



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. T. Zavtrak, L. I. Komarov, I. D. Feranchuk, Theory of
the strong coupling of a particle and a quantized field with
internal degrees of freedom,
TMF, 1981, Volume 47, Number 1, 55–66

<https://www.mathnet.ru/eng/tmf2368>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read
and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

April 21, 2025, 20:38:54



ТЕОРИЯ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ЧАСТИЦЫ И КВАНТОВАННОГО ПОЛЯ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Завтрак С. Т., Комаров Л. И., Феранчук И. Д.

Построено каноническое преобразование Боголюбова в теории сильной связи нерелятивистского нуклона с π -мезонным полем и получены уравнения, решение которых позволяет рассчитать наблюдаемые характеристики «физического» нуклона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема построения эффективного метода, позволяющего рассматривать сильные взаимодействия квантовых полей вне рамок теории возмущений, вызывает в настоящее время большой интерес. При этом существенно, чтобы такой метод, если его удастся построить, можно было апробировать в задаче, позволяющей непосредственно связать теоретические результаты с характеристиками реальных физических объектов. Нам представляется, что наиболее последовательный метод сильной связи был предложен Боголюбовым [1] и Тябликовым [2] при рассмотрении проблемы «полярона», и в настоящей работе мы применяем этот метод в представляющей непосредственный физический интерес задаче о нерелятивистском нуклоне, сильно взаимодействующем с π -мезонным полем [3, 4].

Методы теории возмущений по константе связи g в рассматриваемой задаче неприменимы вследствие сильного взаимодействия нуклона с полем, и необходимо использовать приближение сильной связи Боголюбова — Тябликова, при котором строится разложение по обратным степеням g . Этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах [5–7].

Это приближение уже в низшем порядке приводит к рассмотрению «физического» нуклона, состоящего из «голой» частицы с массой M , и связанного с ней классического мезонного поля, обладающего эффективной массой M_f . При этом, в отличие от задачи о «поляроне», рассмотренной в [1, 2], где $M_f \gg M$, для нерелятивистского нуклона принципиальным является выполнение противоположного условия. Действительно, нерелятивистское приближение по определению применимо, если масса нуклона велика по сравнению с энергией $E_{св}$ π -мезон-нуклонного взаимодействия. Как будет показано ниже, для нуклона $E_{св}$ и M_f являются величинами одного порядка и как следствие $M \gg M_f$. Это обстоятельство приводит к существенной перестройке ряда по степеням g^{-1} по сравнению с рассмотренным в [1, 2, 5, 6].

Вторая особенность рассматриваемой задачи обусловлена наличием внутренних степеней свободы (спина, изоспина, четности) у частицы и

поля, вследствие чего возникает дополнительное вырождение основного состояния системы. Как будет показано в настоящей работе, это обстоятельство приводит к необходимости не только построения новых интегралов движения (эта задача рассмотрена в [5, 6]), но и более тщательного изучения проблемы разделения переменных, требующего определенных предположений о структуре классического поля, связанного с частицей.

При использовании стандартной теории возмущений в нулевом порядке необходимо решить линейное уравнение Шредингера, а расчет высших порядков сводится к вычислению матричных элементов от оператора возмущения. Существенно более сложная ситуация возникает в рассматриваемом случае $g \gg 1$, когда уже в низшем порядке необходимо решать систему нелинейных самосогласованных уравнений. При этом наблюдаемые характеристики «физического» нуклона, вообще говоря, существенно отличаются от характеристик «голой» частицы, являющихся параметрами исходного гамильтониана. Для определения этих параметров в настоящей работе получены явные формулы, выражающие магнитные моменты протона и нейтрона через функции нулевого приближения.

Следует также отметить, что рассмотренные в работе вопросы имеют существенное значение в любой задаче о сильном взаимодействии квантовых полей с внутренними степенями свободы.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ π -МЕЗОН-НУКЛОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим в качестве исходного следующий гамильтониан [3, 4]:

$$(2.1) \quad \hat{H} = -\frac{1}{2M} \Delta_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \omega_k (a_{k\alpha} + a_{k\alpha} + a_{k\alpha} a_{k\alpha}^+) + \\ + \frac{g}{m} \hat{\tau}_\alpha \hat{\sigma}_i \frac{\partial \varphi_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \frac{\hbar}{m} \varphi_\alpha^2(\mathbf{r}), \\ \varphi_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_k}} (e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} a_{k\alpha} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} a_{k\alpha}^+),$$

где M — масса «голого» нуклона, g и \hbar — безразмерные константы связи, m — масса π -мезона, $\hat{\sigma}_i$ и $\hat{\tau}_\alpha$ — соответственно спиновая и изоспиновая матрицы Паули ($i, \alpha = 1, 2, 3$), $a_{k\alpha}^+$ и $a_{k\alpha}$ — операторы рождения и уничтожения π -мезона в определенном зарядовом состоянии с энергией $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$.

Вследствие инвариантности гамильтониана (2.1) по отношению к преобразованиям трансляции и вращения в координатном и изоспиновом пространствах сохраняются операторы полного импульса $\hat{\mathbf{P}}$, квадрата и третьей проекции изоспина $\hat{\mathbf{T}}$ и момента $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ (но только в системе, где полный импульс $\hat{\mathbf{P}} = 0$).

