МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СЛОЖНЫМИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ[1]

И. Н. Синицын[1]***, В. И. Синицын***[2]***, И. В. Сергеев***[3]***, Э. Р. Корепанов***[4]***,***
В. В. Белоусов[5]***, В. С. Шоргин***[6]

Аннотация: Рассмотрено математическое обеспечение аналитического моделирования нормальных (гауссовских) стохастических процессов (НСтП) в дифференциальных и разностных (дискретных) стохастических системах (СтС) со сложными дробно-рациональными нелинейностями (СДРН) скалярного и векторного аргумента. Даны типовые представления скалярных и векторных СДРН. Получены уравнения точности и чувствительности методов нормальной аппроксимации (МНА) и статистической линеаризации (МСЛ) для аналитического моделирования нестационарных и стационарных НСтП. Рассмотрены аналитические и численные методы расчета типовых интегралов МНА (МСЛ). Обсуждается состав модуля «StS-CFRN. Analysis» алгоритмического и инструментального программного обеспечения. В приложении даны примеры вычисления типовых интегралов и коэффициентов МНА (МСЛ) для СтС с СДРН. Рассмотрены обобщения полученных алгоритмов.

Ключевые слова: аналитическое моделирование; метод нормальной аппроксимации (МНА); метод статистической линеаризации (МСЛ); модуль «StS-CFRN. Analysis»; нормальный стохастический процесс (НСтП); сложные дробно-рациональные нелинейности (СДРН); стохастическая система (СтС)

DOI: 10.14357/08696527160114

---

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-02244).

[1]Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

[2]Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, vsinitsin@ipiran.ru

[3]Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, isergeev@ipiran.ru

[4]Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, ekorepanov@ipiran.ru

[5]Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, vbelousov@ipiran.ru

[6]Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, vshorgin@ipiran.ru

1 Введение

Методы и средства аналитического моделирования НСтП для дифференциальных СтС, в том числе и на многообразиях, описаны в [1–5]. В [6] для СтС с СДРН даны типовые представления дробно-рациональных функций (ДРФ) и соответствующих СДРН, получены уравнения МНА и МСЛ, представлено алгоритмическое обеспечение МНА (МСЛ) для СтС с СДРН и тестовые примеры.

Дадим развитие [6] на случай непрерывных и дискретных СтС. Особое внимание уделим алгоритмическому и программному обеспечению модуля «StS-CFRN. Analysis». В разд. 2 приведены краткие сведения из теории ДРФ и типовые представления СДРН. Рассмотрены примеры сложных нелинейностей, приводимых к СДРН. Алгоритмическое обеспечение на основе МНА (МСЛ) для дифференциальных СтС с винеровскими и пуассоновскими шумами представлено в разд. 3. Особое внимание уделено вопросам точности и чувствительности алгоритмов. В разд. 4 описано соответствующее алгоритмическое обеспечение для дискретных СтС. В приложении даны примеры вычисления типовых интегралов и коэффициентов МНА (МСЛ) для СтС с СДРН, а также некоторые применения.

2 Дробно-рациональные функции и нелинейности

Скалярной ДРФ называется любая функция $z = \varphi(y) = R^{\text{ДРФ}}(y)$, представимая в виде отношения двух полиномов $P^+(y)$ и $P^-(y)$ [6–9]:

$$R^{\text{ДРФ}}(y) = \frac{P^-(y)}{P^+(y)}\,. \tag{1}$$

Для правильной ДРФ степень числителя $P^-(y)$ не больше степени знаменателя $P^+(y)$. В общем случае скалярную ДРФ можно однозначно представить в виде полинома $P(y)$ и правильной ДРФ:

$$\frac{P^-(y)}{P^+(y)} = P(y) + \frac{P_1^-(y)}{P^+(y)}\,. \tag{2}$$

Следуя [6–9], приведем основные свойства скалярных правильных ДРФ.

1^0 Правильная ДРФ, знаменатель $P^+(y)$ которой представим в виде произведения попарно взаимно простых множителей

$$P^+(y) = P_1^+(y)P_2^+(y)\cdots\,,$$

однозначно представима в виде суммы правильных ДРФ

$$\frac{P_1^-(y)}{P^+(y)} = \frac{P_{11}^-(y)}{P_1^+(y)} + \frac{P_{12}^-(y)}{P_2^+(y)} + \cdots\,.$$

2^0 Пусть $P^-(y)/P^+(y)$ — правильная ДРФ, а знаменатель $P^+(y)$ имеет вид:

$$P^+(y) = a_0\,(y-y_1)^{k_1}\,(y-y_2)^{k_2}\cdots(y-y_m)^{k_m}\ .$$

Тогда имеет место следующее единственное представление:

$$\frac{P_1^-(y)}{P^+(y)} = \sum_{\nu-1}^{m}\left[\frac{A_{\nu 0}}{(y-y_\nu)^{k_\nu}} + \frac{A_{\nu_1}}{(y-y_\nu)^{k_{\nu-1}}} + \cdots + \frac{A_{\nu,k_{\nu-1}}}{y-y_\nu}\right].$$

3^0 Пусть $P_1^-(y)/P^+(y)$ является правильной ДРФ, а разложение знаменателя $P^+(y)$ на неприводимые множители имеет вид:

$$P^+(y) = a_0\,(y-y_1)^{k_1}\cdots(y-y_r)^{k_r}\left(y^2+p_1y+q_1\right)^{l_1}\cdots\left(y^2+p_sy+q_s\right)^{l_s}\ .$$

Тогда имеет место следующее единственное представление правильной ДРФ:

$$\frac{P_1^-(y)}{P^+(y)} = \sum_{\nu=1}^{h}\sum_{\mu=1}^{k_\nu}\frac{A_{\nu\mu}}{(y-y_\nu)^\mu} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{l_\nu}\frac{B_{\nu\mu}y+C_{\nu\mu}}{(y^2+p_\nu y+q_\nu)^\mu}\,.$$

4^0 Дифференцирование ДРФ (1) проводится по формуле:

$$\frac{dR^{\text{ДРФ}}(y)}{dy} = \frac{(P^-(y))'P^+(y) - (P^+(y))'P^-(y)}{(P^+(y))^2}\,.$$

5^0 Неопределенный интеграл от ДРФ всегда выражается через элементарные функции, так что

$$\int\frac{P^-(y)}{P^+(y)}\,dy = \int P(y)\,dy + \int\frac{P_1^-(y)\,dy}{P^+(y)} =$$
$$= \int P(y)\,dy + \sum_{\nu=1}^{h}\sum_{\mu=1}^{k_\nu}A_{\nu\mu}\int\frac{dy}{(y-y_\nu)^\mu} + \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{\mu=1}^{l_\nu}\int\frac{B_{\nu\mu}y+C_{\nu\mu}}{(y^2+p_\nu y+q_\nu)^\mu}\,dy\,,$$

