V. A. Buslov, On characteristic polynomial coefficients of the Laplace matrix of a weighted digraph and all minors theorem, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2014, Volume 427, 5–21

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 427, 2014 г.

В. А. Буслов

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАПЛАСИАНА ВЗВЕШЕННОГО ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА И ТЕОРЕМЕ О ВСЕХ МИНОРАХ

§1. Введение

Классическая матричная теорема о равенстве числа остовных деревьев неориентированного графа без петель алгебраическим дополнениям матрицы Кирхгофа (матрицы проводимостей)[1] [1], имеет многочисленные приложения для специальных видов графов и задач перечисления деревьев (например [2–4]). Взвешенная матрица проводимостей постоянно возникает в стохастической динамике и цепях Маркова как генератор (или его сужение на низкочастотный спектр) соответствующего случайного процесса [5–7]. Описание в терминах древовидной структуры позволяет при вычислении миноров избавиться от знакопеременности в сумме произведений матричных элементов, что само по себе является сильным качественным свойством.

Коэффициенты при степенях λ характеристического многочлена матрицы Лапласа для невзвешенных неориентированных графов получены в [8]. В силу невзвешенности графа они являются некоторыми целыми числами, вычисление которых сводится к комбинаторной задаче о перечислении так называемых базисных фигур и их объединений, которые являются неориентированными лесами. Задача их подсчёта по сути эквивалентна числу способов, которым неориентированные леса можно превратить в ориентированные (просто назначив корни деревьев). Если с самого начала рассматривать вопрос с позиций орграфов, то вся конструкция, связанная с базисными фигурами, становится излишней, перегруженность исчезает, а комбинаторная задача перечисления принимает естественный вид. При этом результаты, касающиеся неориентированных графов, сразу следуют из

Ключевые слова: взвешенный орграф, матрица Лапласа, матрица инцидентности, остовный лес.

[1]Для неориентированных графов матрицы Кирхгофа и Лапласа совпадают. Различие, возникающее в ситуации орграфов, описано ниже.

соответствующих им ориентированных вариантов, поскольку всякий неориентированный граф можно рассматривать как орграф, заменив все рёбра на пары встречных дуг. Общая же формула для главных миноров в ситуации взвешенных орграфов получена даже раньше в [9] по методу индукции, с использованием, правда, в несколько другой терминологии, понятий баз матроида и независимых множеств, являющихся в данном случае ориентированными лесами. К сожалению, статья выпущена только на чешском языке. И даже в [3], где собраны практически все известные к тому времени результаты о спектрах графов, соответствующая формула не приведена, хотя и содержится ссылка на её существование. Широкое исследование лапласовских матриц произведено в [10]. Общее же выражение для всех миноров получено Чайкеном [11]. В данной работе предлагается другое доказательство, связаннное с прямым вычислением миноров матриц инцидентности и выявления их связи с лесами.

§2. Основные определения и обозначения

Термины, касающиеся неориентированных и ориентированных графов, будем давать по возможности параллельно. Пусть $\mathcal{V}$ - некоторое конечное непустое множество, элементы которого будем именовать вершинами, $\mathcal{E}$ – некоторое подмножество множества его двухэлементных подмножеств, называемых ребрами. Пара $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ называется графом (неориентированным). Множества его вершин ребер графа G будем обозначать $\mathcal{V}G$ и $\mathcal{E}G$. Если $\mathcal{A}$ – некоторое подмножество упорядоченных пар вершин (дуги графа), то пара $G = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ называется ориентированным графом (орграфом), более полно $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{A}G)$. Число $N = |\mathcal{V}G|$ называется порядком графа. Если при этом число рёбер графа равно M, то граф G называют (N, M)-графом. Аналогично, (N, M)-орграф – это ориентированный N-вершинный граф, имеющий M дуг.

Направленный граф – это ориентированный граф без встречных дуг.

Ребро (дуга) *инцидентно* своим концевым вершинам.

Любой неориентированный граф может рассматриваться как ориентированный, если каждое его ребро (i, j) превратить в пару дуг (i, j) и (j, i). Тогда все результаты, касающиеся ографов, автоматически переносятся на неориентированные графы. Иногда удобно граф G превратить в огргаф превращением ребра (i, j) ровно в одну из дуг

(i,j) или (j,i). Такая операция называется *ориентацией* графа G и превращает его в направленный граф.

