Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2021. Том 62, № 3

УДК 517.954

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА КРУГОВЫХ СПИРАЛЯХ

Б. А. Кац, Д. Б. Кац, Ч. Люй

Аннотация. Существует ряд публикаций по краевой задаче Римана на спиралеобразных дугах. При этом налагаются ограничения, приближающие их витки по форме к концентрическим окружностям. В данной работе такая задача решается на спиралях, которые могут терять концентричность. Показано, что это может повлечь изменение картины разрешимости данной краевой задачи.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.305

Ключевые слова: краевая задача Римана, спираль сильного закручивания, теорема Миттаг-Леффлера.

Введение

Краевая задача Римана — это одна из наиболее известных краевых задач комплексного анализа, решению и приложениям которой посвящено большое число монографий и научных статей (см., например, [1–3] и библиографию в них). Систематически появляются публикации, посвященные новым приложениям этой задачи (см. [4], недавнюю работу [5] и др.).

Классическая постановка задачи Римана на разомкнутой кривой такова.

Пусть Γ — простая кусочно гладкая жорданова дуга на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с началом в точке a_1 и концом в точке a_2. Обозначим через $H_\nu(\Gamma)$ совокупность всех заданных на Γ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$h_\nu(f;\Gamma) := \sup\left\{\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^\nu} : t,t'\in\Gamma, t'\neq t\right\} < \infty, \quad 0<\nu\le 1. \tag{1}$$

Пусть на Γ заданы функции $G(t)$ и $g(t)$ этого класса, причем первая из них не обращается в нуль. Задача Римана состоит в отыскании всех голоморфных в $\overline{\mathbf{C}}\setminus\Gamma$ функций $\Phi(z)$, обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке и имеющих в каждой внутренней точке Γ предельные значения слева и справа $\Phi^\pm(t)$ соответственно, связанные краевым условием

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t\in\Gamma' := \Gamma\setminus\{a_1,a_2\}. \tag{2}$$

Обычно это условие дополняют какими-либо ограничениями на рост искомой функции вблизи концов дуги.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075–02–2020–1478.

© 2021 Кац Б. А., Кац Д. Б., Люй Ч.

Частный случай этой задачи

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma', \tag{3}$$

называют *задачей о скачке.*

Подробнее об этой задаче см. классические работы [1–3], а также [6] и более современные [7, 9–11]).

1. Круговые спирали

Будем рассматривать спирали, порожденные системами кругов. Их можно назвать круговыми.

Для конкретности будем считать, что рассматриваемая спираль начинается в точке $a_1 = 0$ и заканчивается в точке $a_2 = 1$.

Пусть $\mathscr{D} := \{D_1, D_2, D_3, \dots\}$ — бесконечная последовательность вложенных друг в друга кругов $D_n = \{z : |z - c_n| < \rho_n\}$, стягивающаяся к началу координат, т. е.

$$D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{0\}.$$

Будем считать, что центры этих кругов c_n — неотрицательные вещественные числа, а радиусы ρ_n таковы, что $\rho_n > c_n$. Тогда граница круга D_n пересекает вещественную ось в точках $r_n := c_n + \rho_n > 0$ и $c_n - \rho_n < 0$. В каждой из областей $R_n := D_n \setminus D_{n+1}$ возьмем кусочно гладкую простую дугу γ_n с началом r_{n+1} и концом r_n такую, что лежащая слева от нее конечная область Δ_n с границей $\gamma_n \cup [r_{n+1}, r_n]$ содержит круг D_{n+1}. Объединение таких дуг и точки 0

$$\Gamma = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \gamma_n \right) \cup \{0\}$$

будем называть *левой круговой спиралью* и считать, что эта кривая начинается в начале координат и заканчивается в точке 1. Если области Δ_n лежат справа от γ_n при любом n, то называем Γ *правой круговой спиралью.* С каждой круговой спиралью свяжем величину σ, равную $+1$, если эта спираль правая, и -1, если она левая.

Замечание 1. Спираль Γ предполагается имеющей бесконечную длину, т. е. неспрямляемой. В силу наложенного на дуги γ_n условия гладкости часть Γ, лежащая вне любой окрестности начала координат, спрямляема. Это избавляет от излишней громоздкости в описании условий единственности решения рассматриваемой задачи, но от этого условия можно отказаться и считать все эти дуги неспрямляемыми; при этом постановка задачи несколько усложняется подобно тому, как это сделано в [6].

Логарифмическое ядро спирали Γ

$$K(z) := \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-1}{z}$$

есть однозначная в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ ветвь логарифма, удовлетворяющая условию $K(\infty) = 0$. На дуге Γ оно имеет единичный скачок. Наша ближайшая цель — описать поведение этой функции на концах спирали.

