Д. Н. Жабин, Учет исторического поведения акций, *Матем. моделирование*, 2003, том 15, номер 12, 75–80

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2003г., том 15, номер 12, стр. 75-80

УЧЕТ ИСТОРИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АКЦИЙ

© Д.Н. Жабин

Томский Политехнический Университет, кафедра ВММФ
634004, Россия, г.Томск, пр.Ленина 30,
e-mail: zhabin@phys.tsu.ru

При моделировании поведения акции наиболее распространенной является модель, в которой акция представляется как случайный процесс с логарифмически-нормальной функцией плотности вероятности. Подобное представление не учитывает возможной чувствительности реальных цен акций к историческим, по крайней мере недавним, котировкам. В данной работе предпринята попытка учета подобной памяти, оставаясь в рамках основных постулатов финансовой математики. Вклад от исторического поведения акции представляется в виде аддитивной добавки в стохастический дифференциал. Наличие зависимости от исторических значений определяется ненулевым характерным временем τ, описывающим «глубину» памяти в прошлое. Размер вклада от прошедшего момента времени описывается весовой функцией.

HISTORICAL SHARE'S BEHAVIOR ACCOUNTING

D.N. Zhabin

Tomsk Polytechnical University,
Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics
634004, Russia, Tomsk, Lenina avenue 30,
e-mail: zhabin@phys.tsu.ru

The models where stock is a lognormal distributed random process are the routine ones. But these models ignore a possible sensitivities of a share's price to the last quotations. In present paper a mathematical model of such kind "memory" accounting is proposed. The model is in concordance with basis postulates of financial mathematics. A contribution of historical stock's behavior is taking into account as additive component in stochastic differential. The effect of the "memory" presence is characterized by time interval τ that defines the size of the "memory" in the past. A size of the contribution from moment passed is described by weight function.

Введение

Известно, что динамика акции описывается случайным процессом [1–4]. Действительно, поведение актива на рынке определяется изменением спроса и предложения на данный актив, макроэкономическими изменениями и даже политическими настроениями. Учет подобных влияний является непростой задачей и для описания подобных сложных систем представляется естественным применение аппарата теории случайных процессов.

В [2] (см. также [5, 6]) для описания изменения актива используется понятие информационного множества, определяющего динамику случайного процесса. Предполагается, что вновь поступившая информация мгновенно отражается на динамике случайного процесса, следовательно, последующие изменения такого случайного процесса зависят только от состояния системы в последний известный момент времени, т.е. случайный процесс является марковским процессом (о свойствах марковских процессов см., например, [7]).

С другой стороны, можно предположить, что изменение котировок актива "помнит" свои предыдущие состояния, а информация не усваивается инвесторами мгновенно (более детальный анализ недостатков представления динамики актива как марковского процесса можно найти, например, в [5, 6]). Естественно ожидать, что подобного рода "память" должна проявляться на динамических свойствах системы.

В настоящей работе предпринята попытка учета короткой (малой по сравнению со временем наблюдения) памяти случайного процесса о своих предыдущих изменениях. Для этого, мы будем предполагать, что изменение состояния информационного множества происходит случайным образом и может быть описано винеровским процессом, однако в динамику актива также дают вклад предыдущие изменения актива во времени. Естественно предположить, что такое влияние убывает достаточно быстро при увеличении промежутка времени, разделяющего настоящие и предыдущие изменения. Другими словами, наибольший вклад в настоящее изменение дают относительно недавние изменения актива. С ростом времени наблюдения эффект памяти должен исчезать, т.к. в данном случае в наблюдаемый ансамбль будут входить слабо коррелированные или совсем не коррелированные изменения случайного процесса. Показано, что учет памяти приводит к модели базового актива с переменной волатильностью (см., например, [8–11]).