при этом интеграл от полинома $P(y)$ всегда выражается в конечном виде. Интегралы первой суммы равны:

$$\int\frac{dy}{(y-y_\nu)^\mu} = \frac{1}{1-\mu}\,(y-y_\mu)^{1-\mu} + \mathcal{C}\ \ (\mu>1)\,.$$

Далее

$$\int\frac{By+C}{(y^2+py+q)^\mu} = \frac{B}{2(1-\mu)(y^2+py+q)^{\mu-1}} + \frac{2C-Bp}{2}\,I_\mu(\xi)\,.$$

Здесь $I_\mu(\xi)$ вычисляется по рекуррентной формуле:

$$I_\mu = \frac{\xi(\xi^2+a^2)^{1-\mu}}{2a^2(\mu-1)} + \frac{2\mu-3}{a^2(2\mu-2)} I_{\mu-1}(\xi)\,,$$

где

$$\xi = y + \frac{p}{2}\,; \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}\,.$$

Таким образом, неопределенный интеграл от действительной ДРФ может быть записан в виде суммы, во-первых, некоторой рациональной функции с действительными коэффициентами, во-вторых, выражений вида

$$c_\nu^{(1)}\,(y-y_\nu)^{-\nu},\ c_\nu^{(2)}\ln|y-y_\nu|\ ,\ c_\nu^{(3)}\ln\left(y^2+p_\nu y+q_\nu\right),\ c_\nu^{(4)}\mathrm{arctg}\left[\frac{2y+p_\nu}{\sqrt{4q_\nu-p_\nu^2}}\right]$$

и, в-третьих, произвольной постоянной.

6^0 Имеет место следующее правило Остроградского для выделения рациональной части $R_1(y)$ интеграла

$$\int \frac{P^-(y)}{P^+(y)}\,dy = R_1(y) + R_2(y)\,,$$

где $R_2(y)$ — трансцендентная часть. Если предположить, что знаменатель $P^+(y)$ допускает представление вида:

$$P^+(y) = L(y)K(y)\,,$$

где

$$L(y) = \\ = a_0\,(y-y_1)^{k_1-1}\cdots(y-y_r)^{k_r-1}\left(y^2+p_1y+q_1\right)^{l_1-1}\cdots\left(y^2+p_sy+q_s\right)^{l_s-1}\,;$$
$$K(y) = (y-y_1)\cdots(y-y_r)\left(y^2+p_1y+q_1\right)\cdots\left(y^2+p_sy+q_s\right)\,,$$

то имеет место единственное представление:

$$R_1(y) = \frac{M(y)}{L(y)}\,; \quad R_2(y) = \int\frac{N(y)\,dy}{K(y)}\,.$$

Коэффициенты полиномов $M(y)$ и $N(y)$ находятся методом неопределенных коэффициентов, поскольку $M(y)/L(y)$, $N(y)/K(y)$ и $L'(y)K(y)/L(y)$ являются правильными ДРФ.

Пример 2.1. Примерами СДРН, получаемых посредством отрезков сумм типовых ДРФ, могут служить следующие [6]:

$$\varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \sum_{r=1}^{n} l_{rt}\varphi_r^{\text{ДРН}}(Y)\,;$$

$$\varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \sum_{r=1}^{n} l_{rt}\varphi_r^{\text{ДРН}}(Y)\varphi_r(Y)\,;$$

$$\varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \frac{\sum_{r=1}^{n'} l'_{rt}{\varphi'}_r^{\text{ДРН}}(Y)}{\sum_{r=1}^{n''} l''_{rt}{\varphi''}_r^{\text{ДРН}}(Y)}\,;$$

$$\varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \frac{\sum_{r=1}^{n'} l'_{rt}{\varphi'}_r^{\text{ДРН}}(Y){\varphi'}_r(Y)}{\sum_{r=1}^{n''} l''_{rt}{\varphi''}_r^{\text{ДРН}}(Y){\varphi''}_r(Y)}\,,$$

где $\varphi_r^{\text{ДРН}}(Y)$, ${\varphi'}_r^{\text{ДРН}}(Y)$ и ${\varphi''}_r^{\text{ДРН}}(Y)$ — типовые ДРН; l_{rt}, l'_{rt} и l''_{rt} — коэффициенты, зависящие от времени t; $\varphi_r(Y)$, ${\varphi'}_r(Y)$, ${\varphi''}_r(Y)$ — известные функции.

Другими примерами скалярных СДРН являются нелинейности, получаемые путем соответствующего преобразования аргумента [6]:

$$\varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \varphi\left(\psi^{\text{ДРН}}(Y,t),t\right)\,;\ \ \varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \varphi^{\text{ДРН}}(\psi(Y,t),t)\,.$$

В приложении приведены примеры сложных нелинейностей, приводимых к СДРН.

Скалярная ДРФ векторного аргумента определяется как отношение конечных сумм [8]:

$$R^{\text{ДРФ}}\,(y_1,\,\ldots\,,\,y_n) = \frac{\sum_{k_1,\ldots,k_n} a_{k_1,\ldots,k_n}(y_1)^{k_1}\cdots(y_n)^{k_n}}{\sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1,\ldots,i_n}(y_1)^{i_1}\cdots(y_n)^{i_n}}\,. \qquad (3)$$

Пример 2.2. В качестве примеров скалярных СДРН векторного аргумента $Y=[Y_1\cdots Y_p]^{\text{T}}$ рассмотрим следующие [6]:

$$\varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \sum_{r=1}^{n}\prod_{h=1}^{H} l_{rh,t}\varphi_{rh}^{\text{ДРН}}(Y_h)\,;$$

$$\varphi^{\text{СДРН}}(Y,t) = \frac{\sum_{r=1}^{n'}\prod_{h=1}^{H'} l'_{rh,t}{\varphi'}_{rh}^{\text{ДРН}}(Y_h)}{\sum_{r=1}^{n''}\prod_{h=1}^{H''} l''_{rh,t}{\varphi''}_{rh}^{\text{ДРН}}(Y_h)}\,.$$

В случае векторных и матричных СДРН имеют место соответствующие формулы (3) для компонент.