В силу гладкости дуги γ_1 в точке 1 вблизи этой точки имеем

$$K(z) = (2\pi i)^{-1} \ln |z - 1| + O(1). \tag{4}$$

Чтобы оценить $K(z)$ вблизи нуля, сначала заметим, что там

$$K(z) = -(2\pi i)^{-1}(\ln|z| + iA(z)) + O(1),$$

где $A(z)$ — ветвь аргумента z, выделенная с помощью разреза вдоль дуги Γ и ее продолжения, соединяющего единицу с бесконечно удаленной точкой. При переходе через разрез справа налево функция $A(z)$ получает слагаемое $2\pi\sigma$. Отсюда следует, что при приближении z к началу координат эта ветвь имеет асимптотику

$$A(z) = 2\pi\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z) + O(1),$$

где $\chi_n(z)$ — характеристическая функция круга D_n. Итак, доказана

Лемма 1. *Вблизи конца $a_2 = 1$ любой круговой спирали справедлива оценка* (4), *а вблизи ее начала $a_1 = 0$ — оценка*

$$K(z) = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \ln|z| + O(1). \tag{5}$$

В свою очередь, отсюда следует

Лемма 2. *Круговая спираль имеет сильное закручивание в ее начале тогда и только тогда, когда расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$.*

Выделим класс концентрических круговых спиралей. Он состоит из спиралей, сформированных концентрическими кругами $D_n, n = 1, 2, \ldots$. Для них $c_1 = c_2 = \cdots = 0$ и сумма ряда из характеристических функций есть считающая функция ς последовательности радиусов ρ_n, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z) = \varsigma(|z|) := \#\{\rho_n : \rho_n \geq |z|\}.$$

Отсюда следует

Лемма 3. *Концентрическая круговая спираль имеет сильное закручивание в ее начале тогда и только тогда, когда расходится интеграл $\int\limits_0 \varsigma(r) r\, dr$.*

Пример 1. Примером концентрической спирали рассматриваемого типа может служить дуга

$$\Gamma := \{z = r \exp 2\pi i r^{-p} : 0 < r \leq 1\}. \tag{6}$$

При $p \geq 1$ ее длина бесконечна. Обе последние леммы применимы к ней, и в силу любой из этих лемм она имеет сильное закручивание в начале координат при $p \geq 2$. Таким образом, при $0 < p < 1$ эта дуга имеет конечную длину и интеграл типа Коши по ней существует в обычном смысле, при $1 \leq p < 2$ длина этой дуги бесконечна, но по ней может быть взят вышеупомянутый обобщенный интеграл и, наконец, при $p \geq 2$ построенный в предшествующих работах обобщенный интеграл по этой дуге не определен без дополнительных ограничений. Ниже введем ограничения, позволяющие решать краевые задачи на дугах с сильным закручиванием.

В общем случае при $\sum \rho_n = \infty$ спираль неспрямляема. Конечно, возможны случаи, когда она неспрямляема и при $\sum \rho_n < \infty$, но сильного закручивания она тогда не имеет.

Ниже понадобятся некоторые числовые характеристики скорости закручивания спиралей.

Определение 1. При $0 < |z| < 1$ обозначим через $\mathbf{n}(z)$ наибольший из номеров кругов D_n, которые содержат точку z. Всюду ниже считаем, что при $z \to 0$ тот номер имеет степенной рост, т. е.

$$\mathbf{n}(z) = O(|z|^{-M})$$

для некоторого положительного M, и называем наименьшее из натуральных M, удовлетворяющих этому условию, *показателем закручивания спирали.*

Отметим, что

$$\mathbf{n}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z).$$

Определение 2. Наименьшее из натуральных чисел κ, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n^{\kappa}$, будем называть *экстремальным показателем положительной последовательности* $\{\rho_n\}$.

Для спирали сильного закручивания этот показатель не меньше трех.

Пример 2. Вычислим эти характеристики для спирали (6). Это концентрическая спираль, так что $c_1 = c_2 = \cdots = 0$, а ее радиусы равны $\rho_n = n^{-1/p}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{\kappa} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\kappa/p}$$

сходится при $\kappa > p$, так что экстремальный показатель этой спирали равен $[p] + 1$, где $[\cdot]$ означает целую часть.

Далее, $\mathbf{n}(z)$ есть решение неравенства $(n+1)^{-1/p} \le |z| < n^{-1/p}$. Отсюда $\mathbf{n}(z) = [|z|^{-p}] + 1$, т. е. показатель закручивания этой спирали также равен $[p] + 1$.

Совпадение показателей неслучайно. Нетрудно доказать, что оно имеет место для любой концентрической спирали. Следующий пример показывает, что для неконцентрических спиралей это, вообще говоря, не так.

Пример 3. Пусть спираль определена с помощью последовательности кругов D_n, каждый из которых построен на отрезке $[-n^{-1/q}, n^{-1/p}]$ вещественной оси как на диаметре, p, q — положительные числа, $q > p$. Аналогичные вычисления показывают, что показатель закручивания этой спирали также равен $[q] + 1$, а экстремальный показатель есть $[p] + 1$.

