



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

L. V. Rozovskii, The probabilities of large deviations on Borel sets, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1983, Volume 130, 157–166

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

January 13, 2025, 07:57:04



ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ НА БОРЕЛЕВСКИХ
МНОЖЕСТВАХ

1. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых случайных векторов из k -мерного евклидова пространства R_k с общим законом распределения V ; $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n = 1, 2, \dots$

В дальнейшем \mathcal{A} — класс борелевских множеств A в R_k , $\Phi(A) = \int_A \varphi(x) dx$ — k -мерное нормальное распределение с нулевым вектором средних и единичной ковариационной матрицей.

В [I] изучались условия, при которых

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n\right\} = \Phi(A_n)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty \quad (I)$$

равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathcal{A}\}$ таким, что

$$\Phi(A_n) \geq \Phi\{x : |x| > \Lambda(\sqrt{n})/\sqrt{n}\}, \quad (2)$$

где $\Lambda(z)$ — дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая при всех $z \geq z_0$ и некотором $\varepsilon > 0$ следующим условиям:

$$1 + \varepsilon \leq z\Lambda'(z)/\Lambda(z) \leq 2 - \varepsilon; \quad (3a)$$

$$\varepsilon\Lambda(z)/z^3 \leq -\left(\frac{\Lambda'(z)}{z}\right)' \leq \frac{1}{\varepsilon} \Lambda(z)/z^3 \quad (3b)$$

(отметим, что условие (3a) исключает из рассмотрения функции $\Lambda(z)/z$, растущие к бесконечности достаточно медленно).

В настоящей работе продолжены исследования [I], (где можно найти соответствующие ссылки); изучается точность аппроксимации вероятности $P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n, A_n \in \mathcal{A}\right\}$ величиной $\Phi(A_n)$ при более слабых ограничениях на $\Lambda(z)$.

Пусть $s \geq 2$ — целое число, функции $\Lambda(z)$ и $\varepsilon(z)$ удовлетворяют условиям

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, \quad \Lambda(z)/z^{1+\varepsilon_0} \downarrow, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1, \quad z \geq z_0; \quad (4)$$

$$\varepsilon(z) > 0, \quad z^{2-s}\varepsilon(z) \downarrow 0, \quad z \geq z_1; \quad \liminf_{z \rightarrow \infty} \varepsilon(z) = 0; \quad (5)$$

$$\varepsilon(z)/\varepsilon(2z) = O(1), \quad z \rightarrow \infty; \quad (6)$$

$$\varepsilon(z) \geq \begin{cases} z^{-1}, & \text{если } s \text{ нечетно,} \\ z^{-2} + z(\Psi^{-1}(z))^{-2}, & \text{если } s \text{ четно,} \end{cases} \quad (7)$$

где $\Psi^{-1}(z)$ — функция обратная $\Psi(z) = z^2/\Lambda(z)$ (отметим, что $\Psi^{-1}(z)/z \uparrow \infty$, $\Psi^{-1}(z)/z^{1-\varepsilon_0} \downarrow$). Положим

$$\alpha_p(\vec{t}, z) = \int_{|x| \leq z} (\vec{t}, x)^p V(dx), \quad z > 0, \quad \vec{t} \in R_k, \quad p = 1, \dots, s,$$

и будем говорить, что случайный вектор X_1 имеет момент $\alpha_p(\vec{t})$ порядка p , если $\alpha_p(\vec{t}) = \lim_{z \rightarrow \infty} \alpha_p(\vec{t}, z)$ существует и конечен для

всех t , $|t|=1$.

Пусть, если s четно

$$\Psi_s(z) = \int_{|y|>z} |y|^s V(dy) + z^{-1} \sup_{|t|=1} |\alpha_{s+1}(t, z)| + z^{-2} \int_{|y|\leq z} |y|^{s+2} V(dy)$$

и $\Psi_s(z) = z \Psi_{s-1}(z)$, если s нечетно. Положим также

$$x_s(z) = \frac{(\Lambda(z))^s}{z^{2s-2}} \varepsilon(z^2/\Lambda(z)), \quad v_s(z) = x_s(\Lambda^{-1}(z)), \quad (8)$$

$$\Gamma(u, z) = u(z - \frac{1}{2}u)(\Lambda(z))^{-2}, \quad \text{где } u > 0, \quad z > z_0.$$