3 Дифференциальные стохастические системы со сложными дробно-рациональными нелинейностями. Алгоритмическое обеспечение

Следуя [6], уравнения конечномерных непрерывных нелинейных систем со стохастическими возмущениями путем расширения вектора состояния СтС могут быть записаны в виде следующего векторного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dY_t = a\,(Y_t, \Theta, t)\,dt + b\,(Y_t, \Theta, t)\,dW_0 + \int\limits_{R_0} c\,(Y_t, \Theta, t, v)\,P^0(\Theta, dt, dv)\,,$$

$$Y\,(t_0) = Y_0\,. \quad (4)$$

Здесь Y_t — $(p \times 1)$-мерный вектор состояния, $Y_t \in \Delta^y$ (Δ^y — гладкое многообразие состояний); $a = a(Y_t, \Theta, t)$ и $b = b(Y_t, \Theta, t)$ — известные $(p \times 1)$-мерная и $(p \times m)$-мерная функции Y_t и t; $W_0 = W_0(\Theta, t)$ — $(r \times 1)$-мерный винеровский СтП интенсивности $\nu_0 = \nu_0(\Theta, t)$; $c(Y_t, \Theta, t, v)$ — $(p \times 1)$-мерная функция Y_t, t и вспомогательного $(q \times 1)$-мерного параметра v; $\int\limits_{\Delta} dP^0(t, A)$ — центрированная пуассоновская мера, определяемая соотношением:

$$\int\limits_{\Delta} dP^0(\Theta, t, A) = \int\limits_{\Delta} dP(\Theta, t, A) = \int\limits_{\Delta} \nu_P(\Theta, t, A)\,dt\,.$$

В (4) принято: $\int\limits_{\Delta}$ — число скачков пуассоновского СтП в интервале времени $\Delta = (t_1, t_2]$; $\nu_P(\Theta, t, A)$ — интенсивность пуассоновского СтП $P(\Theta, t, A)$; A — некоторое борелевское множество пространства R_0^q с выколотым началом. Начальное значение Y_0 представляет собой случайную величину (с.в.), не зависящую от приращений $W_0(\Theta, t)$ и $P(\Theta, t, A)$ на интервалах времени, следующих за t_0, $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, для любого множества A, Θ — $(p^\Theta \times 1)$-мерный вектор параметров системы.

В случае аддитивных нормальных (гауссовских) и обобщенных пуассоновских возмущений уравнение (4) имеет вид:

$$\dot{Y}_t = a\,(Y_t, \Theta, t) + b_0(\Theta, t)V\,, \quad V = \dot{W}\,,\ \ Y\,(t_0) = Y_0\,. \quad (5)$$

Здесь W — СтП с независимыми приращениями, представляющий собой смесь нормального и обобщенного пуассоновского СтП.

Для компонент $\varphi(Y_t, \Theta, t) = \{a_h, b_{kj}, c_h\}$ функций a, b и c, являющихся СДРН, примем представления (1)–(3). Если предположить существование конечных вероятностных моментов второго порядка для моментов времени t_1 и t_2, то уравнения МНА примут следующий вид [10, 11]:

– для характеристических функций:

$$\left.\begin{aligned} g_1^N(\lambda; t) &= \exp\left[i\lambda^{\mathrm{T}} m_t - \frac{1}{2}\,\lambda^{\mathrm{T}} K_t \lambda\right]\,;\\ g_{t_1,t_2}^N\left(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2\right) &= \exp\left[i\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} \bar{m}_2 - \frac{1}{2}\,\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} \bar{K}_2 \lambda\right]\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где

$$\bar{\lambda} = \left[\lambda_1^{\mathrm{T}} \lambda_2^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\,;\ \ \bar{m}_2 = \left[m_{t_1}^{\mathrm{T}} m_{t_2}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\,;\ \ \bar{K}_2 = \begin{bmatrix} K\left(t_1, t_1\right) & K\left(t_1, t_2\right)\\ K\left(t_2, t_1\right) & K\left(t_2, t_2\right)\end{bmatrix}\,;$$

– для математических ожиданий m_t, ковариационной матрицы K_t и матрицы ковариационных функций $K(t_1, t_2)$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{m}_t &= A^m\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)\,,\ \ m_0 = m\left(\Theta, t_0\right)\,;\\ \dot{K}_t &= A^K\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)\,,\ \ K_0 = K\left(\Theta, t_0\right)\,;\\ \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= A^{K_{t_1,t_2}}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = K\left(t_1, t_2\right) a_{21}\left(m_{t_2}, K_{t_2}, \Theta, t_2\right)^{\mathrm{T}}\,,\\ &\qquad\qquad K\left(\Theta, t_1, t_1\right) = K_{t_1}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &m_t = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N Y_t\,;\quad Y_t^0 = Y_t - m_t\,;\\ &K_t = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[Y_t^0 Y_t^{0\mathrm{T}}\right]\,;\quad K\left(t_1, t_2\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[Y_{t_1}^0 Y_{t_2}^{0\mathrm{T}}\right]\,;\\ &A^m = A^m\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[a(Y_t, \Theta, t)\right]\,;\\ &A^K = A^K\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) =\\ &\qquad = a_{21}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) + a_{21}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)^{\mathrm{T}} + a_{22}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)\,;\\ &a_{21} = a_{21}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[a(Y_t, \Theta, t) Y_t^{0\mathrm{T}}\right]\,;\\ &a_{22} = a_{22}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[\sigma(Y_t, \Theta, t)\right]\,;\\ &\sigma\left(Y_t, \Theta, t\right) = b\left(Y_t, \Theta, t\right)\nu_0(t) b\left(Y_t, \Theta, t\right)^{\mathrm{T}} +\\ &\qquad + \int\limits_{R_0^q} c\left(Y_t, \Theta, t, v\right) c\left(Y_t, \Theta, t, v\right)^{\mathrm{T}} \nu_P(\Theta, t, dv)\,, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где $\mathsf{M}^N_{\Delta^y}$ — символ вычисления математического ожидания для нормальных распределений (6) на многообразии Δ^y.

Для стационарных СтС стационарные НСтП — если они существуют, то $m_t = m^*$, $K_t = K^*$, $K(\Theta, t_1, t_2) = k(\Theta, \tau)$ $(\tau = t_1 - t_2)$, — определяются уравнениями [10, 11]:

$$\left.\begin{gathered} A^m\left(m^*, K^*, \Theta\right) = 0\,; \quad A^K\left(m^*, K^*, \Theta\right) = 0\,; \\ \dot{k}_\tau(\Theta, \tau) = A^k\left(m^*, K^*, \Theta\right) K^{*-1} k(\Theta, \tau)\,, \quad k(0) = K^* \;\; (\forall \tau > 0)\,; \\ k(\tau) = k(-\tau)^{\mathrm{T}} \;\; (\forall \tau < 0)\,. \end{gathered}\right\} \tag{9}$$

При этом необходимо, чтобы матрица $A^k = a_{21}(m^*, K^*, \Theta) = a^*_{21}$ была асимптотически устойчивой.