Нетрудно доказать, что в общем случае $M \ge \kappa$.

2. Задача о скачке

Рассмотрим задачу о скачке на круговой спирали, считая скачок $g(t)$ дифференцируемым по Тейлору в точке 0, т. е. представимым в виде

$$g(\tau) = P(\tau, \bar{\tau}) + \tau^M g_0(\tau), \quad g_0 \in H_\nu(\Gamma), \tag{7}$$

где $P(\tau, \bar{\tau})$ — алгебраический многочлен двух переменных степени ниже M, т. е.

$$P(\tau, \bar{\tau}) = \sum_{k \ge 0, l \ge 0}^{k+l<M} b_{k,l} \tau^k \bar{\tau}^l;$$

здесь k и l — неотрицательные целые числа, M — показатель закручивания спирали. Множество всех таких функций обозначим через $H_\nu^M(\Gamma)$.

Величину $\frac{\partial^{k+l} g}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}(0) := k!l!b_{k,l}$ часто называют *производной Тейлора* (порядка k по z и порядка l по $\bar{z}$) функции g в точке 0. Многочлен $P(\tau, \bar{\tau})$ есть многочлен Тейлора функции g в точке 0.

Пусть $\mathscr{E}$ — уже упоминавшийся оператор продолжения Уитни с дуги Γ на всю комплексную плоскость. Как известно (см., например, [8]), продолжение Уитни непрерывной на Γ функции совпадает с ней на этой дуге, а в остальных точках комплексной плоскости имеет частные производные по z и по $\bar{z}$ любого порядка. Кроме того, если f удовлетворяет на Γ условию Гёльдера, то ее продолжение $\mathscr{E} f$ удовлетворяет этому условию с тем же показателем во всей комплексной плоскости. Отметим еще несколько свойств продолжения Уитни.

Во-первых, если в некоторой окрестности точки $t \in \Gamma$ эта дуга спрямляема, то частные производные первого порядка продолжения Уитни функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ интегрируемы вблизи этой точки в любой степени, меньшей $(1-\nu)^{-1}$ (см., например, [12]).

Если дуга Γ не спрямляема в окрестности своего начала в точке 0, то порядок интегрируемости первых производных продолжения Уитни в окрестности этой точки оценивается с помощью так называемого показателя Марцинкевича, введенного Д. Б. Кацем [13]. Его определение таково:

$$\mathbf{m} := \sup\left\{ p : \lim_{r\to 0} \iint\limits_{|z|\le r} \frac{dxdy}{\operatorname{dist}^p(x+iy,\Gamma)} < \infty \right\}. \tag{8}$$

Известно, что эта величина заключена в промежутке $[0,1]$. Если в примере (6) $p > 1$, то, как показывают непосредственные вычисления, показатель Марцинкевича спирали (6) равен $\frac{2}{1+p}$.

Как установлено в [13], первые производные продолжения Уитни функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ интегрируемы вблизи точки 0 в любой степени, меньшей $\mathbf{m}(1-\nu)^{-1}$. Этот показатель больше двух при условии

$$\nu > 1 - \frac{\mathbf{m}}{2}. \tag{9}$$

Наконец, отметим, что носитель продолжения Уитни без ограничения общности можно считать компактным.

Приступим к построению решения задачи о скачке на круговой спирали в предположении $g \in H_\nu^M(\Gamma)$. Будем строить его в виде суммы решений двух задач о скачке

$$\Phi_1^+(\tau) - \Phi_1^-(\tau) = \tau^M g_0(\tau), \quad g_0 \in H_\nu(\Gamma), \quad \tau \in \Gamma', \tag{10}$$

$$\Phi_2^+(\tau) - \Phi_2^-(\tau) = P(\tau, \bar{\tau}), \quad \tau \in \Gamma'. \tag{11}$$

Для решения первой из них рассмотрим функцию

$$Q(z) = z^M K(z) \mathscr{E} g_0(z); \tag{12}$$

очевидно, скачок этой функции на Γ' равен $\tau^M g_0(\tau)$, а ее носитель можно считать компактным. Напомним, что натуральное число M выбрано так, что в окрестности нуля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z) \le C|z|^{-M}; \tag{13}$$

здесь и ниже C означает различные положительные постоянные. Имеем

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar z} = z^M K(z) \frac{\partial \mathscr{E} g_0}{\partial \bar z},$$