Пусть H - класс непрерывно дифференцируемых функций $h: R_k \rightarrow R_1$, удовлетворяющих при всех $z > z_0$ и векторах $\theta \in R_k$, $|\theta|=1$ следующим условиям:

$$c_1 < h(z\theta) < c_2 (z/\Lambda^{-1}(z))^{k-1}, \quad 0 < c_1 < 1 < c_2; \quad (9a)$$

$$\frac{1}{\varphi_k} \int_{|\theta|=1} h(z\theta) ds = 1, \quad \varphi_k = 2\pi^{k/2} / \Gamma(k/2); \quad (9b)$$

$$0 \leq z \frac{dh(z\theta)}{dz} \leq c_2 h(z\theta). \quad (9c)$$

Здесь ds - элемент поверхности сферы $\{\theta: |\theta|=1\}$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $s \geq 2$ - целое число, функции $\Lambda(z)$ и $\varepsilon(z)$ удовлетворяют условиям (4)-(7) и

$$\varepsilon(z) \geq z^{-s} \exp(-\frac{1}{2}(q-\frac{1}{2})(z/\Lambda^{-1}(z))^2), \quad q > 0, \quad z \geq z_q; \quad (10)$$

$$E(t, \chi_1) = 0, \quad E(t, \chi_1)^2 = |t|^2, \quad \forall t \in R_k; \quad (11)$$

A) при некотором n_0 распределение суммы S_{n_0} имеет ненулевую абсолютно непрерывную компоненту.

При сделанных предположениях соотношение

$$P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n \right\} = \Phi(A_n) e^{O(x_0(\sqrt{n}))}, \quad n \rightarrow \infty \quad (12)$$

выполняется равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathcal{B}\}$, удовлетворяющим условию (2), тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

B) случайный вектор χ_1 имеет моменты до порядка s включительно и эти моменты совпадают с соответствующими моментами распределения Φ ,

$$C) \Psi_s(z) = O(\varepsilon(z)); \quad z \rightarrow \infty;$$

D) равномерно по всем $h \in H$

$$L_h(z) \int_{|x|>u} e^{\Gamma(u, z)} f_h(x, z) V(dx) du = O(z^{-1} v_s(z) e^{O(v_s(z))}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$f_h(x, z) = \int_{|\theta|=1} \exp\left\{ \left(1 - \frac{|x|}{z}\right) \log h(|x|\theta) - \frac{1}{2} \frac{z|x|}{(\Lambda^{-1}(x))^2} (\widehat{x, \theta})^2 \right\} ds, \quad (13)$$

$(\widehat{x, \theta})$ - угол между векторами x и θ (при $k=1$ принимаем

$f_n = 1$), β - произвольное фиксированное число из интервала $(0, \delta_*)$, где $\delta_* = \delta_*(\varepsilon_0) < 1$ - корень уравнения (см. (4))
 $\delta + \delta^{-(1+\varepsilon_0)/(1+\varepsilon_0)} = 2(\delta_*(\frac{1}{3}) = 0.382\dots, \delta_*(\frac{1}{4}) = 0.521\dots, \delta_*(\frac{1}{5}) = 0.7796\dots)$.

Для сферически симметричного V условие Д) равносильно условию

$$\int_{\beta z}^z e^{\Gamma(u, z)} \int_{|x|>u} V(dx) du = O\left(\left(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\right)^{k-1} \frac{v_3(z)}{z} e^{0(v_3(z))}\right), z \rightarrow \infty.$$

Если $\varkappa_3(z)$ стремится к нулю с ростом z , то имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha \geq 2$ - целое, функции $\Lambda(z)$ и $\varepsilon(z)$ удовлетворяют (4)-(7), (10) и $\varepsilon(z) = o(z^\alpha (\Psi^{-1}(z))^{-2})$, $z \rightarrow \infty$. Для выполнения соотношения

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n\right\} = \Phi(A_n)(1 + o(\varkappa_3(\sqrt{n}))), n \rightarrow \infty \quad (14)$$

равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathcal{A}\}$, удовлетворяющим (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия А)-Д), причем в Д) выражение $e^{0(v_3(z))}$ может быть заменено единицей.

Из доказательств следует, что достаточность в теоремах 1 и 2 остается справедливой, если условие (10) заменить условием

$$\varepsilon(z) \geq z^{\alpha-2} \exp\left(-\frac{1}{\varphi} \left(\frac{\Psi^{-1}(z)}{z}\right)^2\right), \varphi > 0, z \geq z_\varphi. \quad (15)$$

Кроме того, необходимость в теоремах 1 и 2 выполняется, если соотношение (12) имеет место равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathcal{A}\}$ таким, что

$$\Phi\left\{x: |x| > v_0 \frac{\Lambda(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right\} \geq \Phi(A_n) \geq \Phi\left\{x: |x| > \frac{\Lambda(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right\}, \quad (16)$$

где v_0 - некоторое достаточно малое положительное число, зависящее лишь от постоянных ε_0 и φ из условий (4) и (10).