Уравнения МНА в случае СтС (5) переходят в уравнения МСЛ [10, 11]:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{m}_t = A^m\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = a_1\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)\,, \quad m_0 = m\left(\Theta, t_0\right)\,; \\ &\dot{K}_t = A^K\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = k_1^a\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) K_t + \\ &\qquad\qquad + K_t k_1^a\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)^{\mathrm{T}} + \sigma_0(t)\,, \quad K_0 = K\left(\Theta, t_0\right)\,; \\ &\frac{\partial K(\Theta, t_1, t_2)}{\partial t_2} = A^{K_{t_1, t_2}}\left(m_{t_2}, K_{t_2}, K(\Theta, t_1, t_2), \Theta, t_2\right) = \\ &\qquad = K\left(\Theta, t_1, t_2\right) K_{t_2} k_1^a(m_{t_2}, K_{t_2}, \Theta, t_2)^{\mathrm{T}}\,, \;\; K\left(\Theta, t_1, t_1\right) = K_{t_1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

если принять

$$\left.\begin{gathered} a\left(Y_t, \Theta, t\right) = a_1\left(m_t, K_t, \Theta\right) + k_1^a\left(m_t, K_t, \Theta\right) Y_t^0\,; \\ b\left(Y_t, \Theta, t\right) = b_0(\Theta, t)\,; \;\; \sigma\left(Y_t, \Theta, t\right) = b_0(\Theta, t)\nu(\Theta, t) b_0(\Theta, t)^{\mathrm{T}} = \sigma_0(\Theta, t)\,; \\ k_1^a\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial m_t}\right) A^m\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}. \end{gathered}\right\} \tag{11}$$

Для стационарных СтС (5) при условии асимптотической устойчивости матрицы $k_1^a(m^*, K^*)$ в основе МСЛ лежат уравнения (9), записанные в виде:

$$\left.\begin{gathered} A^m\left(m^*, K^*, \Theta\right) = 0\,; \\ A^K = k_1^a\left(m^*, K^*, \Theta\right) K^* + K^* k_1^a\left(m^*, K^*, \Theta\right)^{\mathrm{T}} + \sigma_0^* = 0\,; \\ \dot{k}_\tau(\Theta, \tau) = A^{k(\tau)} = k_1^a\left(m^*, K^*, \Theta\right) k(\tau)\,, \;\; k(0) = K^* \;\; (\forall \tau > 0)\,; \\ k(\tau) = k(-\tau)^{\mathrm{T}} \;\; (\forall \tau < 0)\,. \end{gathered}\right\} \tag{12}$$

При фиксированном векторе параметров Θ *уравнения* (6) и (7) *лежат в основе алгоритмического обеспечения на базе МНА для СтС на многообразиях*

(МСтС) (4), *а уравнения* (10) и (11) — *на базе МСЛ для СтС* (5). *Для определения стационарных стохастических процессов согласно МНА служат соотношения* (9), *а МСЛ* — (12). *При этом требуется существование конечных интегралов* (8) *и* (11).

Для МНА необходимо уметь вычислять следующие интегралы:

$$
\begin{aligned}
I_0^a &= I_0^a\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = A^m\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[a\left(Y_t, \Theta, t\right)\right]\;; \\
I_1^a &= I_1^a\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = a_{21}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[a\left(Y_t, \Theta, t\right) Y_t^{0\mathrm{T}}\right]\;; \\
I_0^{\bar{\sigma}} &= I_0^{\bar{\sigma}}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = a_{22}\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \mathsf{M}_N\left[\bar{\sigma}(Y_t, \Theta, t)\right]\;.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Для МСЛ достаточно вычислить интеграл (13), причем интеграл I_1^a вычисляется по формуле [10, 11]:

$$
k_1^a = k_1^a\left(m_t, K_t, \Theta, t\right) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial m_t}\right) I_0^a\left(m_t, K_t, \Theta, t\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\;.
$$

Как следует из свойства ДРФ 5^0, базовыми интегралами при вычислении (13) будут следующие интегралы:

$$
\mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[\frac{1}{(Y - Y_\nu)^\mu}\right];\; \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[\frac{1}{(Y^2 + p_\nu Y + q_\nu)^\mu}\right];\; \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[\frac{Y}{(Y^2 + p_\nu Y + q_\nu)^\mu}\right]. \tag{14}
$$

Подробно численные методы вычисления интегралов (14) описаны в [12–14]. Для дифференциальных СтС с СДРН можно рекомендовать следующие:

- степенные разложения;
- многочленные приближения, в первую очередь на основе многочленов Эрмита;
- дробно-рациональные приближения;
- разложения в цепные дроби;
- асимптотические приближения;
- итеративные процессы различных порядков.

В модуле «StS-CFRN. Analysis» реализованы степенные разложения и многочленные приближения на основе многочленов Эрмита.

В приложении рассмотрены примеры вычисления типовых интегралов (14). В случае $\Delta^y = (-\infty, \infty)$ можно рекомендовать квадратурные формулы на основе ортогональных полиномов Эрмита $H_n(x)$. В этом случае используется следующий алгоритм [6]:

$$
\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\varphi(x, \pi)\, dx = \sum_{i=1}^{n} w_i \varphi(x_i, \pi) + \rho_n\,, \tag{15}
$$

где π — вектор параметров; x_i — нуль $H_n(x)$, w_i — весовой коэффициент:

$$w_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 \left[H_{n-1}(x_i)\right]^2}\,;$$

ρ_n — остаточный член:

$$\rho_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!}\, \varphi^{(2n)}(\xi)\ \ (-\infty < \xi < \infty)\,.$$

Входящий в (15) вектор параметров обычно включает в себя дисперсию D_y и отношение сигнал / шум $\zeta_y = m_y / \sqrt{\mathsf{D}_y}$.

Уравнения точности и чувствительности к вектору параметров Θ по методу функций чувствительности являются частным случаем уравнений [15, 16] для функций чувствительности ∇m_t, ∇K_t, $\nabla K(t_1, t_2)$ ($\nabla = \nabla^\Theta$):

$$\begin{aligned} \nabla \dot{m}_t &= \nabla A^m\,, & \nabla m\,(t_0) &= 0\,;\\ \nabla \dot{K}_t &= \nabla A^K\,, & \nabla K\,(t_0) &= 0\,;\\ \frac{\partial \nabla K(t_1, t_2)}{\partial t_2} &= \nabla A^{K(t_1,t_2)}\,, & \nabla K\,(t_1, t_1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Уравнения МНА (МСЛ) содержат интегралы I_0^a, I_1^a и I_0^σ в виде соответствующих коэффициентов, поэтому процедура вычисления интегралов должна быть согласована с методом численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений для m_t, K_t и $K(t_1, t_2)$. Эти коэффициенты допускают дифференцирование по m_t и K_t, так как под интегралом стоит сглаживающая нормальная плотность.

В [14] изложены алгоритмы аналитического и статистического моделирования распределений (в том числе нормальных) в нелинейных МСтС. Алгоритмы аналитического и статистического моделирования для МСтС с СДРН, а также смешанные алгоритмы различной степени точности относительно шага интегрирования также представлены в [13].