Основные положения

Динамика базового актива определяется стохастическим дифференциалом вида (см. также [1-3])

$$dS_t = a(S_t,t)dt + b(S_t,t)dW_t\,. \tag{1}$$

Здесь предполагается, что $a(S_t,t)$ и $b(S_t,t)$ – непрерывные функции, dW_t – винеровский процесс (гауссов процесс с нулевым средним и дисперсией $\overline{[dW]^2} = dt$; здесь и далее чертой сверху будем обозначать операцию усреднения). Наиболее широкое распространение получила модель, предполагающая базовый актив логарифмически–нормально распределенной случайной величиной. Именно это предположение положено в основу при выводе уравнения Блэка-Шолца в оригинальной форме [1,2]. Дальнейшие усовершенствования модели Блэка-Шолца заключаются в выборе более сложного, например стохастического, вида функций $a(S_t,t)$, $b(S_t,t)$ и в попытках учета различных рыночных факторов, например, таких как транзакционные издержки, дискретный хедж и т.д [1–3].

Отметим, что в (1) заложен постулат об отсутствии памяти базового актива, т.к. винеровский процесс – марковский процесс и все последующие изменения процесса зависят только от состояния процесса в последний известный момент времени. С другой стороны, следуя [5,6], можно предположить, что реальные изменения базового актива чувствительны к своим, по крайне мере недавним котировкам, поэтому модели, позволяющие количественно и качественно описать такую зависимость, представляют несомненный интерес.

Чтобы корректно учесть эффект памяти случайного процесса о своих прошлых состояниях, воспользуемся следующими вспомогательными рассуждениями. Во-первых, такого рода память должна зависеть от степени отклонения случайного процесса от среднего значения для различных прошедших моментов времени. Именно память о таких отклонениях и должна проявляться в динамике процесса. Во-вторых, среднее значение вклада, обусловленного наличием памяти случайного процесса, должно равняться нулю. Данное утверждение не нарушает цену форвардного контракта на актив, и, следовательно, удовлетворяет концепции отсутствия арбитража. В-третьих, процесс должен обладать неким характерным временем, характеризующим временной интервал памяти случайного процесса в прошлое. В дальнейшем изложении данное время будем называть τ, а также будем предполагать, что τ достаточно мало по сравнению со временем наблюдения.

Так же, как в [1–4], мы будем предполагать базовый актив логарифмически распределенной случайной величиной. Тогда, без ограничения общности, мы можем представить случайный процесс, соответствующий базовому активу, в виде

$$S_t = \exp(h_t)\,. \tag{2}$$

Здесь h_t – некий случайный процесс. Будем предполагать, что значение каждой реализации процесса h_t в момент времени t определяется аддитивными вкладами детерминированной и стохастической составляющих, а также аддитивным вкладом, описывающим влияние памяти о предыдущих отклонениях случайного процесса от своего среднего значения. Это влияние убывает с увеличением временного промежутка от настоящего в прошлое, следовательно, вклад предшествующего отклонения должен характеризоваться некоторой весовой функцией, зависящей от текущего момента времени, момента времени в прошлом и характерного времени τ. Следуя этим соображениям, запишем общий вид введенной добавки в виде

$$\Phi(h_t,t,\tau) = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} f(t',t,\tau)\left[h_{t'} - \overline{h_{t'}}\right]dt'\,, \tag{3}$$

где $f(t',t,\tau)$ – весовая функция, t_0 – начальный момент времени, t – текущий момент времени. Весовая функция должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{cases} f(t,t,\tau) = 1, \\ f(-\infty,t,\tau) = 0, \\ \lim\limits_{\tau\to 0+} f(t',t,\tau) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Наличие каких-либо других условий на поведение функции должно следовать из специфики постановки задачи. Тогда динамику случайного процесса h_t определим следующим стохастическим дифференциалом:

$$dh_t = \left(a(t) - \frac{1}{2}b^2(t)\right)dt + b(t)dW_t + \delta\Phi(h_t,t,\tau)\,, \tag{5}$$

