I. N. Baranova, About a group pursuit in L. S. Pontriagin's problem,
Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2008, Issue 1, 27–34

УДК 517.977

И. Н. Баранова

ГРУППОВОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ В ПРИМЕРЕ Л. С. ПОНТРЯГИНА

Рассматривается обобщенный нестационарный пример Л. С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков [1]. Получены достаточные условия поимки группой преследователей одного убегающего. Продолжены исследования [2–6].

Ключевые слова: дифференциальные игры, групповое преследование, поимка, пример Л. С. Понтрягина.

§ 1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i, \; u_i \in V. \tag{1}$$

Закон движения убегающего E —

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + \ldots + a_l(t)y = v, \; v \in V. \tag{2}$$

Здесь $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $a_1, \ldots, a_l$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, $i = 1, \ldots, n$, V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$. При $t = t_0$ заданы начальные позиции преследователей и убегающего:

$$x_i^{(\alpha)}(0) = x_{i\alpha}^0, \quad y^{(\alpha)} = y_\alpha^0, \quad \alpha = 0, \ldots, l-1.$$

Предполагается, что убегающий E не покидает пределы выпуклого множества

$$D = \{y : y \in \mathbb{R}^k, \; (p_j, y) \leqslant 0, \; j = 1, \ldots, r\},$$

где $p_1, \ldots, p_r$ — единичные векторы $\mathbb{R}^k$ такие, что $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$. Цель группы преследователей — поймать убегающего.

Вместо систем (1), (2) будем рассматривать систему

$$\begin{gathered} z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \ldots + a_l(t)z_i = u_i - v, \; u_i, \; v \in V \\ z_i(t_0) = z_{i0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \quad \ldots, \quad z_i^{(l-1)}(t_0) = z_{il-1}^0. \end{gathered} \tag{3}$$

Определение 1. Говорят, что в игре Γ происходит *поимка*, если существуют момент $T > 0$, функции $u_i(t) = u_i(t, z_{i0}^0, \ldots, z_{il-1}^0, v_t(\cdot))$ такие, что $u_i(t) \in V$, и для любой измеримой функции v ($v(t) \in V$, $y(t) \in D$ для всех $t \geqslant t_0$) найдутся момент $\tau \in [0, T]$ и номер q такие, что $x_q(\tau) = y(\tau)$. Здесь $v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [0, t]\}$.

§ 2. Преследование одного убегающего в нестационарном случае

Обозначим через $\varphi_q(t, s)$, $q = 0, 1, \ldots, l-1$, $t \geqslant t_0$ решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1(t)w^{(l-1)} + \ldots + a_l(t)w = 0$$

с начальными условиями

$$w(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad w^{(q-1)}(t_0) = 0, \quad w^{(q)}(t_0) = 1,$$
$$w^{(q+1)}(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad w^{(l-1)}(t_0) = 0.$$

Предположение 1. $\varphi_{l-1}(t, s) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant t_0$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$.

Пусть, далее, $\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_{i0}^0 + \ldots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_{il-1}^0$.

Предположение 2. Существуют функции $\alpha_i \in C[t_0, \infty)$, векторы z_i^0, $z_i^0 \neq 0$ такие, что $\alpha_i(t) > 0$ для всех $t > t_0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha_i(t)\xi_i(t) = z_i^0$.

Обозначим $\alpha(t) = \min\limits_i \alpha_i(t)$,

$$\lambda_i(z_i^0, v) = \sup\{\lambda : \lambda \geqslant 0, \ -\lambda z_i^0 \in V - v\}, \quad \xi_i^1(t) = \alpha_i(t)\xi_i(t),$$
$$f(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t, s)\, ds, \ d = \max\{\|v\|, \ v \in V\}, \ \delta = \inf_t \min_{v\in V} \max_i \lambda(\xi_i^1(t), v).$$

Предположение 3. Функции $\lambda_i(z, v)$ непрерывны во всех точках (z, v) таких, что $\lambda_i(z, v) > 0$.