и в силу свойств продолжения Уитни эта производная интегрируема в малой окрестности любой точки Γ, кроме нуля, в любой степени, меньшей $(1-\nu)^{-1}$, а в окрестности нуля — в любой степени, меньшей $\mathbf{m}(1-\nu)^{-1}$. Поэтому при выполнении условий (9) и (13) эта производная интегрируема в степени, большей двух. Тогда обобщенный интеграл типа Коши

$$\Phi_1(z) := Q(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbf{C}} \frac{\partial Q}{\partial \overline{w}} \frac{dw d\overline{w}}{w-z} \tag{14}$$

является решением задачи (10). Действительно, ее производная по $\bar z$ равна нулю в $\mathbf{C} \setminus \Gamma$, она исчезает в бесконечности и, наконец, входящий в нее двойной интеграл определяет непрерывную во всей комплексной плоскости функцию (см., например, [14]). Итак, справедлива

Лемма 4. *Пусть Γ — круговая спираль с показателем закручивания M, $g \in H^M_\nu(\Gamma)$ и выполнено условие* (9). *Тогда краевая задача о скачке* (10) *имеет решение* (14) *в классе функций, ограниченных вблизи начала дуги Γ и имеющих слабые особенности на ее конце, и это решение единственно.*

Осталось доказать единственность решения (14). Действительно, из наших рассуждений следует, что оно ограничено вблизи начала координат и имеет особенность не выше, чем логарифмического порядка в точке 1. Если $\Phi(z)$ — какое-либо другое решение задачи (10) в указанном в теореме классе, то из спрямляемости дуг γ_n в силу теоремы Пенлеве (см., например, [15]) следует, что разность $\Phi_1 - \Phi$ голоморфна в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{0,1\}$, причем особенности этой разности на концах Γ устранимы. Отсюда $\Phi \equiv \Phi_1$, т. е. лемма доказана.

Перейдем к решению задачи (11). Его можно построить в виде суммы решений трех задач о скачке

$$\Phi^+_{21}(\tau) - \Phi^-_{21}(\tau) = \sigma P(\tau, \bar\tau), \quad \tau \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial \Delta'_n, \tag{15}$$

$$\Phi^+_{22}(\tau) - \Phi^-_{22}(\tau) = P(\tau, \bar\tau), \quad \tau \in (0,1), \tag{16}$$

$$\Phi^+_{23}(\tau) - \Phi^-_{23}(\tau) = \sigma P(\tau, \bar\tau), \quad \tau \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n. \tag{17}$$

В первой из этих задач контуром является объединение границ областей $\Delta'_n := \Delta_n \setminus D_n$. Поскольку эти области не налегают друг на друга, а скачок в этой задаче удовлетворяет условию Гёльдера с показателем 1, одним из решений является обобщенный интеграл типа Коши

$$\Phi_{21}(z) := \sigma P(z, \bar z) - \frac{\sigma}{2\pi i} \iint\limits_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta'_n} \frac{\partial P}{\partial \overline{w}} \frac{dw d\overline{w}}{w-z}, \tag{18}$$

являющийся ограниченной во всей комплексной плоскости и исчезающей в бесконечности функцией.

Вторая из них — это задача о скачке на отрезке вещественной оси, и ее решение дается обычным интегралом типа Коши

$$\Phi_{22}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{P(\tau, \bar{\tau})\, d\tau}{\tau - z},$$

свойства которого хорошо известны. В частности, сумма $\Phi_1(z) + \Phi_{22}(z)$ вблизи точек 0 и 1 ведет себя как $-(2\pi i)^{-1} g(0) \ln|z|$ и $(2\pi i)^{-1} g(1) \ln|z-1|$ соответственно.

Наконец, третья задача поставлена на бесконечном семействе окружностей $C_n = \{z : |z - c_n| = \rho_n\}$, ограничивающих круги D_n. На каждой из таких окружностей

$$\bar{z} = c_n + \frac{\rho_n^2}{z - c_n}, \tag{19}$$

поэтому локально конечная в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ сумма

$$\mathscr{P}(z) = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \ge 0, l \ge 0}^{k+l<M} b_{k,l} z^k \left(c_n + \frac{\rho_n^2}{z - c_n} \right)^l \right) \chi_n(z)$$

удовлетворяет краевому условию (17). Вообще говоря, она имеет полюсы в центрах кругов c_n. Согласно теореме Миттаг-Леффлера (см., например, [16, 17]) существует мероморфная функция $\mathscr{M}(z)$, которая имеет полюсы в тех же точках, что и $\mathscr{P}$, и с теми же главными частями, и исчезает в бесконечно удаленной точке. Тогда разность $\Phi_{23}(z) = \mathscr{P}(z) - \mathscr{M}(z)$ есть одно из решений задачи о скачке (17). Итак, справедлива

Теорема 1. *Пусть Γ — круговая спираль с показателем закручивания M и $g \in H_\nu^M(\Gamma)$. При выполнении условия* (9) *задача о скачке*

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t \in \Gamma', \tag{20}$$

разрешима. Одним из ее решений является сумма

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_{21} + \Phi_{22} + \Phi_{23} \tag{21}$$

функций, построенных в этом разделе. В точке 1 *это решение имеет асимптотику*

$$\Phi(z) = (2\pi i)^{-1} g(1) \ln|z - 1| + O(1). \tag{22}$$

Опишем несколько случаев, когда удается описать асимптотику этого решения в точке 0.