$a'(t) = a(t) - {}^1\!/_2\, b^2(t)$ и $b(t)$ – непрерывные функции; dW_t – винеровский процесс; $\delta\Phi(h_t,\tau,t)$ есть добавка в стохастический дифференциал, зависящая от текущего значения случайной величины, текущего момента времени и характеристического времени τ. Найдем вариацию данного функционала, учитывая, что τ является параметром:

$$\delta\Phi(h_t,t,\tau) = \Phi(h_t + \delta h, t + \delta t, \tau) - \Phi(h_t,t,\tau) =$$
$$= \frac{1}{t+\delta t - t_0}\int_{t_0}^{t+\delta t} f(t', t+\delta t,\tau)\left[h_{t'} + \delta h_{t'} - \overline{h_{t'}}\right]dt' - \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} f(t',t,\tau)\left[h_{t'} - \overline{h_{t'}}\right]dt' \tag{6}$$

воспользуемся разложением в ряд Тейлора в окрестности малых δt: $\dfrac{1}{A-\delta t} = \dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{A^2}\delta t$, тогда

$$\delta\Phi(h_t,t,\tau)=\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t+\delta t} f(t',t+\delta t,\tau)\left[h_{t'}+\delta h_{t'}-\overline{h_{t'}}\right]dt'+\frac{\delta t}{(t-t_0)^2}\int\limits_{t_0}^{t+\delta t} f(t',t+\delta t,\tau)\left[h_{t'}+\delta h_{t'}-\overline{h_{t'}}\right]dt'-$$

$$-\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(t',t,\tau)\left[h_{t'}-\overline{h_{t'}}\right]dt'=\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t+\delta t} f(t',t+\delta t,\tau)\delta h_{t'}dt'+$$

$$+\frac{\delta t}{(t-t_0)^2}\int\limits_{t_0}^{t+\delta t} f(t',t+\delta t,\tau)\left[h_{t'}+\delta h_{t'}-\overline{h_{t'}}\right]dt'+\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t}^{t+\delta t} f(t',t+\delta t,\tau)\left[h_{t'}+\delta h_{t'}-\overline{h_{t'}}\right]dt'.$$

Во-первых, легко заметить, что лидирующий член разложения определяется вариацией Винеровского процесса и имеет порядок $\sqrt{\delta t}$. Во-вторых, члены порядка δt дадут вклад в детерминированную составляющую стохастического дифференциала, которая, как уже упоминалась, калибруется к рыночным данным, т.е. определяется таким образом, чтобы не нарушать цену форвардного контракта на данный базовый актив. В рамках настоящей работы мы будем полагать, что данная калибровка проводится вполне корректным образом, следовательно, нас будет интересовать только вклад от эффекта памяти случайного процесса в стохастическую составляющую. Тогда с точностью до членов порядка $\sqrt{\delta t}$, вариация функционала примет вид

$$\delta\Phi(h_t,t,\tau)=\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(t',t,\tau)b(t')\delta W_{t'}dt'. \qquad (7)$$

Перепишем выражение (3) с учетом (6):

$$dh_t=a'(t)dt+\left[b(t)+\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(t',t,\tau)b(t')dt'\right]dW_t. \qquad (8)$$

Рассмотрим случай, когда функция $f(t',t,\tau)$ имеет вид

$$f(t',t,\tau)=\exp\left[-\frac{(t-t')^2}{\tau^2}\right]. \qquad (9)$$

Тогда

$$dh_t=a'(t)dt+\left[b(t)+\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left[-\frac{(t-t')^2}{\tau^2}\right]b(t')dt'\right]dW. \qquad (10)$$

При условии, что $b(t)=b,\ b\equiv\mathrm{const}$, мы можем записать следующий стохастический дифференциал для случайного процесса h_t :

$$dh_t=a'(t)dt+b\left[1+\frac{1}{2(t-t_0)}\tau\sqrt{\pi}Erf\left(\frac{t-t0}{\tau}\right)\right]dW_t. \qquad (11)$$

При реальных расчетах параметр τ, определяющий характерное время влияния исторического поведения случайной величины на ее текущее значение, может быть оценен из анализа временной корреляции изменений случайной величины. Легко заметить, что при τ=0, второе слагаемое в выражении для волатильности случайного процесса с короткой памятью (11), обратится в нуль, а стохастический дифференциал будет описывать динамику случайного процесса с волатильностью $b(t)$. Увеличение параметра τ приводит к увеличению значения волатильности процесса h_t, которая асимптотически стремится к волатильности винеровского процесса $b(t)$ при больших временах наблюдения t. Данный факт легко объясним, если учесть, что характерное время памяти процесса о своем прошлом равно τ и при достаточно больших временах наблюдения случайного процесса h_t мы будем иметь набор наблюдений, практически независимых друг от друга в среднем по совокупности измерений.