Легко видеть, что условия (15) и (6) выполняются если

$$\varepsilon(z) z^M \uparrow, M > 0, z \geq z_M. \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие Д) равносильно условию

$$D_1) \text{ для } \forall \delta > 0 \int \Phi\left(A - \frac{y}{z}\right) V(dy) = O\left(z^{-2} \varkappa_3(z) e^{0(\varkappa_3(z))} \Phi(A)\right), z \rightarrow \infty, \\ |y| > \delta \Lambda(z)$$

равномерно по множествам A , являющимся дополнениями выпуклых множеств в \mathbb{R}_k и удовлетворяющим условию $\Phi(A) \geq \Phi\{x: |x| > \Lambda(z)/z\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что $\Lambda(z)$ - дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\Lambda(z)/z \uparrow \infty, z(\Lambda(z)/z)' < c_3(1 + \sqrt{\varkappa_3(z)}), z \geq z_1, \quad (18)$$

а функция $\varepsilon(z)$ удовлетворяет условиям (5) и (6). Тогда условие Д) равносильно условию

$$\int_{|x|>z} V(dx) = O\left(\left(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\right)^k \frac{v_3(z)}{z^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\right)^2\right) + O(v_3(z))\right), z \rightarrow \infty. \quad (19)$$

При $\alpha \geq 3$ из (18) следует, что $\varkappa_3(z) = o(1)$, $v_3(z) = o(1)$, $z \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\Lambda(z)$ - дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (4) и (3а); функция $\varepsilon(z)$ удовлетворяет условиям (5) и (6). Тогда условие Д) равносильно условию

$$I_H(z) = \sup_{h \in H} \int_z e^{g(u)} \int_{|x| > u} f_h(Z(u), x) V(dx) du = O(z^{-1} u_0(z) e^{O(u_0(z))}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Здесь $g(u) = \Gamma(u, Z(u))$, $Z(u)$ - решение уравнения $\Gamma'_z(u, z) = 0$, $u \geq u_0$, существующее и единственное в силу условий (4) и (3в).

Если кроме того, функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (3), то соотношение (20) равносильно условию

$$\sup_{h \in H} \int_{z/|x| < z + \Lambda(z)} e^{g(|x|)} f_h(Z(|x|), x) V(dx) = O\left(\frac{u_0(z)}{(\Lambda(z))^2} e^{O(u_0(z))}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Далее приведем некоторые следствия наших теорем и замечаний.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (4) и

$$\Lambda(z) \geq (1+q)z\sqrt{(2q-4)\ln z}, \quad q > 0, \quad z \geq z_q, \quad (22)$$

где

$$z_q = \max \{ l: l \text{ целое, } \limsup_{z \rightarrow \infty} \Lambda(z)/z^{2l-2} > 0 \}. \quad (23)$$

Для того, чтобы

$$P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n \right\} = \Phi(A_n)(1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathfrak{A}\}$, удовлетворяющим (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия А)

В) теоремы I и, кроме того, условия

$$\Psi_0(z) = o(z^3(\Psi^{-1}(z))^{-2}), \quad z \rightarrow \infty; \quad (24)$$

$$\sup_{h \in H} L_h(z) = o(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Если дополнительно к сделанным предположениям функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условию (3в), то (25) равносильно условию

$$I_H(z) = o(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Достаточность в следствии I справедлива, если $\Lambda(z) > qz\sqrt{\ln z}$,

$q > 0, z > z_q$.

Следствие I уточняет основной результат работы [I].

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функции $\Lambda(z), \alpha_0(z)$ удовлетворяют условиям

$$\Lambda(z)z^{-1} \uparrow \infty, (\Lambda(z)z^{-1})' = O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty; \quad (27)$$

$$\alpha_0(z) \uparrow 0, \alpha_0(z) \frac{z^2}{\Lambda(z)} \uparrow, \alpha_0(z) \geq \exp\left(-\left(\frac{1}{z} - q\right)\left(\frac{\Lambda(z)}{z}\right)^2\right), \quad q > 0, z \geq z_q.$$

$$\text{Для того, чтобы } P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n \right\} = \Phi(A_n)(1+O(\alpha_0(\sqrt{n}))), \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно по всем последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathfrak{A}\}$, удовлетворяющим (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия А)

теоремы I, (II) и, кроме того

$$z^{-1} \sup_{|t|=1} \left| \int_{|x| \leq z} (tx)^3 V(dx) \right| + \int_{|x| > z} |x|^2 V(dx) = O\left(\alpha_0(\Lambda(z)) \frac{z^2}{(\Lambda(z))^2}\right), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$\int_{|x|>z} V(dx) = O\left(x_0 \left(\frac{z^2}{\Lambda(z)}\right) \left(\frac{\Lambda(z)}{z}\right)^K z^{-2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z}{\Lambda^{-1}(z)}\right)^2\right)\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

В частности, утверждение следствия I выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия A) теоремы I, (II) и

$$\int_{|x|>z} |x|^2 V(dx) = O\left(\frac{z^2}{(\Lambda(z))^2}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

$$\int_{|x|>z} V(dx) = O\left(z^{-2} (\Lambda(z) z^{-1})^K \exp\left(-\frac{1}{2} (z/\Lambda^{-1}(z))^2\right)\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть дважды дифференцируемая функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (4), $0 < \varepsilon_0 < 1/3$, и (Зв); а $x_0(z)$ такова, что $x_0(z) \downarrow 0$, $x_0(z) z^2 / \Lambda(z) \uparrow$, $x_0(z) \geq \exp\left(-\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_0\right) (\Lambda(z) z^{-1})^{2/(1+\varepsilon_0)}\right)$.