Перейдем к действительным операторам координаты $q_{k\alpha}$ и импульса $p_{k\alpha}$:

$$q_{k\alpha} = \frac{a_{k\alpha} + a_{-k\alpha}^+}{g\sqrt{2}}, \quad p_{k\alpha} = ig \frac{a_{k\alpha}^+ - a_{-k\alpha}}{\sqrt{2}}.$$

В результате гамильтониан (2.1) и интегралы движения системы могут

быть записаны в следующем виде:

$$(2.2) \quad \hat{H} = -\frac{1}{2M} \Delta_r + \frac{g^2}{2} \int dk \omega_k q_{k\alpha} q_{-k\alpha} + \frac{1}{2g^2} \int dk \omega_k p_{k\alpha} p_{-k\alpha} + \\ + \frac{g^2}{m} \hat{\tau}_\alpha \hat{\sigma}_i \frac{\partial \varphi_\alpha(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \frac{hg^2}{m} \varphi_\alpha^2(\mathbf{r}), \quad \varphi_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{dk}{V \omega_k} q_{k\alpha} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

$$(2.3) \quad \hat{P}_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \int dk k_\mu q_{k\alpha} p_{k\alpha}, \quad \hat{T}_\alpha = \frac{1}{2} \hat{\tau}_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int dk q_{k\beta} p_{k\gamma}, \\ \hat{\Sigma}_\mu = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_\mu - i \varepsilon_{\mu\nu\rho} x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\rho} + \varepsilon_{\mu\nu\rho} \int dk k_\nu q_{k\lambda} \frac{\partial p_{k\lambda}}{\partial k_\rho}.$$

Решение стационарного уравнения Шредингера $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ необходимо строить таким образом, чтобы в любом приближении волновая функция являлась собственной и для операторов \hat{P} , \hat{T}^2 , \hat{T}_3 , а при $\hat{P}=0$ — и для $\hat{\Sigma}^2$ и $\hat{\Sigma}_3$.

Как уже было указано выше, массу «голого» нуклона следует считать большой по сравнению с энергией взаимодействия, имеющей порядок g^2 . Для того чтобы учесть это обстоятельство в явном виде, положим $M = = g^2 M_0$, где M_0 — величина нулевого порядка, и в результате приходим к задаче о сильном взаимодействии тяжелой частицы с квантовым полем, рассмотренной в работе [7] для случая скалярного поля. Согласно [7] в такой задаче разложение по степеням g^{-1} необходимо перестроить таким образом, чтобы оператор кинетической энергии нуклона учитывать уже в низшем порядке, несмотря на то что он содержит малый параметр g^{-2} . Упорядочить разложение в этом случае можно, если считать оператор $-i\partial/\partial x_i$ величиной порядка g^2 .

Для построения канонического преобразования (КП), которое обеспечит выполнение законов сохранения в пределе сильной связи, необходимо согласно [1, 2] рассмотреть, как преобразуется оператор координаты поля при преобразовании группы симметрии гамильтониана. Так как преобразование трансляции рассматривалось ранее [1, 2], исследуем вращение в изотопическом пространстве. Как известно, при таких вращениях вектор $q_{k\alpha}$ преобразуется следующим образом:

$$(2.4) \quad q_{k\alpha}' = U_{\alpha\beta} q_{k\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

где $U_{\alpha\beta}$ — ортогональная матрица, зависящая от 3 параметров группы вращений. Согласно [8] в рассматриваемой задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем наиболее удобной является векторная параметризация группы $O(3)$, предложенная Федоровым [9]. При этом матрице $U_{\alpha\beta}$ произвольного ортогонального преобразования сопоставлен вещественный

вектор $\mathbf{a} = \mathbf{n} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$, где единичный вектор \mathbf{n} направлен вдоль оси вращения, θ — угол поворота вокруг этой оси. Выпишем выражение для матрицы $U_{\alpha\beta}$ при такой параметризации:

$$(2.5) \quad U_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{2}{1+a^2} (a_\alpha a_\beta - a^2 \delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\gamma).$$

Выражение для инвариантного объема на группе при данной параметризации есть $da/\pi^2(1+a^2)^2$.

По общим правилам (см., например, [10]) можно построить явное выражение для генераторов группы вращений

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \hat{L}_\alpha(\mathbf{a}) &= -\frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta \frac{\partial}{\partial a_\gamma} + a_\alpha a_\beta \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right), \\ \hat{\tilde{L}}_\alpha(\mathbf{a}) &= \frac{i}{2} \left(\frac{\partial}{\partial a_\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta \frac{\partial}{\partial a_\gamma} + a_\alpha a_\beta \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right), \end{aligned}$$

обладающих всеми свойствами операторов момента, т. е.

$$(2.7) \quad \begin{aligned} [\hat{L}_\alpha(\mathbf{a}), \hat{L}_\beta(\mathbf{a})] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma(\mathbf{a}), \quad [\hat{\tilde{L}}_\alpha, \hat{\tilde{L}}_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\tilde{L}}_\gamma, \\ \hat{L}^2 &= \hat{\tilde{L}}^2, \quad [\hat{L}_\alpha, \hat{\tilde{L}}_\beta] = 0, \quad \hat{L}_\alpha(\mathbf{a}) = -U_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) \hat{\tilde{L}}(\mathbf{a}), \\ [L_\alpha, U_{\beta\gamma}] &= i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda} U_{\lambda\gamma}, \quad [\hat{L}_\alpha, U_{\beta\gamma}] = i\varepsilon_{\alpha\gamma\lambda} U_{\beta\lambda}. \end{aligned}$$

