Е. Грбич, С. Терио, Гомотопический тип дополнения конфигурации координатных подпространств коразмерности два, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 6, 203–204

DOI: 10.4213/rm803

ГОМОТОПИЧЕСКИЙ ТИП ДОПОЛНЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ КООРДИНАТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА

Е. Грбич, С. Терио

Координатное подпространство в $\mathbb{C}^n$ есть $L_\sigma = \{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n \mid z_{i_1}=\dots=z_{i_k}=0\}$, где $\sigma=\{i_1,\dots,i_k\}$ – подмножество в $[n]$. Каждому симплициальному комплексу K на множестве $[n]$ сопоставим конфигурацию координатных подпространств $\mathscr{CA}(K)=\{L_\sigma \mid \sigma\notin K\}$ и ее дополнение $U(K)=\mathbb{C}^n\setminus\bigcup_{\sigma\notin K}L_\sigma$. С другой стороны, комплексу K сопоставляется пространство Дэвиса–Янушкиевича $DJ(K)=\bigcup_{\sigma\in K}BT_\sigma\subset BT^n$, где BT^n – классифицирующее пространство n-мерного тора, т.е. произведение n экземпляров пространства $\mathbb{C}P^\infty$, и $BT_\sigma := \{(x_1,\dots,x_n)\in BT^n | x_i=*, \text{где } i\notin\sigma\}$. Определим $\mathscr{Z}_K$ как гомотопический слой вложения $DJ(K)\to BT^n$. Согласно результату [1; 8.9], имеется эквивариантная деформационная ретракция $U(K)\to\mathscr{Z}_K$, кроме того, кольцо целочисленных когомологий пространства $\mathscr{Z}_K$ было вычислено в [1; 7.6, 7.7].

Теорема 1. *Дополнение конфигурации координатных подпространств коразмерности два в $\mathbb{C}^n$ гомотопически эквивалентно букету сфер $\bigvee_{k=2}^n (k-1)\binom{n}{k}S^{k+1}$.*

Доказательство. Пусть K – несвязное объединение n точек. Тогда $DJ(K)$ является букетом из n копий пространства $\mathbb{C}P^\infty$, а $U(K)$ получается удалением из $\mathbb{C}^n$ всех координатных подпространств коразмерности два, т.е. вида $z_i=z_j=0$, $1\leqslant i<j\leqslant n$. Таким образом, для доказательства теоремы необходимо описать гомотопический слой вложения $\bigvee_{t=1}^n\mathbb{C}P^\infty\to\prod_{t=1}^n\mathbb{C}P^\infty$. Необходимое описание получается применением предложения 1 к случаю $X_1=\dots=X_n=\mathbb{C}P^\infty$, с учетом того, что $\Omega\mathbb{C}P^\infty\simeq S^1$.

Необходимо подчеркнуть, что теорема 1 имеет место без применения надстройки. Ранее известные гомотопические разложения имели место лишь после применения некоторого числа надстроек. Наилучшее из таких разложений принадлежит Шаперу [2] и требует одной надстройки. Для завершения доказательства теоремы 1 необходимо доказать предложение 1. Это утверждение было впервые доказано Портером [3] путем исследования подпространств в стягиваемых пространствах. Мы приводим более эффективное доказательство, основанное на лемме о кубе. Мы работаем в категории связных пространств с отмеченной точкой и непрерывных отображений. Пусть $*$ обозначает отмеченную точку. Для пары пространств X, Y положим $X\rtimes Y=(X\times Y)/(*\times Y)$, $X\wedge Y=(X\rtimes Y)/(X\times *)$ и $X*Y=\Sigma X\wedge Y$. Будем обозначать тождественное отображение на X через X и отображение в точку через $*$.

Лемма 2. *Пусть A, B и C – пространства, а Q – гомотопический копредел отображения $A\times B\xrightarrow{*\times B}C\times B$ и проекции $A\times B\xrightarrow{\pi_1}A$. Тогда $Q\simeq(A*B)\vee(C\rtimes B)$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму итерированных гомотопических копределов

$$\begin{array}{ccccc}
A\times B & \xrightarrow{\pi_2} & B & \xrightarrow{i_2} & C\times B \\
\big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle *} & & \big\downarrow{\scriptstyle s} \\
A & \xrightarrow{*} & A*B & \xrightarrow{t} & \overline{Q}
\end{array},$$

где π_2 – проекция, а i_2 – вложение. Известно, что левый квадрат является гомотопически кодекартовым. Пространство $\overline{Q}$ определяется как гомотопический копредел правого квадрата. Заметим, что $i_2\circ\pi_2\simeq *\times B$. Внешний прямоугольник является гомотопически кодекартовым, как композиция двух гомотопически кодекартовых квадратов, поэтому $\overline{Q}\simeq Q$. Из правого квадрата вытекает, что гомотопическим кослоем отображения $C\times B\to Q$ является $\Sigma B\vee(A*B)$. Следовательно, отображение t имеет левое гомотопически обратное r. Кроме того, $s\circ i_2\simeq *$, и поэтому стягивание B в точку в правом квадрате приводит к гомотопическому корасслоению $C\rtimes B\longrightarrow Q\xrightarrow{r}A*B$, где $r\circ t$ гомотопно тождественному отображению.