Утверждение следствия 2 выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия A) теоремы I², (II) и, кроме того,

$$\int_{|x|>z} |x|^2 V(dx) + z^{-1} \sup_{|t|=1} \left| \int_{|x| \leq z} (t, x)^3 V(dx) \right| = O\left(x_0(\Psi^{-1}(z)) \left(\frac{z}{\Psi^{-1}(z)}\right)^2\right), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$I_H(z) = O\left(z^{-1} x_0(\Lambda^{-1}(z))\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\nu \geq 3$ - целое, дважды дифференцируемая функция $\Lambda(z)$ удовлетворяет условиям (Зв) и $\Lambda(z)/z^{2-2/\nu} \uparrow$, $z \geq z_0$. Пусть функция $x_0(z)$ такова, что $x_0(z) \downarrow 0$, $x_0(z) z^{2\nu} / (\Lambda(z))^{2+\nu} \uparrow$, $z \geq z_0$.

Для того чтобы выполнялось утверждение теоремы 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия A), B) и кроме того,

$$\sup_{|x| < |x| < \Lambda^{-1}(z) + z} \int e^{g(|x|)} f_h(Z(|x|), x) V(dx) = O\left(\frac{x_0(\Lambda^{-1}(z))}{(\Lambda^{-1}(z))^2}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (28)$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть функция $\Lambda(z)$ такова, что $\Lambda(z)/z \uparrow \infty$; $(\ln(\Lambda(z)/z))' = O(z^{-1})$, $z \rightarrow \infty$; выполняются условия A) и (II). Для того, чтобы при всех $\tau_0 \in (0, 1)$

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{n}} S_n \in A_n\right\} = \Phi(A_n) \exp\left(o\left(\frac{\Lambda^2(\sqrt{n})}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty$$
 равномерно по последовательностям $\{A_n, A_n \in \mathfrak{A}\}$, удовлетворяющим (I6), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{|x|>z} V(dx) = O\left(z^{-2} \exp\left(-\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) (z/\Lambda^{-1}(z))^2\right)\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Различные следствия из теорем I, 2 и замечаний I-3 можно формулировать аналогично их одномерным вариантам (см. [2], [3]).

Доказательства приведенных утверждений в значительной мере используют результаты из [1] - [3].

2. Пусть
$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt.$$

ЛЕММА I. Пусть выполняются условия теоремы I. Если для каждого $v \in (0, 1)$ и каждого $t \in R_k, |t|=1$,

$$P\left\{\sum_{\ell=1}^n (t, \chi_{\ell}) > u\right\} = (1 - \Phi_1(u/\sqrt{n})) e^{O(\varepsilon_3(\sqrt{n}))}, \quad n \rightarrow \infty \quad (30)$$
 равномерно относительно u в области $\frac{1}{2} \Lambda(\sqrt{n}) < u < \frac{1}{2} \Lambda(\sqrt{n})$,
 то выполняются условия B) и C).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись [2], теорема Ia (необходимость), получим для каждого $t \in R_k, |t|=1$ при $z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \chi_{\ell}(t, z) &= \int_{|(t, x)| \leq z} (t, x)^{\ell} V(dx) \rightarrow \xi_{\ell}(t) = \int_{R_k} (t, x)^{\ell} \Phi(dx), \quad 3 \leq \ell \leq s; \\ \int_{|(t, x)| > z} (t, x)^{\nu} V(dx) + z^{-1} |\chi_{3+1}^*(t, z)| + z^{-2} \chi_{3+2}^*(t, z) &= O(\varepsilon(\frac{z}{2})) \quad (z \text{ четно}); \\ z \int_{|(t, x)| > z} (t, x)^{\nu-1} V(dx) + |\chi_3^*(t, z)| + z^{-1} \chi_{3+1}^*(t, z) &= O(\varepsilon(\frac{z}{2})) \quad (z \text{ нечетно}). \end{aligned}$$

Отсюда (подробнее см. [4], (7)-(9)) следует утверждение леммы I.

Пусть $\delta > 0$. Введем распределение V_{δ} на R_k , положив

$$V_{\delta}(dx) = \begin{cases} V(dx), & |x| \leq \delta \Lambda(\sqrt{n}), \\ 0, & |x| > \delta \Lambda(\sqrt{n}). \end{cases}$$

Пусть $V_{\delta n}(A) = V_{\delta}^{*n}(A), P_n(A) = P\{S_n \in A\}, A \in \mathfrak{S}$.