Основная идея КП, предложенного Боголюбовым [1] в теории сильной связи, состоит в том, чтобы из полевых переменных системы выделить часть, которая связана с группой симметрии гамильтониана и должна обеспечить выполнение законов сохранения. В качестве таких переменных выбираются параметры соответствующей группы, поэтому в рассматриваемом нами случае введем следующее преобразование координаты поля:

$$(2.8) \quad q_{k\alpha} = U_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) e^{-ikr_j} \left(u_{k\beta} + \frac{1}{g} Q_{k\beta} \right),$$

где $u_{k\alpha}$ — классическая компонента π -мезонного поля, возникновение которой следует учитывать в пределе сильной связи [2], r_j и \mathbf{a} — параметры соответственно группы трансляций и группы вращений, которые являются новыми коллективными переменными, причем канонически-сопряженные им импульсы должны совпадать соответственно с полным импульсом и изоспином поля [5, 6].

Следует отметить, что, в отличие от работ [1, 2, 5, 6], новые переменные r_j и \mathbf{a} мы выделяем только из полевых координат, не затрагивая переменные нуклона. Как будет видно из дальнейшего, такая форма КП позволяет дать более наглядную физическую интерпретацию результатов. В преобразование (2.8) мы не вводили переменных, описывающих пространственное вращение, т. к. закон сохранения момента должен рассматриваться только в системе с импульсом $\hat{\mathbf{P}}=0$.

Для того чтобы число переменных в системе осталось неизменным, наложим, так же как и в работах [1, 2, 5–7], на новые полевые координаты $Q_{k\alpha}$ шесть дополнительных условий, которые выберем в виде

$$(2.9) \quad \int dk N_{\alpha\beta}^{(s)}(k) Q_{k\beta} = 0, \quad s=1, 2.$$

Числа $N_{\alpha\beta}^{(s)}(k)$ будут определены в дальнейшем.

Перейдем теперь к построению оператора импульса $p_{k\alpha}$. По определению

$$p_{k\alpha} = -i \frac{\partial}{\partial q_{k\alpha}} = -i \left\{ \frac{\partial x_\mu^f}{\partial q_{k\alpha}} \frac{\partial}{\partial x_\mu^f} + \frac{\partial a_\nu}{\partial q_{k\alpha}} \frac{\partial}{\partial a_\nu} + \int d\mathbf{p} \frac{\partial Q_{p\beta}}{\partial q_{k\alpha}} \frac{\partial}{\partial Q_{p\beta}} \right\}.$$

Используя (2.8), находим

$$\frac{1}{g} \frac{\partial Q_{p\beta}}{\partial q_{k\alpha}} = U_{\alpha\beta} e^{ikr_j} \delta_{kp} + \left(u_{p\beta} + \frac{1}{g} Q_{p\beta} \right) i p_\mu \frac{\partial x_\mu^f}{\partial q_{k\alpha}} +$$

$$+ \frac{\partial U_{\gamma\beta}}{\partial a_\nu} \frac{\partial a_\nu}{\partial q_{k\alpha}} U_{\gamma\lambda} \left(u_{p\lambda} + \frac{1}{g} Q_{p\lambda} \right).$$

Обозначим

$$(2.10) \quad \frac{\partial x_\mu^f}{\partial q_{k\alpha}} = i U_{\alpha\gamma} e^{ikr_f} M_\mu^\gamma(\mathbf{k}), \quad \frac{\partial U_{\gamma\beta}}{\partial a_\nu} \frac{\partial a_\nu}{\partial q_{k\alpha}} U_{\gamma\lambda} = \varepsilon_{\beta\lambda i} U_{\alpha\gamma} \Gamma_i^\gamma(\mathbf{k}) e^{ikr_f}.$$

Так же как и в работах [1, 2, 5-7], выразив $Q_{k\alpha}$ через $q_{k\alpha}$ из (2.8) и подставив в (2.9), а затем продифференцировав (2.9) по $q_{k\alpha}$, получаем систему уравнений для определения $M_\mu^\gamma(\mathbf{k})$ и $\Gamma_i^\gamma(\mathbf{k})$:

$$(2.11) \quad \int d\mathbf{p} N_{\sigma\beta}^s(\mathbf{p}) \left\{ \varepsilon_{\beta\lambda i} \Gamma_i^\gamma(\mathbf{k}) \left(u_{p\lambda} + \frac{1}{g} Q_{p\lambda} \right) - \left(u_{p\beta} + \frac{1}{g} Q_{p\beta} \right) p_\mu M_\mu^\gamma(\mathbf{k}) \right\} + N_{\sigma\gamma}^s(\mathbf{k}) = 0.$$

Решение системы (2.11) можно представить в виде разложения по степеням g^{-1} : $\Gamma_i^\gamma(\mathbf{k}) = \Gamma_i^{\gamma 0} + \Gamma_i^{\gamma 1} + \dots$, $M_\mu^\gamma(\mathbf{k}) = M_\mu^{\gamma 0} + M_\mu^{\gamma 1} + \dots$.