Если каждой дуге (i,j) орграфа поставлено в соответсвие некоторое число g_{ij}, то такой граф называется орграфом со взвешенными смежностями. *Продуктивностью* π_G взвешенного орграфа $G = (\mathcal{V}G, \mathcal{A}G)$ назовём произведение весов всех его дуг

$$\pi_G = \prod_{(i,j)\in\mathcal{A}G} g_{ij}\ .$$

Граф H называется *подграфом* графа G, если $\mathcal{V}H \subseteq \mathcal{V}G$, $\mathcal{E}H \subseteq \mathcal{E}G$. Подграф H называется *остовным подграфом* (или *фактором*), если $\mathcal{V}H = \mathcal{V}G$. Если множество рёбер $\mathcal{E}H$ подграфа H графа G состоит из всех тех рёбер множества $\mathcal{E}G$, оба конца которых принадлежат множеству $\mathcal{U} = \mathcal{V}H$, то H называется *порожденным подграфом* или, более полно, *подграфом, порожденным множеством* $\mathcal{U}$. В этом случае будем использовать обозначение $G|_{\mathcal{U}} = H$. Для орграфов определения остовного и порождённого подграфа даются аналогично.

Путь (незамкнутый) длины $M-1$ – это орграф с множеством вершин $\{i_1, i_2, \cdots, M\}$, дугами которого являются (i_j, i_{j+1}), $j = 1, 2, \cdots, M-1$. Циклический путь называется *контуром. Полупуть длины* $M-1$ – это орграф с множеством вершин $\{i_1, i_2, \cdots, i_M\}$, дугами которого являются либо (i_j, i_{j+1}), либо (i_{j+1}, i_j) , $j = 1, 2, \cdots, M-1$. Если в орграфе существует путь из i в j, то говорят, что вершина j *достижима* из вершины i.

Орграф называется *сильным (сильно связным)*, если любые его две вершины взаимно достижимы. Орграф называется *слабым (слабо связным)*, если любые его две вершины соединены полупутем. Любой максимальный относительно включения слабый подграф графа G называется его *связной компонентой* (или просто *компонентой*).

Для неориентированных графов *лес* – граф без циклов, *дерево* – связный граф без циклов. В ситуации ографов эти понятия видоизменяются и леса и деревья существуют двух типов: заходящие и исходящие (когда корень достижим из любой вершины дерева, и, соответственно, наоборот, когда любая вершина дерева достижима из корня). В дальнейшем будут использоваться только заходящие варианты. Орграф, не содержащий контуров, в котором из каждой вершины исходит не более одной дуги, называется *(заходящим) лесом*, вершины без исходящих дуг – *корни* деревьев (связных компонент).

Для краткости иногда будем использовать термин “граф” в более широком смысле, обозначая им и орграфы, в том числе со взвешенными смежностями, если это не приводит к недоразумениям.

§3. Матрицы, связанные с графом

Последующее рассмотрение касается (ор)графов без петель (рёбра или дуги (i,i) отсутствуют). Пусть порядок взвешенного графа N, а веса дуг (ребёр) g_{ij}. Матрица смежности $\mathbf{G}$ – это $N\times N$ матрица с элементами на пересечении i-ой строки и j-го столбца равными g_{ij}, если в графе существует дуга (i,j), и равными нулю в противном случае. Тем самым устанавливается взаимнооднозначное соответствие между квадратными матрицами с нулевой диагональю и помеченными графами (вершины пронумерованы) без петель со взвешенными смежностями. Поэтому нам будет удобно обозначать как сам граф G, так и его матрицу смежности $\mathbf{G}$ одной и той же буквой. Невзвешенному (ор)графу соответствуют веса его рёбер (дуг) все равные единице. Матрица смежности неориентированного графа симметрична.