Представим распределение $V_{\delta n}$ в виде:

$$V_{\delta n}(A) = \int_A q_{\delta n}(x) dx + S_{\delta n}(A), \quad A \in \mathfrak{S}, \quad (31)$$

где $q_{\delta n}(x) \geq 0$ - плотность, $S_{\delta n}$ - распределение на R_k .

Следующая лемма уточняет лемму 3 работы [1].

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (5), (7), (15), а также условия A)-C) и $M > 4\sqrt{\frac{K}{q}}$, где q взято из условия (15).

Если при некотором $\delta > 0$ и любом $\rho \geq 1$

$$\int_{|x| > \rho r^{-1}} e^{-\nu|x|} V_{\delta}(dx) = O(\nu^{\delta} \varepsilon(\rho/\nu)), \quad n \rightarrow \infty \quad (32)$$

равномерно по $v \in R_1, 0 \leq v \leq M \Lambda(\sqrt{n})/n$, то

$$V_{\delta n}\{x: |x| > M \Lambda(\sqrt{n})\} = O(n^{-\frac{\delta-2}{2}} \varepsilon(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}) \exp(-\frac{(\Lambda(\sqrt{n}))^{\delta}}{n})), \quad n \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Кроме того, для $V_{\delta n}$ существует такое разложение (31), что

$$S_{\delta n}(R_k) < e^{-\varepsilon_0 n}; \quad (34)$$

$$q_{\delta n}(x) = (2\pi n)^{-k/2} \exp(-\frac{|x|^2}{2n}) + O(\varepsilon(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}) \frac{(\Lambda(\sqrt{n}))^{\delta}}{n^{\delta-1}}), \quad n \rightarrow \infty \quad (35)$$

равномерно по $x \in R_k, |x| \leq M \Lambda(\sqrt{n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f_{\delta}(z) = \int_{R_k} e^{(z, x)} V_{\delta}(dx), z = h + iv, v \in R_k$.

При сделанных в лемме 2 предположениях так же как и в [1], лемма 3, можно показать, что выполняется условие (34) и

$$q_{f_n}(x) = (2\pi)^{-k} \int_{|v| < \varepsilon_0} e^{-(z,x)} f_f^n(z) dv + O(e^{-\varepsilon_0} f_f(h)^n), \quad n \rightarrow \infty \quad (36)$$

равномерно по $x \in R_k$ и h , $|h| \leq M \frac{\Lambda(\sqrt{n})}{\nu}$, где ε_0 - некоторая достаточно малая положительная постоянная, не зависящая от x , h и ν .

Покажем, что при $|h| \leq M \frac{\Lambda(\sqrt{n})}{\nu}$ и $|z| \leq \varepsilon_0$

$$\ln f_f(z) = \frac{1}{2}(z, z) + O(|z_n|^s \varepsilon(c/|z_n|)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (37)$$

где $c = 2\sqrt{2}M$, $z_n = \max\{|z|, 1/\Lambda(\sqrt{n})\}$. Имеем

$$f_f(z) = \int_{|(z,x)| \leq c} e^{(z,x)} V_f(dx) + \int_{|(z,x)| > c} e^{(z,x)} V_f(dx) = I_1 + I_2, \quad (38)$$

$$I_1 = \int_{|(z,x)| \leq c} (1 + \dots + \frac{1}{(\delta_x + 1)!} (z, x)^{\delta_x + 1} + \theta_1(z, x)^{\delta_x + 2}) V(dx) + \theta_2 \int_{|x| > \delta \Lambda(\sqrt{n})} V(dx) = \sum_{l=0}^{\delta} \frac{1}{l!} \xi_l(z) + O(|z_n|^s \varepsilon(c/|z_n|)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (39)$$

где $\delta_x = \delta$, если δ четное, и $\delta_x = \delta - 1$, если δ нечетное; $|\theta_i| < e^c$. Далее, согласно условию (32), $\rho = c$,

$$|I_2| = \left| \int_{|(z,x)| > c > |(h,x)|} + \int_{|(h,x)| > c} \right| \leq$$

$$\leq e^c \int_{|x| > c|z|} V_f(dx) + \int_{|x| > c|h|} e^{(h,x)} V_f(dx) = O(|z_n|^s \varepsilon(c/|z_n|^{-1})), \quad n \rightarrow \infty. \quad (40)$$

Из (38)-(40) следует, что

$$f_f(z) - 1 = \frac{1}{2}(z, z) + \sum_{l=3}^{\delta} \frac{1}{l!} \xi_l(z) + O(|z_n|^s \varepsilon(c/|z_n|^{-1})), \quad n \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Соотношение (37) следует теперь из оценки (41), условия (7), равенства $\ln f_f(z) = \sum_{l=1}^{\delta} (-1)^l \rho^{-l} (f_f(z) - 1)^l + \theta (f_f(z) - 1)^{(\delta_x + 2)/2}$, $|\theta| < 1$ и свойств моментов распределения Φ .