2.1. Концентрические спирали. Сначала рассмотрим случай, когда $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. все формирующие спираль круги концентрические.

В [9–11] краевая задача Римана решалась на концентрических спиралях несколько более узкого класса, чем в данной статье.

Для концентрической спирали функция $\mathscr{P}$ не имеет отличных от нуля полюсов. Поэтому миттаг-леффлерово слагаемое исчезает и

$$\Phi_{23}(z) = \mathscr{P}(z) = \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \ge 0, l \ge 0}^{k+l \le M} \rho_n^{2l} b_{k,l} z^{k-l} \right) \chi_n(z) = \sigma \sum_{k \ge 0, l \ge 0}^{k+l \le M} b_{k,l} z^{k-l} s_l(z),$$

где

$$s_l(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{2l} \chi_n(z).$$

Для концентрической спирали условие (13) означает, что при $\rho_{n+1} < |z| \le \rho_n$ имеем

$$n+1 = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_n(z) \le C\rho_n^{-M}$$

и отсюда при тех же z

$$\rho_n \le C(n+1)^{-1/M}, \quad s_l(z) := \sum_{k=0}^{n} \rho_k^{2l} \le C \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{-2l/M}.$$

Поэтому суммы $s_l(z)$ с $2l > M$ ограничены в совокупности, при $2l = M$ функция $s_l(z)$ оценивается величиной $C \ln |z|^{-1}$, а при $2l < M$ — величиной $C|z|^{2l-M}$.

Допустим, что многочлен P состоит из одного монома, т. е.

$$P = P_{k,l} = b_{k,l} \tau^k \bar{\tau}^l, \quad k \ge 0,\ l \ge 0,\ k+l < M,\ b_{k,l} \ne 0.$$

Тогда ему соответствует решение задачи о скачке

$$\mathscr{P}_{k,l}(z) = \sigma b_{k,l} z^{k-l} s_l(z),$$

Если $k \ge l > M/2$ или $k > l \ge M/2$, то эта величина ограничена в окрестности нуля.

Если $k < l$ и $2l > M$, то $|\mathscr{P}_{k,l}(z)| \le C|z|^{k-l} \le C|z|^{-M}$.

Если $k < l$ и $2l = M$, то $|\mathscr{P}_{k,l}(z)| \le C|z|^{k-l} \le C|z|^{-M/2} \ln |z|^{-1}$.

Если $k < l$ и $2l < M$, то $|\mathscr{P}_{k,l}(z)| \le C|z|^{k-l} \le C|z|^{-M}$.

Таким образом, из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть Γ — концентрическая спираль с показателем закручивания M и $g \in H_\nu^M(\Gamma)$. При выполнении условия* (9) *задача о скачке* (20) *имеет решение в классе функций, имеющих асимптотику* (22) *в точке* 1 *и*

$$\Phi(z) = O(|z|^{-M}) \tag{23}$$

в точке 0. *Одним из таких решений является функция* (21), *а любое другое представимо как сумма этой функции с рациональной функцией $z^{-M}p(z)$, где $p(z)$ — голоморфный многочлен степени ниже M.*

С другой стороны, эта задача может иметь решения с особенностями более низкого порядка в фокусе спирали. В частности, из наших оценок вытекает

Следствие 1. *Пусть Γ — концентрическая спираль с показателем закручивания M, $g \in H_\nu^M(\Gamma)$, выполняется условие* (9) *и, кроме того, тейлоровы производные функции g в точке* 0 *порядков k, l обращаются в нуль, если не выполняется хотя бы одно из неравенств $k < l$ и $2l > M$. Тогда задача о скачке* (20) *имеет единственное решение в классе функций, ограниченных вблизи точки* 0 *и имеющих асимптотику* (22) *в точке* 1.

Приведем еще один результат о концентрических спиралях. Вернемся к функции

$$s_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z),$$

фигурирующей в условии (13). Эта функция зависит лишь от $|z|$. Потребуем, чтобы существовал отличный от нуля предел

$$\lim_{z \to 0} \frac{s_0(z)}{|z|^M} \ne 0. \tag{24}$$

Следствие 2. *Пусть* Γ *— концентрическая спираль с показателем закручивания* M, $g \in H_\nu^M(\Gamma)$, $g(0) \neq 0$ *и выполняется условие* (9). *Тогда задача о скачке* (20) *не имеет решений, ограниченных вблизи точки* 0.