Наложим на числа $N_{\alpha\beta}^{(s)}(\mathbf{k})$ дополнительные условия

$$(2.12) \quad \int d\mathbf{k} N_{\sigma\beta}^{(1)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\beta\lambda i} u_{k\lambda} = 0, \quad \int d\mathbf{k} N_{\sigma\beta}^{(1)}(\mathbf{k}) k_\mu u_{k\beta} = \delta_{\sigma\mu},$$

$$(2.13) \quad \int d\mathbf{k} N_{\sigma\beta}^{(2)}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\beta\lambda i} u_{k\lambda} = -\delta_{\sigma i}, \quad \int d\mathbf{k} N_{\sigma\beta}^{(2)}(\mathbf{k}) k_\mu u_{k\beta} = 0.$$

В результате

$$(2.14) \quad M_\sigma^{\gamma 0}(\mathbf{k}) = N_{\sigma\gamma}^{(1)}(\mathbf{k}), \quad \Gamma_\sigma^{\gamma 0}(\mathbf{k}) = N_{\sigma\gamma}^{(2)}(\mathbf{k}),$$

$$M_\sigma^{\gamma 1}(\mathbf{k}) = \frac{1}{g} \Gamma_i^{\gamma 0} \int d\mathbf{p} M_\sigma^{\beta 0}(\mathbf{p}) \varepsilon_{\beta\lambda i} Q_{p\lambda} - \frac{1}{g} M_\mu^{\gamma 0}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{p} M_\sigma^{\beta 0}(\mathbf{p}) p_\mu Q_{p\beta},$$

$$\Gamma_\sigma^{\gamma 1}(\mathbf{k}) = \frac{1}{g} \Gamma_i^{\gamma 0}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{p} \Gamma_\sigma^{\beta 0}(\mathbf{p}) \varepsilon_{\beta\lambda i} Q_{p\lambda} - \frac{1}{g} M_\mu^{\gamma 0}(\mathbf{k}) \int d\mathbf{p} \Gamma_\sigma^{\beta 0}(\mathbf{p}) p_\mu Q_{p\beta}.$$

Выражения для операторов импульса поля $p_{k\alpha}$ при этом имеют вид

$$p_{k\alpha} = U_{\alpha\gamma}(\mathbf{a}) e^{ikr_f} \left[M_\mu^\gamma(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial x_\mu^f} - \Gamma_\sigma^\gamma(\mathbf{k}) \hat{L}_\sigma(\mathbf{a}) + g P_{k\gamma} \right],$$

где

$$P_{k\gamma} = P_{k\gamma} - M_\mu^\gamma(\mathbf{k}) \int d\mathbf{p} p_\mu \left(u_{p\beta} + \frac{1}{g} Q_{p\beta} \right) P_{p\beta} -$$

$$- \varepsilon_{\lambda\beta\sigma} \Gamma_\sigma^\gamma(\mathbf{k}) \int d\mathbf{p} \left(u_{p\lambda} + \frac{1}{g} Q_{p\lambda} \right) P_{p\beta},$$

$$P_{k\gamma} \equiv -i\partial/\partial Q_{k\gamma}.$$

Для того чтобы учесть зависимость энергии системы от интегралов движения уже в нулевом по g^{-1} приближении, необходимо, так же как и в [5-7], считать, что $\hat{L}_\alpha(\mathbf{a})$ и $-i\partial/\partial x_\mu^f$ имеют порядок g^2 . В этом случае операторы импульса поля $p_{k\alpha}$, а, следовательно, и гамильтониан \hat{H} системы могут быть представлены в виде разложения по степеням g^{-1} : $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \dots$, где

$$(2.15) \quad \hat{H}_0 = -\frac{1}{2M} \Delta_r - \frac{1}{2g^2 A} \Delta_{r_f} + \frac{1}{4g^2 B} \hat{L}^2(\mathbf{a}) + \frac{g^2}{2} \int d\mathbf{k} \omega_k u_{k\alpha} u_{k\alpha}^* +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ig^2}{m(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_f)} k_\mu \hat{\sigma}_\mu U_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) \tau_\alpha u_{\mathbf{k}\beta} + \\
& + \frac{hg^2}{m(2\pi)^3} \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2}}} e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_f)} u_{\mathbf{k}_1\alpha} u_{\mathbf{k}_2\alpha},
\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}
(2.16) \quad & \int M_\mu^{\gamma 0}(\mathbf{k}) M_\nu^{\gamma 0}(-\mathbf{k}) \omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} = -\frac{1}{A} \delta_{\mu\nu}, \\
& \int d\mathbf{k} \Gamma_\sigma^{\gamma 0}(\mathbf{k}) \Gamma_\lambda^{\gamma 0}(-\mathbf{k}) \omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2B} \delta_{\sigma\lambda}, \quad \int d\mathbf{k} M_\mu^{\gamma 0}(\mathbf{k}) \Gamma_\sigma^{\gamma 0}(-\mathbf{k}) \omega_{\mathbf{k}} = 0.
\end{aligned}$$