Для орграфов используются две матрицы проводимостей: Лапласа $\mathbf{L}$ и Кирхгофа $\mathbf{C}$ [12, 13]. Именно:

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} -g_{ij}, & i \neq j, \\ \sum\limits_{k\neq i} g_{ik}, & i = j, \end{cases} \qquad \mathbf{C}_{ij} = \begin{cases} -g_{ji}, & i \neq j, \\ \sum\limits_{k\neq i} g_{ki}, & i = j. \end{cases}$$

Поскольку отличие матрицы Кирхгофа от лапласиана состоит по существу в замене направлений дуг на обратные, то результаты для матрицы Кирхгофа получаются из утверждений для лапласиана соответствующей сменой ориентации и, в частности, заменой заходящих лесов на исходящие.

Матрица инцидентности $\mathbf{I}$ для орграфов без петель определяется следующим образом.

Пусть G является (N,M)-графом, $\mathcal{V}G = \{1,2,\dots,N\}$ – множество его вершин, $\mathcal{A}G = \{a_1,a_2,\dots,a_M\}$ – множество его дуг. Матрица инцидентности $\mathbf{I}$ состоит из M вектор-столбцов длины N, каждый их которых отвечает одной дуге. Причем, если l-ая дуга $a_l = (i,j)$ имеет началом вершину i, а концом вершину j, то в отвечающем ей l-ом вектор-столбце компоненты i и j равны 1 и -1 соответственно, все остальные компоненты вектора равны нулю.

$$\mathbf{I}_{kl} = \begin{cases} 1, & k = i \text{ (исход дуги } a_l), \\ -1, & k = j \text{ (заход дуги } a_l), \\ 0, & k \neq i, j. \end{cases}$$

В частности, сумма элементов любого столбца матрицы инцидентности равна нулю.

§4. Разложение лапласиана в произведение матриц инцидентности

Важную связь между лапласианом $\mathbf{L}$ (матрицей проводимостей $\mathbf{C}$) неориентированного графа G без петель и матрицей инцидентности $\mathbf{I}$ какой-либо его ориентации с той же нумерацией вершин устанавливает, проверяемая непосредственно, известная формула [3, 14]

$$\mathbf{I}\mathbf{I}^T = \mathbf{L}\ , \tag{1}$$

где $\mathbf{I}^T$ – транспонированная матрица инцидентности.

Можно усилить это соотношение, распространив его на (ор)графы без петель со взвешенными смежностями. Для этого придётся слегка модифицировать матрицу инцидентности и сам граф. Именно, в ориентированном графе без петель G из всех пар встречных дуг удалим по одной дуге (любой), превратив его в направленный граф. Дуги, не имеющие встречных, остаются в графе. Каждой из оставшихся дуг припишем упорядоченную пару чисел: вес её самой и *реверс* – вес удалённой обратной дуги. Если обратная дуга отстутстовала в исходном графе, то этот реверс полагаем равным нулю. Полученный конструкт без встречных дуг назовем *фиксацией* (направления) графа G. Матрица инцидентности (невзвешенная) для фиксации такая же, как и у любого орграфа, рассматриваемого без учёта весов. Теперь для этой фиксации введём взвешенную матрицу инцидентности $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$, организованную подобным образом, что и обычная, только если дуга $a_l = (i, j)$ содержится в фиксации и имеет вес g_{ij} в исходном графе, то элементы отвечающего ей l-го вектор-столбца с номерами i и j равны весу g_{ij} и минус реверсу $(-g_{ji})$ соответственно. Остальные компоненты столбца нулевые:

$$\mathbf{I^w}_{kl} = \begin{cases} g_{ij}, & k = i \text{ (исход дуги } a_l),\\ -g_{ji}, & k = j \text{ (заход дуги } a_l),\\ 0, & k \neq i, j. \end{cases}$$

Заметим, что взвешенная матрица инциденций уже не обладает свойством нулевой суммы по столбцу. Более того, если граф – направленный, то операция фиксации его не меняет, а взвешенная матрица инцидентности имеет в каждом столбце, отвечающем дуге $a_l = (i, j)$, только один ненулевой элемент, а именно, в i-ой строке (строке исхода) стоит число g_{ij}. Данное определение взвешенных инциденций позволяет расширить формулу (1).