4 Дискретная стохастическая система со сложными дробно-рациональными нелинейностями. Алгоритмическое обеспечение

Рассмотрим дискретную СтС с СДРН, описываемую уравнениями вида [10, 11]:

$$Y_{k+1} = a_k\,(\Theta, Y_k) + b_k\,(\Theta, Y_k)\, V_k^d\ \ (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{16}$$

Здесь Y_k — $(p \times 1)$-мерный вектор состояния, $Y_k \in \Delta^y$ (Δ^y — многообразие состояний); функции $a_k(\Theta, Y_k)$ и $b_k(\Theta, Y_k)$ имеют размерности $(p \times 1)$ и $(p \times m)$ соответственно; через V_k^d обозначен векторный дискретный шум, обладающий интенсивностью ν_k^d. В случае аддитивного шума, когда $b_k(\Theta, Y_k) = b_{0k}$, уравнение (16) примет вид:

$$Y_{k+1} = a_k Y_k + b_{0k} V_k^d\,.$$

В основе МНА лежат следующие соотношения и уравнения [10, 11]:

$$g_{1k}^N(\lambda) = \exp\left\{ i\lambda m_k - \frac{1}{2}\,\lambda^{\mathrm{T}} K_k \lambda \right\}\,;$$

$$g_{k_1k_2}^N = \exp\left\{ i\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} \bar{m}_2 - \frac{1}{2}\,\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} \bar{K}_2 \bar{\lambda} \right\}\,;$$

$$m_{k+1} = a_{1k} = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N a_k\,,\ \ m_1 = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N Y_1\,;$$

$$K_{k+1} = a_{2k} = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N \left[a_k a_k^{\mathrm{T}} \right] - \left[\mathsf{M}_{\Delta^y}^N a_k \right] \left[\mathsf{M}_{\Delta^y}^N a_k^{\mathrm{T}} \right] + \mathsf{M}_{\Delta^y}^N \left[b_k \nu_k^d b_k^{\mathrm{T}} \right]\,;$$

$$K_1 = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N \left[Y_1^0 Y_1^{0\mathrm{T}} \right]\,;$$

$$K(\Theta, l, h) = a_{3k} = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N \left[Y_l^0 a_h(Y_h)^{\mathrm{T}} \right]\,,\ \ K(\Theta, l, l) = K_l\ \ (l < h)\,;$$

$$K(\Theta, l, h) = K(\Theta, h, l)^{\mathrm{T}}\ \ (l > h)\,.$$

В основе МСЛ после статистической линеаризации функции $a_k(\Theta, Y_k)$ согласно

$$a_k\left(\Theta, Y_k\right) = a_{0k}\left(\Theta, m_k, K_k\right) + k_{1k}^a\left(\Theta, m_k, K_k\right) Y_k^0$$

будут лежать уравнения [10, 11]:

$$m_{k+1} = a_{0k}\,,\ \ m(1) = m_1\,;$$

$$K_{k+1} = k_{1k}^a K_k \left(k_{1k}^a\right)^{\mathrm{T}} + b_{0k} \nu_k^d b_{0k}^{\mathrm{T}}\,, \quad K(1) = K_1\,;$$

$$K(\Theta, l, h+1) = K(\Theta, l, h)(k_{1h}^a)^{\mathrm{T}}\,, \quad K(\Theta, l, l) = K_l\ \text{ при }\ l < h\,,$$

$$K(\Theta, l, h) = K(\Theta, h, l)^{\mathrm{T}}\ \text{ при }\ l > h\,.$$

Для определения стационарных СтП согласно МНА и МСЛ с характеристиками

$$m_k = m^*\,;\ \ K_k = K^*\,;\ \ K(\Theta, l, h) = k^*(r)\ \ (r = h - l)$$

используется уравнение

$$m^* = a_{1k}\left(\Theta, m^*, K^*\right)\,,$$

а также уравнения

$$K^* = a_{2k}\left(\Theta, m^*, K^*\right)\ ;$$

$$K* = k_1^a K^* \left(k_1^a\right)^{\mathrm{T}} + b_0 \nu_k^d b_0^{\mathrm{T}}\ ;$$

$$k^*\left(\Theta, r+1\right) = k(r)\left(k_1^a\right)^{\mathrm{T}}\ ,\ \ k^*(0) = K^*\ .$$

Как следует из уравнений МНА, необходимо уметь вычислять следующие интегралы:

$$I_{0k}^a = I_{0k}^a\left(\Theta, m_k, K_k\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[a_k\left(\Theta, Y_k\right)\right]\ ; \tag{17}$$

$$I_{1k}^a = I_{1k}^a\left(\Theta, m_k, K_k\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[a_k\left(\Theta, Y_k\right) Y_k^{0\mathrm{T}}\right]\ ; \tag{18}$$

$$I_{0k}^\sigma = I_{0k}^\sigma\left(\Theta, m_k, K_k\right) = \mathsf{M}_{\Delta^y}^N\left[\sigma\left(\Theta, Y_k\right)\right]\ \ \left(\sigma\left(\Theta, Y_k\right) = b_k \nu_k^d b_k^{\mathrm{T}}\right)\ .$$

Для МСЛ достаточно вычислить интеграл (17), причем интеграл (18) вычисляется по формуле:

$$k_{1k}^a = k_{1k}^a\left(\Theta, m_k, K_k\right) = \left[\frac{\partial}{\partial m_k} I_{0k}^a\left(\Theta, m_k, K_k\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\ .$$

5 Заключение

Рассмотрены непрерывные и дискретные СтС (в том числе и на гладких многообразиях) с винеровскими и пуассоновскими шумами и с СДРН. Такие модели описывают поведение ряда современных нано- и квантовооптических средств информатики. Приводятся уравнения МНА и МСЛ для аналитического моделирования нестационарных и стационарных нормальных процессов. Рассматриваются методы вычисления типовых интегралов для одно- и многомерных СДРН скалярного и векторного аргумента, получающихся из суперпозиции типовых ДРН.

Методическое и алгоритмическое обеспечение положено в основу модуля «StS-CFRN», входящего в библиотеку «StS-Analysis» [17]. Тестирование модуля проведено с помощью примеров П.1–П.3 и П.6.

Результаты допускают обобщение на случай дискретных СтС, а также интегродифференциальных и операторных СтС с СДРН, в том числе с автокоррелированными шумами.

Приложения

П.1. Для типовой ДРН вида $R^{\text{ДРН}}(y) = 1/(y^2 + b^2)$, учитывая соотношение [3]

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-h^2\eta^2}}{\eta^2 + b^2}\, d\eta = \frac{\pi}{2b}\, e^{h^2 b^2} \operatorname{erfc}\left(hb\right)\ \ \left(h^2 > 0\ ,\ \ b^2 > 0\right),$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf} x\,; \ \ \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt\,,$$

имеем следующее выражение для интеграла (13) при $h^2 = D_y/2$:

$$I_0 = \mathsf{M}^N \left[\frac{1}{Y^2 + b^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\eta^2/(2D_y)} d\eta}{\eta^2 + b^2} = \frac{\pi}{b}\, e^{b^2/(2D_y)} \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{\sqrt{2D_y}}\right).$$

Учитывая известное неравенство [12, 13]

$$\frac{\xi}{\xi^2+1} < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\xi^2} \operatorname{erfc}(\xi) < \frac{1}{2\xi}\,,$$

получим следующее неравенство для интеграла $I_0(\xi)$:

$$I_0^-(\xi) < I_0(\xi) < I_0^+(\xi) \quad \left(\xi^2 = \frac{b^2}{2D_y}\right);$$

$$I_0^+ = \frac{\pi}{b}\left(e^{\xi^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\xi}{2\xi^2+1}\right), \ \ I_0^- = \frac{\pi}{b}\left(e^{\xi^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi}\right).$$

Таким образом, для вычисления этого интеграла используются таблицы функций $\operatorname{erf}(\xi)$ или $\operatorname{erfc}(\xi)$ [12, 13] либо полученные неравенства.