С учетом (2.16) \hat{H}_1 выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
(2.17) \quad \hat{H}_1 = & \frac{1}{Ag^3} \int d\mathbf{k} M_\mu^{\beta 0}(\mathbf{k}) Q_{\mathbf{k}\beta} k_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu^f} \frac{\partial}{\partial x_\nu^f} + \\
& + \frac{1}{4Bg^3} \int d\mathbf{k} \Gamma_j^{\beta 0}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\beta\lambda i} Q_{\mathbf{k}\lambda} \{ \hat{L}_i(\mathbf{a}) \hat{L}_j(\mathbf{a}) + \hat{L}_j(\mathbf{a}) \hat{L}_i(\mathbf{a}) \} - \\
& - \frac{1}{g^3} \int d\mathbf{k} Q_{\mathbf{k}\lambda} \left\{ \frac{1}{2B} M_\mu^{\beta 0}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\beta\lambda i} + \frac{1}{A} \Gamma_i^{\lambda 0}(\mathbf{k}) k_\mu \right\} \hat{L}_i(\mathbf{a}) \frac{\partial}{\partial x_\mu^f} + \\
& + \frac{1}{g} \int d\mathbf{k} \left\{ \omega_{\mathbf{k}} M_\mu^{\gamma 0}(-\mathbf{k}) + \frac{1}{A} k_\mu u_{\mathbf{k}\gamma} \right\} P_{\mathbf{k}\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\mu^f} - \\
& - \frac{1}{g} \int d\mathbf{k} \left\{ \omega_{\mathbf{k}} \Gamma_i^{\gamma 0}(-\mathbf{k}) - \frac{1}{2B} \varepsilon_{\lambda\gamma i} u_{\mathbf{k}\lambda} \right\} P_{\mathbf{k}\gamma} \hat{L}_i(\mathbf{a}) + \\
& + \frac{ig}{m(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_f)} k_\mu \hat{\sigma}_\mu \hat{\tau}_\alpha U_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) Q_{\mathbf{k}\beta} + g \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}\alpha}^* Q_{\mathbf{k}\alpha} + \\
& + \frac{2hg}{m(2\pi)^3} \iint \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2}}} e^{i(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)(\mathbf{r}-\mathbf{r}_f)} u_{\mathbf{k}_1\alpha} Q_{\mathbf{k}_2\alpha}.
\end{aligned}$$

Используя (2.12) – (2.14), находим, что операторы полного импульса и изотопического момента системы в новых переменных имеют вид

$$(2.18) \quad \hat{P}_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{\partial}{\partial x_\mu^f}, \quad \hat{T}_\mu = \frac{1}{2} \tau_\mu + \hat{L}_\mu(\mathbf{a}).$$

Дальнейшие вычисления в основном аналогичны тем, которые были проделаны в работах [1, 2, 5–7]. Волновую функцию «физического» нуклона и энергию ищем в виде ряда по степеням g^{-1} :

$$(2.19) \quad |\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle + |\Psi_1\rangle + \dots, \quad E = E_0 + E_1 + \dots$$

Причем волновая функция $|\Psi_0\rangle$ является вакуумным состоянием для квантов поля, определяемого операторами $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ и $P_{\mathbf{k}\alpha}$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$(2.20) \quad \hat{H}_0 |\Psi_0\rangle = E_0 |\Psi_0\rangle,$$

не содержащему операторов поля, поэтому она может быть представлена в виде

$$(2.21) \quad |\Psi_0\rangle = |\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_f, \mathbf{a})\rangle \Theta(Q_{\mathbf{k}\alpha}),$$

а уравнение первого порядка дает

$$(2.22) \quad (\hat{H}_0 - E_0) |\Psi_1\rangle = (E_1 - \hat{H}_1) |\Psi_0\rangle.$$

Из (2.20) – (2.22) с учетом условия нормировки для $|\Phi_0\rangle$ находим

$$(2.23) \quad \langle \Phi_0 | \hat{H}_1 | \Phi_0 \rangle \Theta(Q_{k\alpha}) = E_1 \Theta(Q_{k\alpha}).$$

В уравнение (2.23) операторы поля входят линейно, что приводит к неустойчивым (растущим со временем) решениям гайзенберговских уравнений движения для операторов $Q_{k\alpha}$ и $P_{k\alpha}$. Для того чтобы такие решения отсутствовали, должно выполняться равенство

$$(2.24) \quad \langle \Phi_0 | \hat{H}_1 | \Phi_0 \rangle = 0.$$

Из явного выражения для \hat{H}_1 следует, что при

$$(2.25) \quad M_\mu^{\gamma 0}(-\mathbf{k}) = -\frac{1}{A\omega_k} k_\mu u_{k\gamma}, \quad \Gamma_i^{\gamma 0}(-\mathbf{k}) = \frac{1}{2B\omega_k} \varepsilon_{\lambda\gamma i} u_{k\lambda}$$

слагаемые в \hat{H}_1 , линейные по $P_{k\alpha}$, строго обращаются в нуль даже без дополнительного усреднения по $|\Phi_0\rangle$. Оставшиеся слагаемые в (2.24) дают уравнение для определения $u_{k\alpha}$, которое мы выпишем после построения $|\Phi_0\rangle$.

3. УРАВНЕНИЕ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В общем случае уравнение Шредингера (2.20) и уравнение для функции $u_{k\alpha}$ представляют собой систему нелинейных самосогласованных уравнений в частных производных. После канонического преобразования проблема разделения переменных в этой системе теперь никак не связана с существованием интегралов движения и требует определенных предположений о структуре классической компоненты мезонного поля. Простейший выбор $u_{k\alpha} = u_\alpha(|\mathbf{k}|)$, используемый, например, в задаче о «поляроне» [1], противоречит псевдоскалярности поля, т.к. должно выполняться условие $u_{k\alpha} = -u_{-k\alpha}$. Обеспечить выполнение этого требования и, кроме того, добиться разделения переменных в указанной выше системе уравнений позволяет следующий выбор классической компоненты поля:

$$(3.1) \quad u_{k\alpha} = ik_\alpha u_k.$$

Из (3.1) видно, что направление $u_{k\alpha}$ в изотопическом пространстве определяется пространственным вектором.