Вернемся к равенству (36). Пусть в нем $h = \frac{x}{n}$, $|x| \leq M\Lambda(\sqrt{n})$. Воспользовавшись соотношениями (37) и

$$|z|^s \varepsilon(c/|z|^{-1}) \leq 2^{s/2} (|h|^s \varepsilon(2M|h|^{-1}) + |v|^s \varepsilon(2M|v|^{-1}))$$

легко получим

$$q_{f_n}(x) = (2\pi\sqrt{n})^{-k} e^{-\frac{|x|^2}{2n}} + O\left(n \left(\frac{\Lambda(\sqrt{n})}{n}\right)^s \varepsilon\left(\frac{2Mn}{\Lambda(\sqrt{n})}\right) \times \int_{|v| < \varepsilon_0 \sqrt{n}} \exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2 + O\left(n \left(\frac{|v|}{\sqrt{n}}\right)^s \varepsilon\left(\frac{2M\sqrt{n}}{|v|}\right)\right)\right) dv + O(e^{-\varepsilon_0} f_f(h)^n)\right), \quad n \rightarrow \infty \quad (42)$$

равномерно по x , $|x| \leq M\Lambda(\sqrt{n})$.

Покажем теперь, что

$$I = \int_{|v| < \varepsilon_0 \sqrt{n}} \exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2 + O\left(n \left(\frac{|v|}{\sqrt{n}}\right)^s \varepsilon\left(\frac{2M\sqrt{n}}{|v|}\right)\right)\right) dv = (2\pi)^{k/2} \exp\left(O\left(\frac{\Lambda(\sqrt{n})}{n^{s-1}} \varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right)\right)\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Достаточно рассмотреть случай $\frac{\Lambda(\sqrt{n})}{n^{s-1}} \varepsilon\left(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}\right) < 1$, поскольку иначе

соотношение (43) выполняется тривиальным образом.

Пусть $\bar{\Lambda}(x) = \Lambda(x)/x$. Разобьем интеграл I на сумму $I_1 + I_2$ интегралов по множествам $\{|v| \leq M\bar{\Lambda}(\sqrt{n})\}$ и $\{M\bar{\Lambda}(\sqrt{n}) < |v| < \varepsilon_0 \sqrt{n}\}$, соответственно. Тогда для всех достаточно больших n

$$I_2 \leq \int_{|v| \geq M\bar{\Lambda}(\sqrt{n})} \exp(-\frac{1}{3}|v|^2) dv \leq \exp(-\frac{1}{4}M^2(\Lambda(\sqrt{n}))^{-2}),$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|v| < M\bar{\Lambda}(\sqrt{n})} \exp(-\frac{1}{2}|v|^2) (1 + O(n(\frac{|v|}{\sqrt{n}})^s \varepsilon(\frac{2M\sqrt{n}}{|v|}))) dv = \\ &= (2\pi)^{k/2} + O(\exp(-\frac{1}{4}M^2\bar{\Lambda}(\sqrt{n})) + n^{-\frac{s-2}{2}} \varepsilon(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})})), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом (см. (15) и (4)) ($n \rightarrow \infty$)

$$I = (2\pi)^{k/2} (1 + O(\frac{\Lambda(\sqrt{n})^s}{n^{s-1}} \varepsilon(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}))) = (2\pi)^{k/2} \exp(O(\frac{\Lambda(\sqrt{n})^s}{n^{s-1}} \varepsilon(\frac{2n}{\Lambda(\sqrt{n})}))), \quad (44)$$

что доказывает (43). Из соотношений (41)–(44) следует (35).

Докажем оценку (33). Имеем ($x = (x_1, \dots, x_k) \in R_k$)

$$V_{\sigma_n} \{x: |x| > M\bar{\Lambda}(\sqrt{n})\} \leq \sum_{\ell=1}^k V_{\sigma_n} \{x: |x_\ell| \geq \frac{M}{\sqrt{k}} \bar{\Lambda}(\sqrt{n})\} = \sum_{\ell=1}^k I_\ell. \quad (45)$$

По неравенству Чебышева и (37) при $\omega = M\bar{\Lambda}(\sqrt{n})/2\sqrt{n}k$

$$I_\ell \leq e^{-2\omega^2} \left(\int_{R_k} e^{\frac{\omega}{\sqrt{n}} x_\ell} V_\sigma(dx) \right)^n + \left(\int_{R_k} e^{-\frac{\omega}{\sqrt{n}} x_\ell} V_\sigma(dx) \right)^n \leq e^{-\omega^2}.$$

Отсюда, из (45) и (15) следует (33). Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы I. Нами будет доказано, что в условиях теоремы I соотношение (12) выполняется равномерно по всем $\{A_n, A_n \in \mathcal{L}\}$, удовлетворяющим (2), тогда и только тогда, когда выполняются условия B), C) и D) (равносильность D) и D₁) можно доказать методами работы [I]).

