мир, 1985. 184 с.

20. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980. 160 с.

Финансовый университет при Правительстве РФ, МГУ имени М. В. Ломоносова
Белгородский государственный университет
Получено 09.06.2014