Если вычислить $u_{k\alpha}$ из (2.24) путем усреднения \hat{H}_1 по $|\Phi_0\rangle$, то оказывается, что структура $u_{k\alpha}$ не противоречит (3.1). Отметим также, что выбор $u_{k\alpha}$ в виде (3.1) позволяет непротиворечивым образом разделить переменные в уравнении Шредингера (2.20) только для невозбужденных по изотопическому моменту состояний «физического» нуклона. Для состояний с полным изотопическим моментом, равным, например, $3/2$, $5/2$ и т. д., указанная процедура не проходит при (3.1).

Следует отметить, что исследование модели статического источника в пределе сильной связи, проведенное Паули [11], приводит к такой же структуре классического π -мезонного поля. В работах [8, 12] проблема разделения переменных была рассмотрена с точки зрения вариационного принципа и показано, что наименьшая энергия основного состояния си-

стемы, описываемой нелинейными уравнениями рассматриваемого типа, достигается в том случае, если классическая компонента поля включает минимально возможное число сферических гармоник. Предположение (3.1) удовлетворяет этому условию.

Если обозначить

$$(3.2) \quad U(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{V\omega_k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_k,$$

то гамильтониан \hat{H}_0 принимает вид

$$(3.3) \quad \hat{H}_0 = -\frac{1}{2M} \Delta_{\mathbf{r}} - \frac{1}{2g^2 A} \Delta_{\mathbf{r}_f} + \frac{\hat{L}^2(\mathbf{a})}{4Bg^2} + \frac{g^2}{m} \frac{\partial^2 U(\mathbf{r}-\mathbf{r}_f)}{\partial x_\mu \partial x_\beta} \hat{\sigma}_\mu U_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) \tau_\alpha + \\ + \frac{hg^2}{m} \left[\frac{\partial U(\mathbf{r}-\mathbf{r}_f)}{\partial x_\alpha} \right]^2 + \Delta E_0,$$

где

$$(3.4) \quad \Delta E_0 = \frac{g^2}{2} \int d\mathbf{r} U(\mathbf{r}) [-\Delta(-\Delta+m^2)] U(\mathbf{r}).$$

Гамильтониан (3.3) описывает систему двух взаимодействующих частиц с массами M и $M_f = g^2 A$. Отделяя обычным способом движение центра масс, получаем

$$(3.5) \quad |\Phi_0\rangle = e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}} |\Psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a})\rangle, \quad \mathbf{R} = \frac{M\mathbf{r} + M_f \mathbf{r}_f}{M + M_f}, \quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_f, \\ M_f = g^2 A, \quad 1/\mu = 1/M + 1/M_f,$$

$$(3.6) \quad \hat{H}_0 = -\frac{1}{2\mu} \Delta_{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\hat{L}^2(\mathbf{a})}{4Bg^2} + \frac{g^2}{m} \frac{\partial^2 U(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_\mu \partial \rho_\beta} U_{\alpha\beta}(\mathbf{a}) \sigma_\mu \tau_\alpha + \\ + \frac{hg^2}{m} [U'(\boldsymbol{\rho})]^2 + \Delta E_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2(M+g^2 A)}.$$

В системе координат, где $\mathbf{P} = 0$, можно построить оператор полного момента импульса $\hat{\Sigma}_\mu$. Непосредственно подставляя выражения для $q_{k\alpha}$ и $p_{k\alpha}$ через новые переменные в формулу (2.3), находим

$$(3.7) \quad \hat{\Sigma}_\mu^{(0)} = \frac{1}{2} \sigma_\mu - i\epsilon_{\mu\nu\rho} x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\rho} - i\epsilon_{\mu\nu\beta} x_\nu^f \frac{\partial}{\partial x_\beta^f} + \hat{L}_\mu(\mathbf{a}).$$

Оператор (3.7) коммутирует с \hat{H}_0 и является оператором полного момента импульса в нулевом по g^{-1} приближении.

Вектор основного состояния $|\Psi(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a})\rangle$ представляет собой линейную комбинацию трех ортонормированных функций, которые являются собственными для операторов \hat{T}^2 , \hat{T}_3 , $\hat{\Sigma}^2$, $\hat{\Sigma}_3$:

$$(3.8) \quad |\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle + |\Psi_3\rangle,$$

причем

$$(3.9) \quad |\Psi_1\rangle = D_{0,0}^0(\mathbf{a}) \chi_{\sigma\pi} \dagger \chi_{\pi\sigma}^{\dagger\dagger} \psi_1(\boldsymbol{\rho}), \\ |\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{\alpha\mu}(\mathbf{a}) \hat{\tau}_\alpha \hat{\sigma}_\mu D_{0,0}^0(\mathbf{a}) \chi_{\sigma\pi} \dagger \chi_{\pi\sigma}^{\dagger\dagger} \psi_2(\boldsymbol{\rho}),$$

$$|\Psi_3\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{\rho_\mu \rho_\nu}{\rho^2} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \right) U_{\alpha\nu} \hat{\tau}_\alpha \hat{\sigma}_\mu D_{0,0}^0(\mathbf{a}) \chi_{\sigma\pi}^\uparrow \chi_{\mu\pi}^{\uparrow\downarrow} \psi_3(\rho),$$