П.2. Для СДРН $R^{\text{СДРН}}(y) = y^2/(y^2+b^2)$, учитывая соотношение [18]

$$\int\limits_0^\infty \frac{\eta^2 e^{-h^2\eta^2}}{\eta^2+b^2}\, d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2h} - \frac{\pi b}{2}\, e^{h^2b^2}\left[1 - \operatorname{erf}(bh)\right],$$

получаем

$$I_0^{\text{ДРН}} = \frac{\sqrt{\pi}}{h} - \pi b e^{h^2b^2}\left[1 - \operatorname{erf}(bh)\right] = \sqrt{2\pi D_y} - \pi b e^{b^2/(2D_y)}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2D_y}}\right]\right).$$

П.3. Для СДРН вида $R^{\text{СДРН}}(y) = (y+b)^{-1}\mathbf{1}(y)$ при $h^2 > 0$, $b > 0$, учитывая соотношение [3]

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-h^2\eta^2}}{\eta+b}\, d\eta = e^{-h^2b^2}\left[\sqrt{\pi} \int\limits_0^{h\sqrt{b}} e^{\eta^2} d\eta - \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,i(h^2b^2)\right]$$

(E_i — интегральная показательная функция [7, 12, 13]), имеем следующее выражение для интеграла (13) при $h^2 = D_y/2$:

$$I_0^{\text{ДРН}} = \mathsf{M}^N \left[\frac{1(y)}{Y+b} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{1}(\eta) e^{-\eta^2/(2D_y)}}{\eta + b}\, d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_y}}\, e^{-b^2/(2D_y)} \left[\sqrt{\pi} \int\limits_0^{\sqrt{b/(2D_y)}} e^{\eta^2}\, d\eta - \frac{1}{2}\, \mathrm{E}\, i \left(\frac{b^2}{2D_y} \right) \right].$$

П.4. Сложные нелинейности, приводимые к СДРН.

1. Если скалярная сложная нелинейность (СН) является ДРФ от $\sin y$ и $\cos y$, то полагают $u = \operatorname{tg}\, y/2$, так что

$$\sin y = \frac{2u}{1+u^2}\,; \quad \cos y = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,.$$

2. Если скалярная СН является ДРФ от $\operatorname{sh} y$ и $\operatorname{ch} y$, то полагают $u = \operatorname{th} y/2$, так что

$$\operatorname{sh} y = \frac{2u}{1-u^2}\,; \;\; \operatorname{ch} y = \frac{1+u^2}{1-u^2}\,.$$

3. Если скалярная СН является ДРФ от y и либо $(1-y^2)^{1/2}$, либо $(y^2-1)^{1/2}$, либо $(y^2+1)^{1/2}$, то задача сводится к случаям 1–2, если сделать соответствующие подстановки $y = \cos\, v$, или $y = \operatorname{ch} v$, или $y = \operatorname{sh} v$.
4. Если скалярная СН является ДРФ от y и либо $(y^2+1)^{1/2}$, либо $(y^2-1)^{1/2}$, то можно положить соответственно $u = y + (y^2 \pm 1)^{1/2}$. Тогда следует сделать подстановку

$$y = \frac{1}{2}\left(u \pm \frac{1}{u} \right)\,; \quad \left(y^2 \pm 1\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(u \pm \frac{1}{u} \right)\,.$$

5. Если скалярная СН является ДРФ от y и от $(ay^2+by+c)^{1/2}$, то задача сводится к случаям 3–4, если сделать подстановку

$$v = \frac{2ay+b}{\sqrt{|4ac-b^2|}}\,; \quad y = \frac{v\sqrt{|4ac-b^2|}-b}{2a}\,.$$

6. Если скалярная СН является ДРФ от y и $u = \sqrt{(ay+b)/(cy+d)}$, причем $|ad - bc| \neq 0$, то в качестве новой переменной берут u.

П.5. В основе моделей современных средств сейсмоударозащиты лежат упруго-пластические амортизирующие элементы [17, 19]. Как правило, их характеристики, описываются формулами П.1–П.4.

П.6. В основе модели лазерного интерферометра лежит следующее уравнение [20]:

$$\ddot{X}_t + \omega_0^2 X_t + \frac{c_0}{X_t^2 + c^2} = a - 2\varepsilon\omega_0 \dot{X}_t + bV\,. \tag{19}$$

Здесь ε, ω_0, c_0, c, a и b — постоянные параметры; V — гауссовский белый шум интенсивности ν.

Полагая $X_t = Y_1$ и $\dot Y_1 = Y_2$ и учитывая $\dot Y_2 = Y_2(dY_2/dY_1)$, получим следующие дифференциальные соотношения для фазового портрета рассматриваемой динамической системы при $a = 0$, $b = 0$ и $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dY_2}{dY_1} = -\frac{\omega_0^2 Y_1(Y_1^2 + c^2) + c_0}{Y_2(Y_1^2 + c^2)}\,; \quad \frac{Y_2^2}{2} + \Pi(Y_1) = \frac{Y_{20}^2}{2} + \Pi(Y_{10})\,,$$

где

$$\Pi\,(Y_1) = \int \left(\frac{\omega_0^2 Y_1}{2} + \frac{c_0}{Y_1^2 + c^2} \right) dY_1 = \frac{1}{2}\,\omega_0^2 Y_1^2 + \frac{c_0}{c}\,\mathrm{arctg}\,\frac{Y_1}{c} + const\,. \qquad (20)$$

Уравнения (19) при $a = 0$, $b = 1$ и $c_0 > 0$ допускают режим стационарных стохастических колебаний с одномерной плотностью, вычисляемой по формуле Гиббса [10]:

$$f_1^*\,(y_1, y_2) = const \cdot e^{-\alpha \mathcal{H}(y_1, y_2)}.$$

Здесь $\mathcal{H} = \mathcal{H}(y_1, y_2)$ — функция Гамильтона $\mathcal{H} = (Y_2^2/2) + \Pi(Y_1)$, где $\Pi(Y_1)$ определена в (20). Отсюда видно, что распределение Y_2 гауссовское, а распределение Y_1 негауссовское.