Лемма 3. *Для любых $Y_1,\dots,Y_n$ имеет место гомотопическая эквивалентность*

$$\Sigma(Y_1\times\dots\times Y_n)\simeq\bigvee_{k=1}^n\biggl(\bigvee_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n}\Sigma Y_{i_1}\wedge\dots\wedge Y_{i_k}\biggr).$$

Доказательство. Индуктивное применение разложения $\Sigma(A\times B)=\Sigma A\vee\Sigma B\vee(\Sigma A\wedge B)$.

Следующее утверждение принадлежит Матеру [4] и известно как лемма о кубе.

Лемма 4. *Пусть задана диаграмма пространств и отображений*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & F \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& G \arrow[rr] \arrow[dd] & & H \arrow[dd] \\
A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \arrow[dr] & \\
& C \arrow[rr] & & D
\end{tikzcd}$$

где нижняя грань является гомотопически кодекартовым квадратом, а боковые стороны являются декартовыми квадратами, индуцированными отображением $H\to D$. Тогда верхняя грань является гомотопически кодекартовым квадратом.

Предложение 5. *Пусть $X_1,\dots,X_n$ – пространства и F_n – гомотопический слой вложения $X_1\vee\dots\vee X_n\to X_1\times\dots\times X_n$. Тогда имеется гомотопическое разложение*

$$F_n\simeq\bigvee_{k=2}^{n}\biggl(\bigvee_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n}(k-1)(\Sigma\Omega X_{i_1}\wedge\dots\wedge\Omega X_{i_k})\biggr).$$

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n=2$ хорошо известно, что $F_2\simeq\Sigma\Omega X_1\wedge\Omega X_2$. Пусть $n\geqslant 3$ и предположим, что утверждение имеет место для F_{n-1}. Положим $M_k=X_1\vee\dots\vee X_k$ и $N_k=X_1\times\dots\times X_k$. Заметим, что M_n является копроизведением M_{n-1} и X_n. Отображая каждую вершину соответствующего кодекартова квадрата в N_n, мы получаем гомотопические расслоения $\Omega N_n\to *\to N_n$, $\Omega N_{n-1}\to X_n\to N_n$, $F_{n-1}\times\Omega X_n\to M_{n-1}\to N_n$ и $F_n\to M_n\to N_n$. Представим N_n как $N_{n-1}\times X_n$. Тогда из леммы 4 вытекает существование гомотопически кодекартова квадрата

$$\begin{tikzcd}
\Omega N_{n-1}\times\Omega X_n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & F_{n-1}\times\Omega X_n \arrow[d] \\
\Omega N_{n-1} \arrow[r] & F_n
\end{tikzcd},$$

где, как легко видеть, g является проекцией, а h – связывающим отображением для гомотопического расслоения $F_{n-1}\times\Omega X_n\to M_{n-1}\times *\to N_{n-1}\times X_n$. Следовательно, $h\simeq\partial_{n-1}\times\Omega X_n$, где ∂_{n-1} – связывающее отображение для расслоения $F_{n-1}\to M_{n-1}\to N_{n-1}$. Но $\partial_{n-1}\simeq *$, так как отображение $\Omega M_{n-1}\to\Omega N_{n-1}$ имеет правое гомотопически обратное. Итак, $h\simeq *\times\Omega X_n$. В силу леммы 2, $F_n\simeq(\Omega N_{n-1}*\Omega X_n)\vee(F_{n-1}\rtimes\Omega X_n)$. Поскольку пространство F_{n-1} является надстройкой, мы имеем $F_{n-1}\rtimes\Omega X_n\simeq F_{n-1}\vee(F_{n-1}\wedge\Omega X_n)$. Теперь, применяя разложение $\Sigma\Omega N_n\simeq\Sigma(\Omega X_1\times\dots\times\Omega X_n)$ из леммы 3 совместно с разложением для F_{n-1} из предположения индукции и приводя подобные члены, мы получаем необходимое разложение пространства F_n в букет.

Авторы выражают благодарность Т.Е. Панову и Н. Рэю за стимулирующие обсуждения, привлекшие нас к рассмотрению этой проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] V. M. Buchstaber, T. E. Panov // Univ. Lecture Ser. 2002. V. 24. [**2**] Ch. Schaper // Math. Ann. 1997. V. 309. №3. P. 463–473. [**3**] T. Porter // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 655–663. [**4**] M. Mather // Canad. J. Math. 1976. V. 28. №2. P. 225–263.

University of Aberdeen, United Kingdom
E-mail: `jelena@maths.abdn.ac.uk`, `s.theriault@maths.abdn.ac.uk`

Принято редколлегией
27.07.2004