Доказательство. Допустим, что такое решение существует. Согласно следствию 1 оно представимо в виде $\Phi(z) - \frac{p(z)}{z^M}$. Умножив эту разность на z^M и устремив z к нулю вдоль прямолинейного луча, получим равенство, одна из частей которого зависит от угла наклона луча, а вторая — нет, что завершает доказательство.

2.2. Неконцентрические спирали. Пусть теперь спираль Γ неконцентрическая, т. е. ее формируют круги с различными центрами. Как и выше, считаем, что эти центры образуют убывающую последовательность точек вещественной оси, сходящуюся к точке 0. Здесь опишем два простых случая, когда решение задачи о скачке на такой спирали, построенное в теореме 1, допускает простые оценки в окрестности начала координат.

2.2.1. Случай аналитического многочлена Тейлора. Сначала рассмотрим случай, когда многочлен Тейлора скачка g в точке нуль не содержит степеней $\bar{z}$, т. е. аналитический. В этом случае задача о скачке (11) имеет решение вида

$$\Phi_2(z) = P(z)K(z) - \Pi(z),$$

где $P(z)$ — аналитический многочлен Тейлора скачка g в начале координат, а $\Pi(z)$ — аналитический многочлен, обеспечивающий выполнение равенства $\Phi_2(\infty) = 0$. Это решение не имеет полюсов в точках c_n, поэтому сумма $\Phi_0 := \Phi_1 + \Phi_2$ является решением (20). В рассматриваемом случае аналитического многочлена P такое решение имеет и задача на концентрической спирали. Тем самым доказана

Теорема 3. *Пусть* Γ *— круговая спираль с показателем закручивания* M, $g \in H_\nu^M(\Gamma)$ *и многочлен Тейлора* P *этой функции в точке* 0 *аналитический. При выполнении условия* (9) *задача о скачке* (20) *имеет решение* Φ_0 *в классе функций с асимптотикой* (22) *в точке* 1 *и*

$$\Phi_0(z) = P(z)K(z) + O(1) \tag{25}$$

в точке 0. *Кроме того, это решение имеет в нуле асимптотику* (23) *и любое другое решение с асимптотиками* (23) *и* (22) *на концах* Γ *представимо как сумма* Φ_0 *с рациональной функцией* $z^{-M}p(z)$, *где* $p(z)$ *— аналитический многочлен степени ниже* M.

2.2.2. Случай би-аналитического многочлена Тейлора. Пусть многочлен Тейлора $P(z, \bar{z})$ содержит $\bar{z}$ в первой степени, т. е. би-аналитический (см., например, [18]). Такой многочлен представим в виде

$$P(z, \bar{z}) = P_0(z) + \bar{z}P_1(z), \tag{26}$$

где P_0 и P_1 — аналитические многочлены, и решение задачи (11) можно искать в виде суммы решений задач

$$\Phi_{30}^+(\tau) - \Phi_{30}^-(\tau) = P_0(\tau), \quad \tau \in \Gamma', \tag{27}$$

$$\Phi_{31}^+(\tau) - \Phi_{31}^-(\tau) = \bar{\tau}P_1(\tau), \quad \tau \in \Gamma'. \tag{28}$$

У первой из этих задач скачок есть аналитический многочлен, и в силу изложенного выше она имеет решение вида

$$\Phi_{30}(z) = P_0(z)K(z) - \Pi_0(z),$$

где $\Pi_0(z)$ — аналитический многочлен, обеспечивающий исчезновение Φ_{30} в бесконечно удаленной точке.

Краевое условие (28) сначала рассмотрим при $P_1(z) \equiv 1$. Повторяя схему решения задачи (15), убеждаемся, что одним из решений является сумма

$$L(z) = L_{31}(z) + L_{32}(z) + L_{33}(z),$$

где первое слагаемое ограничено и определяется формулой

$$L_{31}(z) := \sigma \bar{z} \chi'(z) - \frac{\sigma}{2\pi i} \iint\limits_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta'_n} \frac{dw d\overline{w}}{w - z},$$

где $\chi'(z)$ — характеристическая функция множества $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta'_n$, а второе

$$L_{32}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^1 \frac{\bar{\tau}\, d\tau}{\tau - z}$$

также ограничено в окрестности нуля.

Третье слагаемое — это разность функции

$$\mathscr{P}_1(z) := \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n + \frac{\rho_n^2}{z - c_n} \right) \chi_n(z) \tag{29}$$

и соответствующей функции Миттаг-Леффлера, которую можно искать в виде

$$\mathscr{M}_k(z) := \sigma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2}{z - c_n} \left(\frac{c_n}{z} \right)^k, \tag{30}$$

где k — натуральное число. Его можно представить в виде

$$L_{33}(z) = \sigma \Theta_1(z) + \sigma \Theta_2(z),$$

где

$$\Theta_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(z), \quad \Theta_2(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2}{z - c_n} \left(\chi_n(z) - \left(\frac{c_n}{z} \right)^k \right).$$

Первая из этих сумм локально конечна при $z \neq 0$ и ограничена при $\sum c_n < \infty$. Если последний ряд расходится, то она возрастает до бесконечности при стремлении z к нулю. Ясно, что скорость ее возрастания не выше, чем у номера $\mathbf{n}(z)$.

