Р. А. Минлос, А. Хаитов, Предельная эквивалентность термодинамических ансамблей в случае одномерных классических систем, *Функц. анализ и его прил.*, 1972, том 6, выпуск 4, 93–94

Функциональный анализ и его приложения,
т. 6, вып. 4, 1972, 93—94

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ АНСАМБЛЕЙ В СЛУЧАЕ ОДНОМЕРНЫХ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р. А. Минлос, А. Хаитов

1. В статистической физике пользуются одним из трех ансамблей: микроканоническим, малым каноническим и большим каноническим. При этом предполагается, что в случае, когда система может находиться только в одной фазе, при определенном соответствии между параметрами, задающими тот или иной ансамбль, они все эквивалентны, т. е. приводят к одинаковому термодинамическому описанию системы. В предлагаемой заметке это предположение будет строго сформулировано для случая одномерных систем с достаточно быстро убывающим взаимодействием (такие системы при всех значениях термодинамических параметров могут находиться только в одной фазе (см. [4], [5], [6], [7])). Вопрос об эквивалентности ансамблей (в той постановке, которая рассматривается в этой заметке) изучался для различных случаев в работах [1]—[3]. Результаты настоящей работы являются обобщением результатов, полученных одним из авторов [9] для случая финитного взаимодействия.

2. Кратко напомним основные определения (отсылая за подробностями к книге [5]). Пусть $\Omega \subset R^1$ — отрезок вещественной оси; *состоянием* классической системы одинаковых частиц, заключенной в отрезке Ω, называется пара $a = (c, p_c(\cdot))$, где c — конечное подмножество отрезка Ω (*конфигурация*), $p_c(\cdot)$ — вещественная функция, определенная на элементах c (*импульс*). Через $N(a)$ будем обозначать число частиц в состоянии a (число точек в c), а через $H(a)$ — энергию в состоянии a:

$$H(a) = \frac{1}{2m} \sum_{x \in c} p_c^2(x) + \sum_{\substack{x \in c,\, y \in c \\ x \neq y}} U(|x - y|),$$

где $m > 0$ — масса частицы, $U(r)$ — потенциал взаимодействия, предполагаемые свойства которого будут указаны ниже. Через $\mathfrak{B}_\Omega$ обозначим пространство состояний нашей системы.

Большим каноническим ансамблем Гиббса $P_{\Omega,\beta,\mu}(\cdot)$ называется распределение вероятностей на $\mathfrak{B}_\Omega$, плотность которого (относительно лебеговской меры в $\mathfrak{B}_\Omega$) пропорциональна весу: $\exp\{-\beta[H(a) + \mu N(a)]\}$ ($\beta > 0$ и μ — вещественные параметры). Условное распределение, порождаемое этим ансамблем, при условии, что число частиц фиксировано: $N(a) = N$, называется *малым каноническим ансамблем Гиббса* и будет нами обозначаться через $P_{\Omega,N,\beta}(\cdot)$. Наконец, условное распределение вероятностей, порождаемое $P_{\Omega,N,\beta}(\cdot)$ на поверхности $H(a) = E$ (подробнее см. [7]), называется *микроканоническим ансамблем* (обозначение: $P_{\Omega,N,E}(\cdot)$). Обычно интересуются только асимптотическими свойствами ансамблей в так называемом термодинамическом предельном переходе: $\Omega \to \infty$ в случае большого канонического ансамбля; $\Omega \to \infty$, $N/|\Omega| \to \rho$ в случае малого канонического ансамбля (ρ — предельная плотность частиц, причем допустимы значения $0 < \rho \leqslant \rho_0 \leqslant \infty$); и, наконец, $\Omega \to \infty$, $N/|\Omega| \to \rho$, $E/|\Omega| \to h$ в случае микроканонического ансамбля (h — предельная плотность энергии; при этом допустимые значения (ρ, h) могут пробегать область: $h_0(\rho) < h < \infty$, $0 < \rho \leqslant \rho_0$). Для описания предельных свойств ансамблей вводится предельная система. Пространством ее состояний (обозначим его через $\mathfrak{B}_\infty$) служит множество пар $a = (c, p_c(\cdot))$, где c — локально конечное подмножество R^1, а $p_c(\cdot)$ — вещественная функция, определенная на элементах c; распределения вероятностей на пространстве $\mathfrak{B}_\infty$, называемые *предельными распределениями Гиббса* и порождаемые соответствующими ансамблями, вводятся как пределы (в смысле сходимости вероятностей цилиндрических множеств; подробнее см. [2], [4] или [7]) распределений $P_{\Omega,\beta,\mu}(\cdot)$, $P_{\Omega,N,\beta}(\cdot)$, $P_{\Omega,N,E}(\cdot)$ в термодинамическом предельном переходе. Эти предельные распределения (если они существуют) будем обозначать через $P^\infty_{\mu,\beta}$, $P^\infty_{\rho,\beta}$ и $P^\infty_{\rho,h}$. Существование распределения $P^\infty_{\mu,\beta}$ для одномерных систем при сформулированных ниже допущениях относительно потенциала и всех значениях параметров (μ, β) вытекает из результатов работ [4], [5], [6].

3. Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

Теорема. *Если потенциал $U(r)$ обладает сформулированными ниже свойствами, то*

1) *распределения* $P^{\infty}_{\rho,\beta}(\cdot)$ *и* $P^{\infty}_{\rho,h}(\cdot)$ *существуют при всех допустимых значениях параметров* (ρ, β) *и* (ρ, h) *); 2) *существует взаимно однозначное отображение* $(\rho, h) \leftrightarrow \leftrightarrow (\mu, \beta)$ *области допустимых значений параметров* (ρ, h) *на полуплоскость* $\beta > 0$, $-\infty < \mu < \infty$ *такое, что распределения* $P^{\infty}_{\mu,\beta}(\cdot)$ *и* $P^{\infty}_{\rho,h}(\cdot)$ *совпадают при соответствующих друг другу парах* (ρ, h) *и* (μ, β); 3) *аналогично предыдущему, при каждом* $\beta > 0$ *существует взаимно однозначное отображение* $\rho \leftrightarrow \mu$ *допустимых значений* ρ *на ось* $-\infty < \mu < \infty$ *такое, что распределения* $P^{\infty}_{\mu,\beta}(\cdot)$ *и* $P^{\infty}_{\rho,\beta}(\cdot)$ *совпадают при соответствующих друг другу значениях* ρ *и* μ.

Эта теорема и служит наиболее полным выражением предельной эквивалентности ансамблей.

Доказательство сформулированной теоремы существенно опирается на попутно доказанную нами локальную предельную теорему для совместного распределения числа частиц и энергии в большом каноническом ансамбле при $\Omega \to \infty$, что само по себе представляет большой интерес, поскольку этим строго подтверждается принимаемое физиками допущение, что одновременные флуктуации числа частиц и энергии (как и многих других величин) порядка $\sim |\Omega|^{1/2}$ имеют гауссово распределение. В доказательстве этой локальной предельной теоремы мы использовали недавний важный результат Добрушина **) о вещественной аналитичности свободной энергии Гиббса для одномерных систем и используемого нами класса потенциалов.

Подробное изложение приведенных здесь результатов будет опубликовано нами позднее (случай финитных потенциалов подробно изложен в работе одного из авторов [9].

4. Рассматриваемые нами потенциалы подчинены следующим требованиям: 1) $U(r) = +\infty$ при $r < \delta_0$ (твердая сердцевина), 2) существуют такие R_0, c_0 и $\gamma > 0$, что $|U(r)| < c_0/r^{\gamma+3}$ при $r > R_0$.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 17 января 1972 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Петрина О. Я., Хацет Б. И., Теор. и матем. физика **1**, №2 (1969), 254—274. **2.** Халфина А. М., Матем. сб. 80 (1969); 3—51. **3.** Минлос Р. А. и Халфина А. М., Изв. АН СССР, серия матем. **34** (1970), 1173—1191. **4.** Добрушин Р. Л., Функц. анализ **2**, вып. 4 (1968), 44—57. **5.** Рюель Д., Статистическая механика, М., «Мир», 1971. **6.** Gallavotti G., Miracle-Sole S., J. Math. Phys. **1** (1970), 147—155. **7.** Сухов Ю. М., УМН **XXV**, вып. 2 (1970), 277—278. **8.** Минлос Р. А., Функц. анализ **1**, вып. 3 (1967), 40—54. **9.** Хаитов А., Труды Моск. матем. об-ва **28** (1973).

*) Относительно области допустимых значений параметров ρ и h см. [5].
**) Пока не опубликован.