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– взвешенная матрица Лапласа орграфа* G *без петель,* $\mathbf{I}$ *– матрица инцидентности какой-либо его фиксации, а* $\mathbf{I^w}$ *– взвешенная матрица инцидентности той же фиксации, тогда*

$$\mathbf{I^w I}^T = \mathbf{L}\ , \tag{2}$$

где $\mathbf{I}^T$ *– транспонированная матрица инцидентности.*

Доказательство. Пусть G' – произвольная фиксация оргрфа G. Вес g_{ij} всякой дуги (i, j), исходящей из i-ой вершины исходного графа, содержится во взвешенной матрице инцидентности $\mathbf{I^w}$ выбранной фиксации ровно один раз и находится в i-ой строке, причём со знаком $+$, если $(i, j) \in \mathcal{A}G'$, и с отрицательным знаком, если в фиксацию попала обратная дуга (j, i). При этом, в невзвешенной матрице инцидентности элемент i-ой строки, отвечающий вошедшей в фиксацию дуге, равен ± 1 с тем же знаком, с которым во взвешенную матрицу инцидентности входит g_{ij}. Поэтому для диагональных элементов имеем

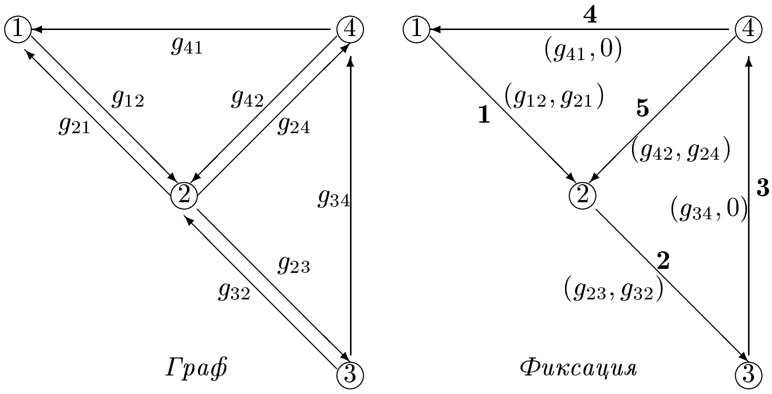
$$(\mathbf{I^w I}^T)_{ii} = \sum_{j:(i,j)\in\mathcal{A}G'} g_{ij}\cdot 1 + \sum_{j:(j,i)\in\mathcal{A}G'} (-g_{ij})(-1) = \sum_{j:(i,j)\in\mathcal{A}G} g_{ij} = \mathbf{L}_{ii}\ .$$

Для получения внедиагонального элемента $(\mathbf{I^w I}^T)_{ij}$ необходимо взять скалярное произведение i-ой строки $\mathbf{I^w}$ и j-ой строки $\mathbf{I}$. Согласно определению матриц инцидентности, одновременно ненулевые элементы в i-ой строке $\mathbf{I^w}$ и j-ой строке $\mathbf{I}$ могут оказаться лишь в двух случаях. Именно, либо, когда дуга $(i, j) \in \mathcal{A}G'$, и тогда эти ненулевые элементы равны g_{ij} и (-1) соответственно, либо, когда фиксации принадлежит обратная дуга (j, i). В этом случае они равны $-g_{ij}$ и единице соответственно. Заметим, что только одна из встречных дуг входит в фиксацию. При этом, вес дуги, не вошедшей в фиксацию, всё равно учтён во взвешенной матрице инцидентности. Поэтому, если в исходном орграфе G есть дуга (i,j), то $(\mathbf{I}^{\mathbf{w}}\mathbf{I}^T)_{ij} = -g_{ij}$. Если $(i,j) \notin \mathcal{A}G$, то $(\mathbf{I}^{\mathbf{w}}\mathbf{I}^T)_{ij} = 0$. □

Пример 1. Пусть G – орграф без петель с взвешенной матрицей смежности

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{23} & g_{24} \\ 0 & g_{32} & 0 & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольную фиксацию, то есть из всех парных дуг удалим по одной из них, записав её вес как реверс к соответствующей оставшейся дуге.