Несложно доказать, что при любом $\delta > 0$ и $A \in \mathcal{L}$

$$n \int_{|y| > \delta \bar{\Lambda}(\sqrt{n})} V_{\sigma_{n-1}}(A-y) V(dy) \leq P_n(A) - V_{\sigma_n}(A) \leq n \int_{|y| > \delta \bar{\Lambda}(\sqrt{n})} P_{n-1}(A-y) V(dy). \quad (46)$$

Легко показать, что если $0 < \delta \leq 1$ и $E_n = \{x: |x| > \bar{\Lambda}(\sqrt{n})\}$, то

$$n \int_{|y| > \bar{\Lambda}(\sqrt{n})} V_{\sigma_{n-1}}(E_n-y) V(dy) \geq \sup_{y \in R_k} V_{\sigma_{n-1}} \{x: (x, y) \geq 0\} n \int_{|y| > \bar{\Lambda}(\sqrt{n})} V(dy). \quad (47)$$

Поскольку (см. (4) и (II)) $\sup_{y \in R_k} |(V_{\sigma_{n-1}} - \Phi)(x: (x, y) \geq 0)| = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, то из (46), (47) вытекает, что для всех $n \geq n_0$.

$$P_n(E_n) \geq \frac{1}{3} n P\{|X_1| > \bar{\Lambda}(\sqrt{n})\}. \quad (48)$$

Докажем теперь, что соотношение (12) является необходимым для выполнения условий B), C) и D₁). Из (12) легко вытекает (30) и, следовательно, выполняются условия B) и C) теоремы I (см. лемму I). Далее, из (48) и (12), $A_n \equiv E_n$ заключаем (см. также лем-

му 2 из [3]), что

$$P\{|\chi_1| > z\} = O\left(\frac{1}{z^2} \exp\left(-\left(\frac{1}{z} - q_0\right)\left(z/\kappa^{-1}(z)\right)^2\right)\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (49)$$

где $q_0 > 0$ сколь угодно мало. Из (49) вытекает, что

$$\int_{|\alpha| > \rho} e^{|\alpha||x|} V_f(dx) = O\left(\frac{1 + \rho|\alpha|}{\rho^2} \exp\left(-\frac{1 - q_0}{2} \left(\frac{\rho}{\kappa^{-1}(\rho)}\right)^2\right)\right), \quad \rho \rightarrow \infty \quad (50)$$

равномерно по $|\alpha| \leq M\lambda(\sqrt{n})n^{-1}$ и $\rho \geq 1$, если $\delta = \delta(M, q_0, \varepsilon_0)$ выбрано достаточно малым (ε_0 - постоянная из (4)). Таким образом (см. (10)), выполняются условия леммы 2 и, следовательно, соотношения (33)-(35).

Для проверки выполнения условия D_1) достаточно, выбрав $n = \min\{l: l^2 > z\}$, применить соотношения (33) и (35) к левой части неравенства (46) (при этом следует иметь в виду, что $\varepsilon\left(\frac{n}{\lambda(\sqrt{n})}\right) \leq \varepsilon\left(\frac{z^2}{\lambda(z)}\right)$). Итак (I2) \Rightarrow B), C), D_1).

Докажем обратное утверждение, причем вместо условия (10) будем пользоваться более слабым условием (I5). Предварительно отметим, что из условия D_1) $A = \{x: |x| > \frac{\lambda(z)}{z}\}$, следует (I9).

Из (I9), в частности, вытекает, что

$$P\{|\chi_1| < z\} = O\left(\frac{1}{z^2} \varepsilon\left(\frac{\lambda^{-1}(z)}{z}\right) e^{-\left(\frac{1}{z} - q_0\right)\left(z/\kappa^{-1}(z)\right)^2}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (51)$$

где $q_0 > 0$ сколь угодно мало. Пользуясь (I5) и (51) вместо (10) и (49), соответственно, убедимся в справедливости (32). Лемма 2 и (46) позволяют заключить, что равномерно по $n \geq n_0$ и множествам $A \in \mathcal{X}$, удовлетворяющим условию (2) (при $A_n \equiv A$),

$$\Phi(A) e^{O(\alpha_n(\sqrt{n}))} \leq P_n(\sqrt{n}A) \leq \Phi(A) e^{O(\alpha_n(2\sqrt{n}))} + I_n(A), \quad (52)$$

где $I_n(A) = n \int_{|y| > \lambda(\sqrt{n})} P_{n-1}(\sqrt{n}A - y) V(dy)$.