Предположение 4. Существует $a > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t)f(t) = a.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* $(1) - (4)$, *фазовые ограничения отсутствуют и* $\delta > \frac{n}{a}$. *Тогда существует момент* $T_0 > t_0$ *такой, что для любой допустимой функции* v *найдется номер* $q \in \{1, \ldots, n\}$ *такой, что*

$$1 - \alpha_q(T_0) \int_{t_0}^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0, s)\lambda_q(\xi_q^1(T_0), v(s))\, ds \leqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T > t_0$ — произвольное число, $v(t)$, $t \in [t_0, T]$ — допустимая функция. Определим функции h_i вида

$$h_i(t) = 1 - \alpha_i(t) \int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t,s)\lambda_i(\xi_i^1(T), v(s))\, ds.$$

Функции h_i непрерывны, $h_i(0) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(T) \leqslant n - \alpha(T) \int_{t_0}^{T} \varphi_{l-1}(T,s) \max_i \lambda_i(\xi_i^1(T), v(s))\, ds.$$

Поскольку $\xi_i^1(T) \to z_i^0$ при $T \to \infty$, то существует момент $T_1 > t_0$ такой, что $\inf\limits_v \max\limits_i \lambda(\xi_i^1(t), v) \geqslant \delta$ для всех $t > T_1$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(\xi_i^1(t), v(\tau)) \geqslant \max_i \lambda(\xi_i^1(t), v(\tau)) \geqslant \delta > 0$$

для всех v, τ, $t > T_1$. При $t \to \infty$ $\int\limits_0^t \alpha(t)\varphi_{l-1}(t,s)ds \to a$. Следовательно, $n - \delta \int\limits_0^t \alpha(t)\varphi_{l-1}(t,s)ds \to n - \delta a < 0$ по условию леммы. Поэтому существует момент времени T_0 такой, что $h_j(T) \leqslant 0$ при некотором j. Лемма доказана. □

Пусть, далее,

$$T_0 = \min\left\{ t \geqslant 0 : \inf_v \max_i \alpha_i(t) \int_0^t \varphi_{l-1}(t,s)\lambda(\xi_i^1(t), v(\tau))\, d\tau \geqslant 1 \right\}.$$

В силу леммы $T_0 < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* (1) — (4), *фазовые ограничения отсутствуют и* $\delta > \frac{n}{a}$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(t)$, $t \in [0, T_0]$ — произвольное допустимое управление убегающего, t_1 — наименьший положительный корень функции h вида

$$h(t) = 1 - \alpha_i(t) \int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(T_0,s)\lambda_i(\xi_i^1(T_0), v(s))\, ds.$$

Зададим управления преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \lambda_i(\xi_i^1(T_0), v(t))\xi_i^1(T_0), \quad \tau \in [0, T_0].$$

Считаем, что $\lambda_i(\xi_i^1(T_0), v(\tau)) = 0$ при $\tau \in [t_1, T_0]$. Подставляя u_i в систему (3), получаем

$$\alpha_i(T_0)z_i(T_0) = \xi_i^1(T_0) - \alpha_i(T_0)\int_{t_0}^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0,\tau)\lambda_i(\xi_i^1(T_0), v(\tau))\xi_i^1(T_0)\, d\tau =$$
$$= \xi_i^1(T_0)\left(1 - \alpha_i(T_0)\int_{t_0}^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0,\tau)\lambda_i(\xi_i^1(T_0), v(\tau)\, d\tau)\right).$$

Из леммы следует, что $\alpha_q(T_0)z_q(T_0) = 0$ при некотором q и теорема доказана. $\square$

П р и м е р 1. Система (3) имеет вид

$$\ddot{z}_i - \frac{2}{t}\dot{z}_i = u_i - v,\ \|u_i\| \leqslant 1,\ \|v\| \leqslant 1,\ z_i(t_0) = z_{i0}^0,\ \dot{z}_i(t_0) = z_{i1}^0,\ t_0 > 0.$$

Тогда $\varphi_0(t,s) = 1,\ \varphi_1(t,s) = \frac{t^3}{s^2} - s$,

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t,t_0)z_{i0}^0 + \varphi_1(t,t_0)z_{i1}^0 = z_{i0}^0 - z_{i1}^0 t_0 + \frac{t^3 z_{i1}^0}{t_0^3},$$
$$f(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{t_0^2}{2} + \frac{t^3}{t_0},\ z_i^0 = \frac{z_{i1}^0}{t_0^3}$$

Пусть $\alpha_i(t) = \frac{1}{t^3},\ a = \frac{1}{t_0}$. Считаем, что $z_i^0 \neq 0$. Таким образом, предположения (1) – (4) выполнены.

Утверждение 1. *Пусть фазовые ограничения отсутствуют,* $a\delta > n$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

§ 3. Преследование одного убегающего в полупространстве

В данном пункте будем считать, что $t_0 = 0$, $a_1, \ldots, a_l$ являются постоянными функциями, то есть существуют вещественные числа $a_1, \ldots, a_l$ такие, что $a_j(t) = a_j$ для всех $t \geqslant 0$.