Определение 3. Пусть N — наименьшее из неотрицательных целых чисел, для которых справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(z) = O(|z|^{-N}). \tag{31}$$

Будем называть эту величину *центрированным порядком закручивания спирали.*

Очевидно, $N \le M$. Если ряд $\sum c_n$ сходится, то $N = 0$.

Для оценки $\Theta_2(z)$ рассмотрим два случая. Сначала пусть $z \ne 0$ лежит в круге D_n. Тогда

$$\frac{\rho_n^2}{z - c_n}\left(\chi_n(z) - \left(\frac{c_n}{z}\right)^k\right) = \frac{\rho_n^2}{z^k}\left(z^{k-1} + z^{k-2}c_n + \dots + c_n^{k-1}\right)$$

и отсюда

$$\left|\frac{\rho_n^2}{z - c_n}\left(\chi_n(z) - \left(\frac{c_n}{z}\right)^k\right)\right| \le \frac{k\rho_n^2(c_n + \rho_n)^{k-1}}{|z|^k}.$$

Если z не лежит в круге D_n, то

$$\frac{\rho_n^2}{z - c_n}\left(\chi_n(z) - \left(\frac{c_n}{z}\right)^k\right) = -\frac{\rho_n^2 c_n^k}{(z - c_n)z^k}, \quad \left|\frac{\rho_n^2}{z - c_n}\left(\chi_n(z) - \left(\frac{c_n}{z}\right)^k\right)\right| \le \frac{\rho_n c_n^k}{|z|^k}.$$

Как и выше, пусть $\mathbf{n}(z)$ — наибольший из номеров кругов, которым принадлежит $z \ne 0$. Тогда

$$|\Theta_2(z)| \le \sum_{n=1}^{\mathbf{n}(z)} \frac{k\rho_n^2(c_n + \rho_n)^{k-1}}{|z|^k} + \sum_{n=\mathbf{n}(z)+1}^{\infty} \frac{\rho_n c_n^k}{|z|^k}.$$

Таким образом, если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n^2(c_n + \rho_n)^{k-1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n c_n^k$ сходятся, то сходится и ряд (30), причем $\Theta_2(z) = O(z^{-k})$. Заметим, что оба эти ряда сходятся, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{k+1} < \infty. \tag{32}$$

Итак, все эти выкладки справедливы при $k = \kappa - 1$, где κ — экстремальный показатель спирали. Отсюда следует

Теорема 4. *Пусть Γ — неконцентрическая круговая спираль с показателем закручивания M, центрированным показателем закручивания N и экстремальным показателем κ. Пусть $g \in H_\nu^M(\Gamma)$ и многочлен Тейлора P этой функции в точке 0 би-аналитический, т. е. представим в виде (26). Тогда при выполнении условия (9) задача о скачке (20) имеет решение Φ_0 в классе функций, имеющих асимптотику (22) в точке 1 и*

$$\Phi_0(z) = P_0(z)K(z) + P_1(z)L(z) + O(1) \tag{33}$$

в точке 0. Здесь вблизи начала координат

$$L(z) = O(z^{-N}) + O(z^{-\kappa+1}). \tag{34}$$

3. Однородная задача Римана

Рассмотрим некоторые случаи задачи (2) с $g \equiv 0$ на неконцентрической спирали сильного закручивания. Несколько случаев такой задачи на концентрических спиралях рассмотрены в [10, 11].

Итак, пусть Γ — неконцентрическая спираль сильного закручивания с введенными выше характеристиками M, N, κ. В задаче (2) положим $g \equiv 0$, $G(t) = \exp f(t)$, $f \in H_\nu^M(\Gamma)$. Пусть многочлен Тейлора этой функции в точке 0 би-аналитический. Будем считать, что $f(0) = f(1) = 0$ и выполнено условие (9). Тогда, очевидно, справедливо следующее утверждение о разрешимости однородной задачи Римана.

Следствие 3. *При выполнении приведенных выше условий любое решение однородной задачи Римана* (2) *в классе функций, ограниченных в точке* 1 *и допускающих в точке* 0 *оценку*

$$\Phi(z) \le A \exp B|z|^{-\mu}, \quad \mu = \max\{M-1, N, \kappa - 1\},$$

где A и B — положительные постоянные, имеет вид

$$\Phi(z) = F(z^{-1}) \exp \Phi_0(z), \tag{35}$$

где Φ_0 — построенное в разд. 2 *решение задачи о скачке со скачком f, а $F(z)$ — целая функция порядка μ (см., например,* [19]).