Уравнения МСЛ для определения вероятностных моментов первого и второго порядка имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot m_1 = m_2\,; \quad \dot m_2 = -\omega_0^2 m_1 - 2\varepsilon\omega_0 m_2 + R_0(m_1, D_1)\,; \\ \dot D_1 = 2K_{12}\,; \quad \dot D_2 = \nu - 2\lambda K_{12} - 4\varepsilon\omega_0 D_2\,; \\ \dot K_{12} = D_2 - \lambda D_1 - 2\varepsilon\omega_0 K_{12}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Здесь

$$\lambda = \lambda(m_1, D_1) = \omega_0^2 \left[1 - \frac{R_1(m_1, D_1)}{\omega_0^2} \right]\,;$$

$$R_0(m_1, D_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c_0}{\eta^2 + c^2}\, e^{-(\eta - m_1)^2/(2D_1)} d\eta =$$

$$= \frac{2c_0}{\sqrt{2\pi D_1}}\, e^{-m_1^2/(2D_1)} \int\limits_0^{\infty} e^{-\eta^2/(2D_1) + \eta(m_1/D_1)} \frac{d\eta}{\eta^2 + c^2}\,;$$

$$R_1(m_1, D_1) = \frac{\partial R_0(m_1, D_1)}{\partial m_1}\,.$$

Из (21) при $\varepsilon > 0$ для устойчивого стационарного режима имеем соотношения:

$$m_2^* = 0\,; \;\; m_1^* = R_0\,(m_1^*, D_1^*)\,\omega_0^{-2}\,; \;\; D_2^* = \alpha = \frac{\nu^*}{4\varepsilon\omega_0}\,; \;\; K_{12}^* = 0\,; \;\; D_1^* \lambda(m_1^*, D_1^*) = \alpha\,.$$

При аналитическом моделировании процессов в (21) использовались отрезки следующих степенных представлений функций $R_0 = R_0(m_1, D_1)$, $R_1 = R_1(m_1, D_1)$ и $\lambda = \lambda(m_1, D_1)$:

$$R_0 = \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r^{R_0}(D_1) R_{0r}(\xi_1^2)\,;$$

$$R_1 = \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r^{R_1}(D_1) R_{1r}(\xi_1)\,;$$

$$\lambda = \lambda(m_1, D_1) = \omega_0^2 \left[1 - \frac{R_1(m_1, D_1)}{\omega_0^2}\right].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\gamma_r^{R_0}(D_1) = \frac{c_0}{c^{2(r+1)}}\, D_1^r\,; \quad \gamma_r^{R_1}(D_1) = D_1^{r-1/2}\,;$$

$$R_{0r}\left(\xi_1^2\right) = e^{-\xi_1^2/2} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{[2(r+\rho)-1]!!}{(2\rho)!}\, \xi_1^{2\rho}\,; \quad R_{1r}\left(\xi_1\right) = 2\xi_1 \frac{\partial R_{0r}(\xi_1^2)}{\partial \xi_1^2}\,.$$

При их выводе были использованы следующие интегралы и ряды [7, 10, 13]:

$$\int\limits_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-at^2/2}\, dt = \frac{n!}{2^n a^{n+1}}\,; \quad \int\limits_0^{\infty} t^{2n} e^{-at^2/2}\, dt = \frac{(2n-1)!!}{2a^n} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{2p+1} e^{-(at^2/2)+bt}\, dt = \int\limits_0^{\infty} t^{2p+1} e^{-at^2/2} \left(e^{bt} + e^{-bt}\right)\, dt\,;$$

$$e^x + e^{-x} = 2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{x^{2\gamma}}{(2\gamma)!}\,; \quad (1+x)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^r\,.$$

Как показано в [17], точность и чувствительность алгоритмов в стационарном режиме при малых отношениях сигнал/шум ξ_1 составляют 0,1%–1%, а при больших — 10%–20%. Для типовых технических применений этого вполне достаточно.

Литература

1. *Синицын И. Н., Синицын В. И.* Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными нелинейностями // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 2–4.

2. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Сергеев И. В., Белоусов В. В., Шоргин В. С.* Математическое обеспечение аналитического моделирования стохастических систем со сложными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2014. Т. 24. № 3. С. 4–29.
3. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р.* Моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными иррациональными нелинейностями // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 2–8.
4. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Сергеев И. В., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Шоргин В. С.* Математическое обеспечение моделирования нормальных процессов в стохастических системах со сложными иррациональными нелинейностями // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. № 2. С. 3–19.
5. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р.* Моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными трансцендентными нелинейностями // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 23–29.
6. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р.* Аналитическое моделирование нормальных процессов в стохастических системах со сложными дробно-рациональными нелинейностями // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 3–17.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике / Пер. с англ. — М.: Наука, 1984. 831 с. (*Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook. — New-York, NY, USA: McGraw-Hill, 1968. 943 p.)
8. *Зверович Э. И.* Вещественный и комплексный анализ: В 6 ч. Кн. 2. Ч. 2. Интегральное исчисление функций скалярного аргумента. — Минск: Высшая школа, 2008. 319 с.
9. *Куликов В.* Рациональная функция // Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. — М.: Советская энциклопедия, 1978. Т. 4. С. 918–919.
10. *Пугачёв В. С., Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.
11. *Синицын И. Н., Синицын В. И.* Лекции по нормальной и эллипсоидальной аппроксимации распределений в стохастических системах. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2013. 488 с.
12. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовича, И. Стигана. — М.: Наука, 1979. 832 с.
13. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Вычисление функций на ЭВМ: Справочник. — Киев: Наукова Думка, 1984. 599 с.
14. *Синицын И. Н.* Параметрическое статистическое и аналитическое моделирование распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 2. С. 4–16.
15. *Синицын И. Н.* Аналитическое моделирование распределений методом ортогональных разложений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 17–24.
16. *Синицын И. Н.* Применение ортогональных разложений для аналитического моделирования многомерных распределений в нелинейных стохастических системах на многообразиях // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. № 3. С. 3–22.

17. *Синицын И. Н., Сергеев И. В., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В., Шоргин В. С., Горшенин А. К.* Руководство пользователя библиотеки «StS-ANALYSIS» (версия 2.0) / Под ред. И. Н. Синицына. — М.: ИПИ ФИЦ ИУ РАН, 2016 (в печати). Препринт.
18. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.
19. *Синицын И. Н., Сергеев И. В., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Белоусов В. В.* Математическое обеспечение параметрического моделирования распределений в интегродифференциальных стохастических системах // Системы и средства информатики, 2014. Т. 24. № 1. С. 4–45.
20. *Морозов А. Н., Назолин А. Л.* Динамические системы с флуктуирующим временем. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. 200 с.

