ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2001, том 37, № 4, с. 570–572

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

© 2001 г. М. М. Хачев

1. Постановка задачи. Как известно, в теории уравнений с частными производными гиперболического типа задача Дирихле, как правило, служит примером некорректно поставленной задачи. Многочисленные приложения задачи Дирихле в теории околозвуковой и сверхзвуковой газовой динамики, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в теории математической биологии приводят к необходимости поиска областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. Поэтому значительный интерес представляет исследование задачи Дирихле для вырождающихся гиперболических уравнений в прямоугольнике вне связи с какими-либо приложениями.

Настоящая работа является обобщением работы [1], в которой была доказана однозначная разрешимость этой задачи для уравнения Трикоми в прямоугольной области.

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ -\alpha < y < 0\}$ рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv (-y)^m u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 (-y)^m u = 0, \tag{1}$$

где $\alpha = (1-2\beta)^{2\beta-1}$, $2\beta = m/(2+m)$; $m \equiv \mathrm{const} > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Область D – прямоугольник, обладающий тем свойством, что характеристики уравнения (1)

$$AB_0 : x = \frac{2}{2+m}(-y)^{(2+m)/2}, \quad BA_0 : 1 - x = \frac{2}{(2+m)}(-y)^{(2+m)/2}$$

проходят через его вершины. Обозначим через D_1 криволинейный треугольник ABC, т.е. часть области D, ограниченный отрезком AB и характеристическими сегментами AC и BC, где C – точка пересечения характеристик AB_0 и BA_0, а через D_2, D_3 и D_4 – криволинейные треугольники BCB_0, B_0CA_0 и A_0CA соответственно.

Задача Дирихле. Найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$ функцию $u \equiv u(x,y)$ со следующими свойствами: 1) u непрерывно дифференцируема всюду в $\bar{D}$, за исключением, быть может, характеристик AB_0 и BA_0; 2) $u_y \in L_2(0,1)$ при всех $-\alpha < y < 0$ и существует предел u_y в $L_2(0,1)$ при $y \to -\alpha$; 3) u – регулярное в D_i $(i = \overline{1,4})$ решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \le x \le 1; \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le 0.$$

2. Единственность решения.

Теорема. *Задача Дирихле для уравнения (1) в области D имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи Дирихле $u|_{\partial D} = 0$. Покажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D. Для этого построим вспомогательную функцию $\omega(x,y)$ со следующими свойствами: 1) $\omega(x,y)$ – решение уравнения (1); 2) $\omega(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, за исключением, быть может, характеристик AB_0 и BA_0; 3) $\omega(x,y)$ удовлетворяет краевому условию $\omega|_{\partial D \setminus (y=-\alpha)} = 0$.

Методом разделения переменных нетрудно убедиться в том, что функция $\omega(x,y)$ представима в виде

$$\omega(x,y) = c_n(-y)^{1/2} J_{1/(2+m)}\left(\frac{2\mu_n}{2+m}(-y)^{(2+m)/2}\right)\sin \pi n x, \quad n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

где c_n – произвольная постоянная, $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода [2], $\mu_n = \sqrt{\lambda^2 + \pi^2 n^2}$.

Из равенства $0 \equiv \omega L(u) - u L(\omega) = (-y)^m(\omega u_x - u\omega_x)_x - (\omega u_y - u\omega_y)_y$ по формуле Грина, принимая во внимание равенство (2), имеем

$$J_{1/(2+m)}(\mu_n)\int_0^1 u_y(x,-\alpha)\sin \pi n x\, dx = 0. \tag{3}$$

Из интегрального представления функции Бесселя первого рода [2] следует, что $\operatorname{sign} J_{1/(2+m)}(\mu_n) = (-1)^n$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда из равенства (3), учитывая полноту тригонометрической системы $\{\sin \pi n x\}$, $n \in \mathbf{N}$ в $L_2(0,1)$ [3], имеем, что $u_y(x,-\alpha;\lambda) = 0$. Отсюда в силу единственности решения смешанной задачи

$$u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \le x \le 1; \quad u_y(x,-\alpha) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le 0,$$

для уравнения (1) при фиксированных значениях λ следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

3. Существование решения задачи. В характеристических переменных

$$\xi = x - (2/(2+m))(-y)^{(2+m)/2}, \quad \eta = x + (2/(2+m))(-y)^{(2+m)/2}$$

уравнение (1) примет вид

$$u_{\xi\eta} + a(\xi,\eta)u_\xi - a(\xi,\eta)u_\eta - \mu^2 u = 0, \tag{4}$$

где $a(\xi,\eta) = \beta/(\eta-\xi)$, $\mu = |\lambda|/2$, а криволинейные треугольники D_i $(i = \overline{1,4})$ преобразуются в прямоугольные треугольники Δ_i $(i = \overline{1,4})$ и для них задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $u_i \equiv u_i(\xi,\eta)$ уравнения (4), дважды непрерывно дифференцируемое в Δ_i, непрерывное в замкнутой области $\overline{\Delta}_i$ и удовлетворяющее условиям:

в области Δ_i, $i = 1,3$,

$$\begin{gathered}\lim_{\eta\to i-1+\xi} u_i(\xi,\eta) = (3-i)/(1+i)\tau(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1,\\ \lim_{\eta\to i-1+\xi}\left(\frac{\eta-\xi}{2-4\beta}\right)^{2\beta}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\xi} - \frac{\partial u_i}{\partial\eta}\right) = \overline{\nu}_i(\xi), \quad 0 < \xi < 1,\end{gathered} \tag{5}$$

а в области Δ_i, $i = 2,4$,

$$\begin{gathered}u_i\left[\frac{\eta+\xi}{2}, -\left(\frac{\eta-\xi}{2-4\beta}\right)^{2\beta}\right]\Bigg|_{\eta=4-i-\xi} = 0, \quad 0 \le \xi \le 1,\\ \left[\frac{\partial u_i}{\partial\xi} - \frac{\partial u_i}{\partial\eta}\right]\Bigg|_{\eta=4-i-\xi} = \tilde{\nu}_i(\xi), \quad 0 < \xi < 1,\end{gathered} \tag{6}$$

где $\overline{\nu}_1(\xi) = \nu(\xi)$, $\overline{\nu}_3(\xi) = \nu_3(1+\xi)$, $\tilde{\nu}_2(\xi) = \nu_2(-\alpha(1-\xi)^{1-2\beta})$, $\tilde{\nu}_4(\xi) = \nu_4(-\alpha(\xi)^{1-2\beta})$.

Применяя метод Римана [4] к задачам (5) и (6), получим

$$u_1(\xi,\eta) = \gamma_1 \int_0^1 \frac{\overline{J}_{\beta-1}(\mu\sqrt{t-t^2}(\eta-\xi))}{(t-t^2)^{1-\beta}}\tau(\xi+(\eta-\xi)t)\,dt -$$

$$-\gamma_2\left(\frac{\eta-\xi}{2-4\beta}\right)^{1-2\beta}\int_0^1 \frac{\overline{J}_{-\beta}(\mu(\eta-\xi)\sqrt{t-t^2})}{(t-t^2)^{\beta}}\nu(\xi+(\eta-\xi)t)\,dt,$$

$$u_2(\xi,\eta) = \int_0^1 K_1(\xi,\eta;t)\nu_2(-\alpha(1-\xi-(2-\xi-\eta)t)^{1-2\beta})\,dt,$$

$$u_3(\xi,\eta) = \int_0^1 K_2(\xi,\eta;t)\nu_3(1+\xi+(\eta-\xi-2)t)\,dt,$$

$$u_4(\xi,\eta) = \int_0^1 K_3(\xi,\eta;t)\nu_4(-\alpha(\xi-(\xi+\eta)t)^{1-2\beta})\,dt,$$

где $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$, $\overline{J}_\nu(z) = 2^\nu\Gamma(1+\nu)J_\nu(z)/z^\nu$,

$$K_1(\xi,\eta;t) = ((\xi+\eta-2)/2)R(\xi,\eta;\xi+(2-\xi-\eta)t, 2-\xi-(2-\xi-\eta)t),$$

$$K_2(\xi,\eta;t) = ((\xi-\eta+2)/(2(1-2\beta)^{-2\beta}))R(\xi,\eta;\xi+(\eta-\xi-2)t, 2+\xi+(\eta-\xi-2)t),$$
$$K_3(\xi,\eta;t) = ((\xi+\eta)/2)R(\xi,\eta;\xi-(\xi+\eta)t, -\xi-(\xi+\eta)t),$$

$R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)$ – функция Римана для уравнения (4) и она имеет вид

$$R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) = \left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta} J_0(\mu\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)})-$$

$$-(\beta-\beta^2)\left(\frac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{\beta}\sigma\int\limits_0^1 \frac{F(\beta,1+\beta;2,\sigma z)}{(1-\sigma z)^{1-\beta}} J_0\left(\mu\sqrt{\frac{1-z}{1-\sigma z}}\sqrt{(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}\right)dz,$$

$\sigma = (\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)/((\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi))$, $J_0(t)$ – функция Бесселя нулевого порядка [2], $F(a,b,c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [2].

Для получения интегрального преобразования относительно $\nu(x)$ используем методику работы [1]: 1) склеиваем непрерывно $u_i(\xi,\eta)$ $(i=\overline{1,4})$ и их производные на характеристических сегментах AC, A_0C, BC и B_0C; 2) исключая последовательно из полученной системы неизвестные $\nu_4(x)$, $\nu_3(x)$ и $\nu_2(x)$, в результате громоздких преобразований получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\nu(x) = f(x) + \int\limits_0^1 K(x,s)\nu(s)\,ds, \tag{7}$$

где $f(x)$ – известная функция в квадрате $0<x,s<1$ при $x\neq s$ и допускает оценку $K(x,s) = O(1)(x-s)^{\beta-1}$. Безусловная разрешимость уравнения (7) вытекает из единственности решения задачи Дирихле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хачев М.М.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 11. № 1. С. 151–160.
2. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Т. 1. М., 1949.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М., 1965.
4. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М., 1957.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 10.10.2000 г.