Выводы

Таким образом, мы показали, что эффект наличия короткой памяти у случайного процесса о своем прошлом можно описать винеровским процессом с измененной волатильностью. Данный метод позволяет описывать поведение реальных экономических процессов рынка капитала, оставляя корректным широко распространенный математический аппарат описания динамики рынка. Например, мы можем записать уравнение Блэка-Шолца для опциона на базовый актив с памятью пути.

Воспользовавшись леммой Ито, перейдем от выражения для процесса h_t к стохастическому дифференциалу для базового актива:

$$dS_t = A(t)S_t\,dt + \left[b(t) + \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} f(t',t,\tau)b(t')dt'\right]S_t\,dW_t\,. \qquad (12)$$

Как уже упоминалось выше, функция $A(t)$ определяется из нормировки среднего значения базисного актива к значению форвардного контракта на данный актив, чтобы избежать возможности арбитража, $b(t)$ – волатильность Винеровского процесса.

Следует отметить, что попытка учета памяти случайного процесса в виде аддитивной добавки в стохастический дифференциал, приводит к модели базового актива с переменной волатильностью (см., например, [8–11]). Можно сказать, что полученная оценка для волатильности в выражении (12) является аналогом оценки волатильности в рамках ARCH модели (см., например, [8]) для случая непрерывного по времени оценивания. С другой стороны, мы изначально не делали никаких дополнительных предположений о поведении волатильности, а полученный в рамках развитого подхода результат справедлив для достаточно широкого класса весовых функций $f(t',t,\tau)$.

Поскольку опцион является функцией от цены базового актива и времени $V \equiv V(t,S)$, мы можем записать уравнение Блэка-Шолца для опциона на базисный актив, определяемый стохастическим дифференциалом типа (12). Опуская промежуточные вычисления, можно показать, что уравнение Блэка-Шолца имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[b(t) + \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} f(t',t,\tau)b(t')dt'\right]^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0\,. \qquad (13)$$

Как это видно из формулы (8) или (12), (13), вклад в волатильность случайного процесса существенно зависит от вида весовой функции (4), следовательно, исследование влияния учета истории случайного процесса на цену производного финансового инструмента можно провести только задавшись вполне определенным видом весовой функции $f(t',t,\tau)$. Так, например, для простых европейских или американских опционов (vanilla option) при условии, что весовая функция имеет вид (9), следует ожидать увеличения волатильности случайного процесса (см. выражение (10)) и, как следствие, увеличения цены опциона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilmott P, Dewynne J & Howison S.* Option Pricing: Mathematical Models and Computation. – Oxford Financial Press, 1993.
2. *Neftci S.* An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. – Academic Press, 1996.
3. *Hull J.* Option Futures and other Derivative Securities. – Prentice-Hall, NJ, 1999.
4. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001.
5. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынке капитала – М.: 2000.
6. *Peters E.* Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment and Economics. – John Wiley & Sons, Inc., 1994.
7. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977.
8. *Bollerslev T., Engle R.F., Nelson D.B.* ARCH Models. – University of California, San Diego, 1993
9. *Bollerslev T.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.// Journal of Econometrics, 1986, v.31, p.307 - 327.
10. *Lucas J.M. and Sacucci M.S.* Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. // Technometric, 1990, v.31, p. 1–29.
11. *Naukonen M.S.* On the Predictive Ability of Several Common Models of Volatility: An Empirical Test on the FOX Index. // Applied Financial Economics, 2002, v.12, issue 11, p. 813–826.

Поступила в редакцию 13.02.03.