Пусть $l \geq 1/\delta$ - натуральное число, $l \geq 1/\delta$. Будем говорить, что множество $A \in \mathcal{X}$ удовлетворяет условию $E_{l,n}$, если

$$E_{l,n}) \quad \Phi(A) \geq Q_n(l) = \int_{|\alpha| \leq l/\lambda(\sqrt{n})} \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Поскольку

$$I_n(R_n) \leq n \int_{|y| > 1/\lambda(\sqrt{n})} V(dy) \leq Q_n(2) \varepsilon\left(\frac{2n}{\lambda(\sqrt{n})}\right),$$

если l и n достаточно велики (см. условия (I5), (4)-(6) и (51); также [3], (33)), то из (52), в частности, следует, что

$$P_n(\sqrt{n}A) = \Phi(A) e^{O(\alpha_n(\sqrt{n+l}))}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (53)$$

равномерно по множествам $A \in \mathcal{X}$, удовлетворяющим условию $E_{l,n}$, $l=2$.

Пусть $B_* = \{y: \Phi(\sqrt{\frac{n}{n-1}}A - y/\sqrt{n-1}) \geq Q_{n-1}(2)\}$, $B_*^c = R_n/B_*$,

$$\tilde{A} = \{x: \alpha \in A, |\alpha| \leq 4\lambda(\sqrt{n})\}, \quad A \in \mathcal{X}, \quad \alpha, y \in R_n,$$

$$U = \{y: |y| > \frac{1}{l} \lambda(\sqrt{n})\}.$$

Согласно условию (53) для всех $n \geq n_1$

$$\begin{aligned}
 I_n(A) &\leq n \int_{\cup B_*} P_{n-1}(\sqrt{n}A-y)V(dy) + n \int_{\cup B_*^c} P_{n-1}(\sqrt{n}A-y)V(dy) \leq n \int_{|y| > \lambda(\sqrt{2n})} V(dy) + \\
 &+ n \int_{\lambda(\sqrt{2n}) \geq |y| > \lambda(\sqrt{n})} \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{n-1} \tilde{A} - \frac{y}{\sqrt{n-1}}\right) e^{O(x_3(\sqrt{n+L-1}))} V(dy) + 2n Q_{n-1}(\alpha) e^{O(x_3(\sqrt{n+L-1}))} \int_{|y| > \frac{1}{L}\lambda(\sqrt{n})} V(dy) = \\
 &= I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Так же как в [3], (47) можно показать, что

$$I_3 \leq Q_n(\beta) e^{\left(\frac{2n}{\lambda(\sqrt{n})}\right)}, \quad n \geq n_2. \tag{55}$$

Далее

$$I_2 \leq c_1 n e^{O(x_3(\sqrt{n+L-1}))} \int_{\frac{1}{L}\lambda(\sqrt{n+L-1})}^{\lambda(\sqrt{n+L-1})} \Phi\left(A - \frac{y}{\sqrt{n+L-1}}\right) V(dy). \tag{56}$$

Оценивая I_1 с помощью (19), получим из (54)-(56) и D_1)

$$I_n(A) = O(x_3(\sqrt{n+L-1})) e^{O(x_3(\sqrt{n+L-1}))} \Phi(A), \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно по множествам $A \in \mathcal{X}$, удовлетворяющим $E_{\beta, n}$ уже при $\ell=3$. Отсюда следует, что $P_n(\sqrt{n}A) = \Phi(A) e^{O(x_3(\sqrt{n+L-1}))}$, $n \rightarrow \infty$, равномерно по A , удовлетворяющим $E_{3, n}$.

Повторив сделанные рассуждения ((53)-(56)) еще $L-3$ раз, завершим доказательство того, что $B), C), D_1) \implies I_2$. Теорема 2 является следствием теоремы 1 и леммы 2 из [1].

Замечание 2 доказывается так же, как замечание 1 из [3]. Следует воспользоваться условием (9a) и в выкладках из ([3], (49), (50)) заменить функцию $d(t, x)$ на $d(t, x) + (1-t)(k-1) \frac{\log \lambda(x)}{\lambda^2(x)}$, $\lambda(x) = \alpha/\lambda^{-1}(x)$.

Доказательство замечания 3 проводится методами работы [1]. Доказательства следствий 1-5 проводятся с помощью соответствующих замечаний и теорем 1, 2 так же, как и одномерные аналоги в [2], [3].

Литература

1. О с и п о в Л.В. Многомерные предельные теоремы для больших отклонений. - Теор. вероятн. и ее примен., 1975, т. XX, № 1, с. 40-57.
2. Р о з о в с к и й Л.В. On asymptotic expansions for probabilities of large deviations. - Selecta math. Sov., 1983.
3. Р о з о в с к и й Л.В. О предельных теоремах для больших отклонений в узких зонах. - Теор. вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI № 4, с. 857-867.
4. Р о з о в с к и й Л.В. Оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме без моментных предположений - Матем. заметки, 1978, т. XXIII, № 4, с. 627-640.