Поступила в редакцию 23.12.15

MATHEMATICAL SOFTWARE FOR ANALYTICAL MODELING OF NORMAL PROCESSES IN STOCHASTIC SYSTEMS WITH COMPLEX FRACTION-RATIONAL NONLINEARITIES

I. N. Sinitsyn, V. I. Sinitsyn, I. V. Sergeev, E. R. Korepanov, V. V. Belousov, and V. S. Shorgin

Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Mathematical software for analytical modeling of normal stochastic processes in differential and discrete stochastic systems (StS) with complex fraction-rational nonlinearities (CFRN) is considered. Typical presentation of CFRN is given. Accuracy and sensitivity equations based on the normal approximation (NAM) and the statistical linearization methods (SLM) are given. Basic analytical and numerical methods for computing NAM (SLM) integrals are discussed. Special attention is paid to the software tool «StS-CFRN. Analysis». The Appendix contains test examples and some applications. Some generalizations are mentioned.

Keywords: analytical modeling; complex fraction-rational nonlinearities (CFRN); module "StS-CFRN. Analysis;" method of statistical linearization (MSL); normal approximation method (NAM); stochastic systems (StS)

DOI: 10.14357/08696527160114

Acknowledgments

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-07-02244).

References

1. Sinitsyn, I. N., and V. I. Sinitsyn. 2014. Analiticheskoe modelirovanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnymi nelineynostyami [Analytical modeling of normal processes in stochastic systems with complex nonlinearities]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(3):2–4.
2. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, I. V. Sergeev, V. V. Belousov, and V. S. Shorgin. 2014. Matematicheskoe obespechenie analiticheskogo modelirovaniya stokhasticheskikh sistem so slozhnymi nelineynostyami [Mathematical software for analytical modeling of stochastic systems with complex nonlinearities]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 24(3):4–29.
3. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, and E. R. Korepanov.2015. Modelirovanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnymi irratsional'nymi nelineynostyami [Modeling of normal processes in stochastic systems with complex irrational nonlinearities]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(1):2–8.
4. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, I. V. Sergeev, E. R. Korepanov, V. V. Belousov, and V. S. Shorgin. 2015. Matematicheskoe obespechenie modelirovaniya normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnymi irratsional'nymi nelineynostyami [Mathematical software for modeling of normal processes in stochsatic systems with complex irrational nonlinearities]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 25(2): 3–19.
5. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, and E. R. Korepanov. 2015. Modelirovanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnymi transtsendentnymi nelineynostyami [Modeling of normal processes in stochastic systems with complex transcendental nonliearities]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(2):23–29.
6. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, and E. R. Korepanov. 2015. Analiticheskoe modelirovanie normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh so slozhnymi drobnoratsional'nymi nelineynostyami [Analytical modeling of normal processes in stochastic systems with complex fractional-rational nonlinearities]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(4):3–17.
7. Korn, G. A., and T. M. Korn. 1968. *Mathematical handbook*. New-York, NY: McGraw-Hill. 943 p.
8. Zverovich, E. I. 2008. *Veshchestvennyy i kompleksnyy analiz*: V 6 ch. Kn. 2. Ch. 2. Integral'noe ischislenie funktsiy skalyarnogo argumenta [Real and complex analysis: In 6 parts. Bk. 2. Pt. 2. Integral calculus of sealer argument]. Minsk: Vysshaya Shkola. 319 p.
9. Kulikov, V. 1978. Ratsional'naya fukntsiya [Rational function]. *Matematicheskaya entsiklopediya* [Mathematical encyclopedia]. Ed. I. M. Vinogradov. Moscow: Sovetskaya Entsiklopediya. 4:918–919.
10. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 2001. *Stochastic systems. Theory and applications.* Singapore: World Scientific. 908 p.
11. Sinitsyn, I. N., and V. I. Sinitsyn. 2013. *Lektsii po normal'noy i ellipsoidal'noy approksimatsii raspredeleniy v stokhasticheskikh sistemakh* [Lectures on normal and ellipsoidal approximation of distributions in stochastic systems]. Moscow: TORUS PRESS. 488 p.
12. Abramovich, M., and I. Stigan, eds. 1979. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam* [Handbook on special functions]. Moscow: Nauka. 832 p.

13. Popov, B. A., and G. S. Tesler. 1984. *Vychislenie funktsiy na EVM: Spravochnik* [Calculation of functions on a computer: Handbook]. Kiev: Naukova Dumka. 599 p.
14. Sinitsyn, I. N. 2013. Parametricheskoe statisticheskoe i analiticheskoe modelirovanie raspredeleniy v nelineynykh stokhasticheskikh sistemakh na mnogoobraziyakh [Parametric statistical and analytical modeling of distributions in stochastic systems on manifolds]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 7(2):4–16.
15. Sinitsyn, I. N. 2015. Analiticheskoe modelirovanie raspredeleniy metodom ortogonal'nykh razlozheniy v nelineynykh stokhasticheskikh sistemakh na mnogoobraziyakh [Analytical modeling of distributions by orthogal expansions method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(3):17–24.
16. Sinitsyn, I. N. 2015. Primenenie ortogonal'nykh razlozheniy dlya analiticheskogo modelirovaniya mnogomernykh raspredeleniy v nelineynykh stokhasticheskikh sistemakh na mnogoobraziyakh [Application of orthogonal expansions for analytical modeling of multidimensional distributions in nonlinear stochastic systems on manifolds]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 25(3):3–22.
17. Sinitsyn, I. N., I. V. Sergeev, V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, V. V. Belousov, V. S. Shorgin, and A. K. Gorshenin. 2016 (in press). *Rukovodstvo biblioteki "StS-ANALYSIS" (versiya 2.0)* ["StS-ANALYSIS" (version 2.0 Manual]. Ed. I. N. Sinitsyn. Moscow: IPI FITs IU RAN. Preprint.
18. Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik. 1963. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of intergrals, sums, series, and products]. Moscow: GIFML. 1100 p.
19. Sinitsyn, I. N., I. V. Sergeev, V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and V. V. Belousov. 2014. Matematicheskoe obespechenie parametricheskogo modelirovaniya raspredeleniy v integrodifferentsial'nykh stokhasticheskikh sistemakh [Mathematical software for parametric modeling of distributions in integrodifferential stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 24(1):4–45.
20. Morozov, A. N., and A. L. Nazolin. 2001. *Dinamicheskie sistemy s fluktuiruyushchim vremenem* [Dynamical systems with time fluctuating]. Moscow: Izd-vo MGU im. N. E. Baumana. 200 p.

Received December 23, 2015

Contributors

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, Head of Department, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

Sinitsyn Vladimir I. (b. 1968) — Doctor of Science in physics and mathematics, associate professor, Head of Department, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; VSinitsyn@ipiran.ru

Sergeev Igor V. (b. 1965) — Candidate of Science (PhD) in technology, Deputy Director, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian

Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; ISergeev@ipiran.ru

Korepanov Eduard R. (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in technology, Head of Laboratory, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; Ekorepanov@ipiran.ru

Belousov Vasiliy V. (b. 1977) — Candidate of Science (PhD) in technology, Head of Laboratory, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; VBelousov@ipiran.ru

Shorgin Vsevolod S. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; VShorgin@ipiran.ru