П р е д п о л о ж е н и е 5. Уравнение

$$\lambda^l + a_1\lambda^{l-1} + \ldots + a_l = 0 \tag{4}$$

имеет хотя бы один положительный вещественный корень.

П р е д п о л о ж е н и е 6. Функция $\varphi_{l-1}(t) \equiv \varphi_{l-1}(t,0) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$.

Из предположений (5), (6) следует, что среди корней уравнения (4) с максимальной вещественной частью существует вещественный корень, который обозначим λ_s, а его кратность k_s.

Лемма 2. *Существует* $a > 0$ *такое, что* $\int\limits_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)e^{-\lambda_s t}}{(t+1)^\gamma}\, d\tau \to a > 0$ *при* $t \to \infty$.

Доказательство леммы проводится интегрированием. Обозначим $\eta(t) = \varphi_0(t,0)y_0^0 + \ldots + \varphi_{l-1}(t,0)y_{l-1}^0$, $\xi_i^1(t) = \dfrac{\xi_i(t)e^{-\lambda_s t}}{(t+1)^\gamma}$. Тогда $\eta(t)$ представимо в виде $\eta(t) = e^{\lambda_s t}t^\gamma(y^0 + R(t))$, где $\gamma = k_s - 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0$.

Лемма 3. *Пусть* $r = 1$, *выполнены предположения* (5), (6) *и следующие условия:*

1) $\min\limits_v \max\{\lambda(\xi_1^1(t), v), \ldots, \lambda(\xi_n^1(t), v), (p_1, v)\} > \delta$ *для всех* $t > 0$;

2) $n(d + \delta) - \delta^2 a + \delta(p_1, y^0) < 0$.

Тогда существует момент T_0 *такой, что для любой допустимой функции* v *найдется номер* j, *что* $h_j(T_0) \leqslant 0$, *где*

$$h_i(t) = 1 - e^{-\lambda_s t}\int_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\lambda(\xi_i^1(t), v(\tau))\, d\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции h_i непрерывны, $h_i(0) = 1$ и

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n h_i(t) = n - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda_s t}\int_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\lambda(\xi_j^1(t), v(\tau))\, d\tau = \\ = n - \int_0^t e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\sum_{i=1}^n \lambda(\xi_j^1(t), v(\tau))\, d\tau \leqslant \\ \leqslant n - \int_0^t e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\max_j \lambda(\xi_j^1(t), v(t))\, d\tau.\end{aligned} \tag{5}$$

Пусть

$$\Delta_1(t) = \{\tau | \tau \in [0,t], (p(\tau), v) < \delta\}, \quad \Delta_2(t) = \{\tau | \tau \in [0,t], (p(\tau), v) \geqslant \delta\},$$
$$G_{1,2} = \int_{\Delta_{1,2}(t)} \frac{e^{-\lambda_s t}}{(t+1)^\gamma}\varphi_{l-1}(t-\tau)\, d\tau.$$

Справедливы неравенства

$$\int_0^t e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\max_j \lambda(\xi_j(t), v(t))\,d\tau \geqslant$$
$$\geqslant \int_{\Delta_1(t)} e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\max_j \lambda(\xi_j(t), v(t))\,d\tau \geqslant \tag{6}$$
$$\geqslant \delta\int_{\Delta_1(t)} e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}\,d\tau.$$

Так как $y(t)\in D$ для всех t, то $(p_1, y(t))\leqslant 0$ для всех t. Поэтому $\int\limits_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}e^{-\lambda_s t}(p_1, v(\tau))d\tau \leqslant \mu(t)$, где

$$\mu(t) = -\frac{(p_1,\ \eta(t))e^{-\lambda_s t}}{(t+1)^\gamma}.$$

Имеем

$$\int_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}e^{-\lambda_s t}(p_1, v(\tau))\,d\tau =$$
$$= \int_{\Delta_1(t)} \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}e^{-\lambda_s t}(p_1, v(\tau))\,d\tau + \int_{\Delta_2(t)} \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}e^{-\lambda_s t}(p_1, v(\tau))\,d\tau.$$