$D_{0,0}^0(\mathbf{a}) \equiv 1$, $\chi_{\sigma\pi}^\uparrow$ — вектор состояния со спином, направленным вверх, $\chi_{\mu\pi}^{\uparrow\downarrow}$ — вектор состояния с изоспином, направленным вверх (протон) или вниз (нейтрон). В результате из (2.20) находим три уравнения, представляющих собой обыкновенные дифференциальные уравнения Шредингера:

$$(3.10) \quad -\frac{1}{2\mu} \Delta \psi_1 + \frac{g^2 U'}{m \rho} \sqrt{3} \psi_2 + \frac{g^2}{m} \left(U'' - \frac{U'}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_3 \right) + \\ + \frac{hg^2}{m} U'^2 \psi_1 = W \psi_1, \quad -\frac{1}{2\mu} \Delta \psi_2 + \frac{g^2 U'}{m \rho} (\sqrt{3} \psi_1 - 2\psi_2) + \\ + \frac{g^2}{m} \left(U'' - \frac{U'}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_1 - \frac{2}{3} \psi_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \psi_3 \right) + \frac{1}{2Bg^2} \psi_2 + \frac{hg^2}{m} U'^2 \psi_2 = W \psi_2, \\ -\frac{1}{2\mu} (\Delta \psi_3 - \frac{6}{\rho^2} \psi_3) + \frac{g^2 U'}{m \rho} \psi_3 + \frac{g^2}{m} \left(U'' - \frac{U'}{\rho} \right) \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \psi_2 - \frac{1}{3} \psi_3 \right) + \frac{1}{2Bg^2} \psi_3 + \frac{hg^2}{m} U'^2 \psi_3 = W \psi_3.$$

Условие нормировки основного состояния

$$(3.11) \quad \int d\rho (\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) = 1.$$

В системе, где $\mathbf{P}=0$, существенно упрощается уравнение для поля $U(\rho)$. Оно принимает вид

$$(3.12) \quad \left[\left(-\Delta + \frac{2}{\rho^2} \right) (1-a^2) + m^2 - \Delta m^2 \right] U'(\rho) = \\ = -\frac{2h}{m} U'(\rho) (\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) + \\ + \frac{2}{m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_1 \psi_2)' + \sqrt{\frac{2}{3}} (\psi_1 \psi_3)' + \frac{\sqrt{2}}{3} (\psi_2 \psi_3)' - \frac{1}{3} (\psi_2^2)' - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} (\psi_3^2)' + \frac{1}{\rho} [\sqrt{6} \psi_1 \psi_3 + \sqrt{2} \psi_2 \psi_3 - \psi_3^2] \right\},$$

где введены обозначения

$$a^2 = \frac{1}{3M_f^2} \int d\rho \left\{ \psi_1'^2 + \psi_2'^2 + \psi_3'^2 + \frac{6}{\rho^2} \psi_2^2 \right\},$$

$$\Delta m^2 = \frac{1}{3B^2 g^4} \int d\rho (\psi_2^2 + \psi_3^2),$$

$$A = \frac{1}{3} \int d\rho (\Delta U)^2, \quad B = \frac{1}{3} \int d\rho (U')^2.$$

4. НАБЛЮДАЕМЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ «ФИЗИЧЕСКОГО» НУКЛОНА

Рассматриваемый нами гамильтониан π -мезон-нуклонной системы содержит три неизвестные постоянные M , g и h , которые необходимо найти, сравнивая вычисленные и наблюдаемые характеристики нуклона. Одной из таких характеристик является масса «физического» нуклона, которая согласно (3.6) равна $M_{\text{физ}} = M + M_f$.

Однозначность канонического преобразования, построенного в настоящей работе, позволяет непосредственной подстановкой без каких-либо дополнительных предположений вычислить любую физическую величину, характеризующую нуклон. Вычислим, например, магнитные моменты протона и нейтрона в приближении сильной связи.

Оператор магнитного момента нуклона до проведения канонического преобразования определяется хорошо известным выражением (см. например, [13, 14]):

$$(4.1) \quad \hat{\mu}_\alpha = \hat{\mu}_\alpha^p + \hat{\mu}_\alpha^n,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_\alpha^p &= \frac{e}{4M} (1 + \hat{\tau}_3) \hat{l}_\alpha + \frac{eg}{2m} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \hat{\sigma}_\gamma (\hat{\tau}_1 \varphi_2 - \hat{\tau}_2 \varphi_1) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d\mathbf{r} x_\beta \hat{j}_\gamma(\mathbf{r}), \\ \hat{\mu}_\alpha^n &= \frac{e}{4M} (1 + \hat{\tau}_3) \hat{g}_\alpha, \end{aligned}$$

$\hat{j}_\gamma(\mathbf{r})$ — ток, связанный с заряженными компонентами π -мезонного поля

$$\hat{j}_\gamma(\mathbf{r}) = -e \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_\gamma} \varphi_2 \right).$$

Усредняя $\hat{\mu}_\alpha$ по волновой функции основного состояния $|\Phi_0\rangle$ в случае покоящегося «физического» нуклона, находим, что в нулевом по g^{-1} приближении

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{e}{2M} \left[1 + \int d\rho \left(-\frac{1}{9} \psi_2^2 + \frac{2}{9} \psi_3^2 \right) \right] + \\ &+ \frac{2M_f e g^2}{9m(M+M_f)} \int d\rho U' \rho \psi_1 \left(\frac{\psi_2}{\sqrt{3}} + \frac{5\psi_3}{\sqrt{6}} \right) + \\ &+ \left(-\frac{2}{3} B e g^2 \right) \int d\rho \left\{ \frac{\psi_1 \psi_3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \psi_2^2 + \frac{1}{6} \psi_3^2 \right\}, \\ \mu_n &= \frac{e}{2M} \int d\rho \left\{ -\frac{2}{9} \psi_2^2 + \frac{4}{9} \psi_3^2 \right\} - \\ &- \frac{2M_f e g^2}{9m(M+M_f)} \int d\rho U' \rho \psi_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 + \frac{5\psi_3}{\sqrt{6}} \right) + \\ &+ \frac{2}{3} B e g^2 \int d\rho \left\{ \frac{\psi_1 \psi_3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \psi_2^2 + \frac{1}{6} \psi_3^2 \right\}, \end{aligned}$$

где μ_p — магнитный момент протона, μ_n — нейтрона.