Конечно, все ограниченные вблизи нуля решения однородной задачи Римана (2) также представимы в виде (35). Однако эта задача может не иметь нетривиальных ограниченных решений. Нужно отметить в связи с данным следствием, что важные результаты получены в [20]. В ней изучена краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка на спрямляемых спиралеобразных контурах.

Следствие 4. *Пусть Γ — спираль сильного закручивания с введенными выше характеристиками M и κ. В задаче* (2) *положим $g \equiv 0$, $G(t) = \exp f(t)$, $f \in H_\nu^M(\Gamma)$ и выполнено условие* (9). *Пусть многочлен Тейлора этой функции в точке* 0 *аналитический и имеет в этой точке нуль порядка m. Если $2(m+1) > M$, то задача не имеет нетривиальных ограниченных вблизи начала координат решений.*

Доказательство. Выше получено решение задачи о скачке при сформулированных условиях со скачком f. В начале координат оно имеет асимптотику

$$\Phi_0(z) = P(z)K(z) + O(1),$$

где

$$P(z) = \sum_{n=m+1}^{M-1} b_n z^n, \quad b_{m+1} \ne 0,$$

есть многочлен Тейлора скачка f в точке 0. Отсюда

$$\operatorname{Re} \Phi_0(z) = \sigma \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(z) \right) \operatorname{Re} P(z) + O(1),$$

т. е. на линии $\Lambda := \{z : \operatorname{Re} P(z) = 0\}$ величина $\operatorname{Re} \Phi_0(z)$ ограничена. В начале координат эта линия распадается на $m+1$ дуг, разделяющих окрестность нуля на $2(m+1)$ криволинейных секторов раствора $\frac{\pi}{m+1}$ каждый.

Если задача имеет ограниченное решение $\Psi(z)$, то отношение $\Psi_0(z) := \Psi(z) \exp(-\Phi_0(z))$ голоморфно в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{0\}$, допускает оценку

$$|\Psi(z)| = O(\exp |z|^{m+1-M})$$

в окрестности нуля и ограничено на линии Λ. Тогда в силу принципа Фрагмена — Линделефа (см., например, [16]) оно ограничено в окрестности нуля при

$$\frac{\pi}{M-m+1} > \frac{\pi}{m+1}.$$

Ссылка на теорему Лиувилля завершает доказательство.

Для формирования более целостного представления о теории краевой задачи Римана считаем также целесообразным предложить читателю ознакомиться с недавней работой [21].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962.
3. *Lu Jian-Ke.* Boundary value problems for analytic functions. Singapore: World Sci., 1993.
4. *Селезнев В. А.* Краевая задача Римана в классах жордановых границ // Метрические вопросы теории функции и отображений. Киев: Наук. думка, 1980. С. 125–132.
5. *Безродных С. И., Власов В. И.* Задача Римана — Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 3. С. 277–312.
6. *Безродных С. И., Власов В. И.* Асимптотика задачи Римана — Гильберта для модели магнитного пересоединения в плазме // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 11. С. 1898–1914.
7. *Кац Б. А.* Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 789–792.
8. *Kats Boris A., Katz David B.* Marcinkiewicz exponents and integrals over non-rectifiable paths // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39, N 21. P. 3402–3410.
9. *Кац Б. А., Кац Д. Б.* Интегрирование по неспрямляемым дугам и его приложения // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 1. С. 95–108.
10. *Kats Boris A., Katz David B.* Cauchy–Hadamard integral with applications // Monatsch. Mat. 2019. V. 189, N 4. P. 683–689.
11. *Кац Б. А.* Зигзаги и спирали в краевых задачах // Изв. вузов. Математика. 2019. № 7. С. 39–47.
12. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
13. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. М.: Наука, 1976.
14. *Фукс Б. А., Шабат Б. В.* Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: Наука, 1964.
15. *Чибрикова Л. И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977.
16. *Балк М. Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 85. С. 187–246. (Итоги науки и техники).
17. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
18. *Plaksa S. A.* Riemann boundary problem with infinite index of logarithmic order on a spiral-form contour. I // Ukr. Math. J. 1990. V. 42, N 11. P. 1351–1358.
19. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Yefimushkin A.* On the boundary-value problems for quasiconformal functions in the plane // J. Math. Sci. 2016. V. 214, N 2. P. 200–219.
20. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
21. *Кац Д. Б.* Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах // Изв. вузов. Математика. 2014. № 3. С. 68–71.

Поступила в редакцию 9 сентября 2020 г.
После доработки 27 марта 2021 г.
Принята к публикации 14 апреля 2021 г.

Кац Борис Александрович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420138

Кац Давид Борисович
Московский политехнический университет,
ул. Б. Семеновская, 38, Москва 107023
kazdavid89@gmail.com

Люй Чжисинь
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420138