Если $\tau\in\Delta_1(t)$, то $(p_1, v(\tau)) < \delta$, но $(p_1, v(\tau))\geqslant -d$. Если $\tau\in\Delta_2(t)$, то $(p_1, v(\tau))\geqslant\delta$. Поэтому

$$G_1 + G_2 = \int_0^t \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}e^{-\lambda_s t}\,d\tau = f(t),$$
$$\int_{\Delta_2(t)} \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}e^{-\lambda_s t}(p_1, v(\tau))\,d\tau \geqslant \delta\int_{\Delta_2(t)} \frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}e^{-\lambda_s t}\,d\tau = \delta G_2,$$
$$\int_{\Delta_1(t)} e^{-\lambda_s t}\frac{\varphi_{l-1}(t-\tau)}{(t+1)^\gamma}(p_1, v(\tau))\,d\tau \geqslant -G_1 d.$$

Следовательно,

$$\delta G_2 - dG_1 \leqslant \mu(t),$$
$$dG_2 + dG_1 = df(t).$$

Из последних двух соотношений следует, что $G_2\leqslant \frac{\mu(t)+df(t)}{\delta+d}$.
Значит,

$$G_1 \geqslant f(t) - \frac{\mu(t)+df(t)}{\delta+d} = \frac{\delta f(t)-\mu(t)}{\delta+d}.$$

Из (5) и (6) следует, что $\sum\limits_{j=1}^{n} h_j(t) \leqslant n - \delta G_1$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(t) \leqslant n - \frac{\delta f(t) - \mu(t)}{\delta + d}\delta \leqslant n - \frac{\delta^2 f(t)}{\delta + d} + \frac{\delta\mu(t)}{\delta + d}.$$

Так как $\mu(t) \to -(p_1, y^0)$ и $f(t) \to a$ при $t \to \infty$, получаем, что

$$n - \frac{\delta^2 f(t)}{\delta + d} + \frac{\delta\mu(t)}{\delta + d} \to n - \frac{\delta^2 a}{\delta + d} + \frac{\delta(p_1, y^0)}{\delta + d} < 0$$

в силу условия леммы. Из последнего соотношения следует, что существуют T и j, для которых справедливо неравенство $h_j(T) \leqslant 0$. Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $r = 1$, *выполнены предположения* (5), (6) *и условия леммы* 3. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Доказательство. Пусть $v(t)$ — произвольное допустимое управление убегающего, t_1 — наименьший положительный корень функции h вида

$$h(t) = 1 - \max_i \int_0^t \frac{\varphi_{l-1}(T_0 - \tau)e^{-\lambda_s T_0}}{(T_0 + 1)^\gamma}\lambda(\xi_j^1(T_0),\ v(\tau))d\tau.$$

Зададим управления преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \lambda_i(\xi_i^1(T_0), v(t))\xi_i^1(T_0),\ t \in [0, T_0].$$

Считаем, что $\lambda_i(\xi_i^1(T_0), v(t)) = 0$ при $t \in [t_1, T_0]$. Подставляя u_i в систему (3) получаем

$$\frac{e^{-\lambda_s T_0} z_i(T_0)}{(T_0 + 1)^\gamma} = \xi_i^1(T_0) - \int_0^{T_0} \frac{\varphi_{l-1}(T_0 - \tau)}{(T_0 + 1)^\gamma} e^{-\lambda_s T_0}\lambda(\xi_i^1(T_0), v(\tau))\xi_i^1(T_0)\, d\tau =$$
$$= \xi_i^1(T_0)\left(1 - \int_0^{T_0} \frac{\varphi_{l-1}(T_0 - \tau)}{(T_0 + 1)^\gamma} e^{-\lambda_s T_0}\lambda(\xi_i^1(T_0), v(\tau)\, d\tau)\right) =$$
$$= \xi_i^1(T_0)\left(1 - \int_0^{t_1} \frac{\varphi_{l-1}(T_0 - \tau)}{(T_0 + 1)^\gamma} e^{-\lambda_s T_0}\lambda(\xi_i^1(T_0), v(\tau)\, d\tau)\right).$$

Из леммы 3 следует, что $z_i(T_0) = 0$ при некотором i. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 192 с.
3. Петров Н. Н. Нестационарный пример Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Проблемы управления и информатики. 2000. №4. С. 18-24.
4. Чикрий А. А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 380 с.
5. Благодатских А. И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2005. Вып. 2. С. 3–22.
6. Баранова И. Н. К примеру Л.С. Понтрягина со многими убегающими // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. №4. С. 27–30.

I. N. Baranova
About a group pursuit in L. S. Pontriagin's problem

The sufficient conditions of catching were derived for the problem of group pursuit in L. S. Pontriagin's problem.

Баранова Ирина Николаевна
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4).
E-mail: ibaranova@udm.ru