Отметим также еще одно обстоятельство. Введем оператор плотности

заряда системы

$$\hat{\rho}(\mathbf{z}) = \frac{1 + \hat{\tau}_3}{2} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{r}) + \hat{\rho}_f(\mathbf{z}), \quad \hat{\rho}_f(\mathbf{z}) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q_\alpha(\mathbf{z}) p_\beta(\mathbf{z}),$$

выразив $q_\alpha(\mathbf{z})$ и $p_\alpha(\mathbf{z})$ через новые переменные, с точностью до членов первого порядка по g^{-1} . Тогда полный заряд системы в нулевом по g^{-1} приближении

$$\hat{Q} = \int \hat{\rho}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \frac{1 + \hat{\tau}_3}{2} + \hat{L}_3(\mathbf{a}).$$

Для оператора $\hat{\rho}(\mathbf{z})$ можно построить уравнение движения. Проинтегрируем $\hat{\rho}(\mathbf{z})$ по времени t . В результате $d\hat{\rho}/dt$ можно выразить через $\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}_f, \dot{\hat{L}}_\alpha(\mathbf{a}), \dot{a}_\nu, \dot{Q}_{k\alpha}, \dot{P}_{k\alpha}$. Для любого оператора \hat{A} из указанной совокупности $\dot{\hat{A}} = i[\hat{H}, \hat{A}]$, причем \hat{H} будем учитывать с точностью до членов первого порядка по g^{-1} , т. е. $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$. Тогда $d\hat{\rho}/dt$ можно представить в виде

$$(4.2) \quad d\hat{\rho}/dt = -\text{div } \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{z}).$$

Уравнение непрерывности (4.2) позволяет найти «классическую» часть оператора плотности тока $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{z})$, не содержащую $Q_{k\alpha}$ и $P_{k\alpha}$, и построить оператор магнитного момента системы

$$\hat{\mu}_\alpha^H = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \int d\mathbf{z} z_\beta \hat{j}_\gamma(\mathbf{z}),$$

который в точности совпадает с (4.1).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе рассмотрение показывает, что на основе метода сильной связи Боголюбова — Тябликова можно построить последовательное разложение по обратным степеням константы связи в теории взаимодействия частицы и квантового поля с внутренними степенями свободы. При этом уже в нулевом приближении возникает существенная перестройка основного состояния системы, в результате которой естественным образом возникает представление о «физических» частицах с характеристиками, существенно отличными от характеристик затравочных, или «голых» частиц. Используемые в настоящей работе методы можно легко обобщить на случай взаимодействующих полей, и применение их к конкретной физической модели будет рассмотрено отдельно.

Литература

- [1] Боголюбов Н. Н. Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем. — Укр. матем. ж., 1950, 2, № 2, 3–24.
- [2] Тябликов С. В. Адиабатическая форма теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем. — ЖЭТФ, 1951, 21, № 2, 337.
- [3] Хенли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля. М.: ИЛ, 1963.
- [4] Швобер С., Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля, т. 2, М.: ИЛ, 1956.
- [5] Солодовникова Е. П., Тавхелидзе А. Н., Хрусталева О. А. Преобразование Н. Н. Боголюбова в теории сильной связи. — ТМФ, 1972, 11, № 3, 317.

- [6] Солодовникова Е. П., Тавхелидзе А. Н. Задача двух тел в адиабатической и сильной связи. — ТМФ, 1974, 21, № 1, 13—29.
- [7] Комаров Л. И., Крылов Е. В., Нгуен Фьок Лан, Феранчук И. Д. Преобразование Боголюбова в теории сильной связи тяжелой частицы со скалярным полем. — ТМФ, 1977, 32, № 2, 262—270.
- [8] Комаров Л. И., Крылов Е. В., Нгуен Фьок Лан, Романова Т. С., Феранчук И. Д. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1977, 1, 86.
- [9] Федоров Ф. И. — ДАН БССР, 1958, 2, 408.
- [10] Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
- [11] Паули В. Труды по квантовой теории. М.: Наука, 1977, 424.
- [12] Крылов Е. В. Автореферат канд. дисс., Минск, 1977.
- [13] S. Fibini S. Nuovo Cim., 1956, 3, 764.
- [14] Fried B. D. Phys. Rev., 1952, 88, 1142.

Белорусский государственный
университет

Поступила в редакцию
1.XI.1979

**THEORY OF THE STRONG COUPLING OF PARTICLE
AND QUANTUM FIELD WITH INTERNAL DEGREES OF FREEDOM**

Zavtrak S. T., Komarov L. I., Feranchuk I. D.

Bogoliubov's canonical transformation is constructed for the theory of strong coupling of non-relativistic nucleon with π -meson field. The equations solution of which makes it possible to calculate the observable characteristics of the «physical» nucleon are derived.