Скажем, удалим дуги $(2,1)$, $(3,2)$ и $(2,4)$. Перенумеруем все дуги фиксации в произвольном порядке, например, так: $a_1 = (1,2)$, $a_2 = (2,3)$, $a_3 = (3,4)$, $a_4 = (4,1)$ и $a_5 = (4,2)$. Матрица инцидентности (невзвешенная) этой фиксации с весами дуг никак не связана и определяется стандартно:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Взвешенная матрица инцидентности равна

$$\mathbf{I^w} = \begin{pmatrix} g_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_{21} & g_{23} & 0 & 0 & -g_{24} \\ 0 & -g_{32} & g_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{41} & g_{42} \end{pmatrix}.$$

Как легко видеть,

$$\mathbf{I^w}\mathbf{I}^T = \begin{pmatrix} g_{12} & -g_{12} & 0 & 0 \\ -g_{21} & g_{12}+g_{23}+g_{24} & -g_{23} & -g_{24} \\ 0 & -g_{32} & g_{32}+g_{34} & -g_{34} \\ -g_{41} & -g_{42} & 0 & g_{41}+g_{42} \end{pmatrix},$$

что совпадает с матрицей лапласиана $\mathbf{L}$ рассматриваемого графа.

§5. Связь матриц инцидентности со структурой графа

Дальнейшее рассмотрение основывается на известной лемме о связи миноров матрицы инцидентности и фактом, является ли граф деревом. Поскольку нам потребуются усиления этой леммы, а структура соответствующих доказательств остаётся по существу той же, приведем его полностью близко к [14].

Лемма 1. *Пусть H – $(m+1, m)$-граф, $\mathbf{I}$ – матрица инцидентности какой-либо его ориентации, M – произвольный минор порядка m матрицы $\mathbf{I}$. Тогда:*

1) *если H – дерево, то $M = \pm 1$;*
2) *если H не является деревом, то $M = 0$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что можно произвольно менять нумерацию вершин и рёбер графа H, поскольку это отражается лишь на знаке минора. Пусть s – вершина, соответствующая строке матрицы M, не вошедшей в минор.

1) Пусть H – дерево. Занумеруем вершины и рёбра графа H следующим образом. Любой из концевых вершин v, не являющейся вершиной s, и инцидентному ей ребру (которое единственно, поскольку вершина – концевая) присвоим номер 1. Теперь следует удалить из графа эту первую вершину и инцидентное ей ребро, то есть перейти к подграфу $H|_{\mathcal{V}H\setminus v}$, порожденному исходным множеством вершин $\mathcal{V}H$ без вершины v. Этот порождённый подграф также является деревом. Если его порядок больше 1 (в противном случае доказательство закончено), то вновь одной из концевых вершин u, не совпадающей с s, и инцидентному ей ребру присвоим номер 2 и удалим из полученного подграфа. Иными словами, переходим к порождённому подграфу

$H|_{\mathcal{V}H\setminus\{v,u\}}$, который вновь является деревом, и так далее, пока последней вершиной с номером $m+1$ не окажется сама вершина s. При этом, матрица инцидентности примет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \pm1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \pm1 \\ * & * & \dots & \mp1 \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее символом $*$ обозначаем величины, конкретные значения которых не существенны для рассмотрения. Минор, полученный после удаления последней строки перенумерованной матрицы, равен ±1.

2) Если граф H не является деревом, то у него не менее двух связных компонент и хотя бы одна из них, скажем, $\mathcal{R}$ не содержит вершины s. Поэтому после вычёркивания строки, соответствующей этой вершине, в оставшейся матрице сумма строк по вершинам из множества $\mathcal{R}$ по-прежнему равна нулевой строке. Тем самым, $M = 0$.

□

Лемма 2. *Пусть H – дерево, $\mathbf{I}$ – матрица инцидентности какой-либо его ориентации. M_i – максимальный минор, получаемый вычеркиванием i-ой строки, тогда*

$$M_i = (-1)^{i+j} M_j. \tag{3}$$

Доказательство. Добавим к $\mathbf{I}$ произвольный столбец с нулевой суммой элементов. У получившейся квадратной матрицы сумма элементов каждого столбца равна нулю. Поэтому алгебраические дополнения элементов любого столбца равны между собой. В частности, равны между собой и алгебраические дополнения добавленного столбца, а они совпадают с чередующимся знаком с минорами M_i. □

Лемма 3. *Пусть H – $(m+k,m)$-граф, $\mathbf{I}$ – матрица инцидентности какой-либо его ориентации, M – произвольный минор порядка m матрицы $\mathbf{I}$, получаемый вычеркиванием строк с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Тогда:*

1) *если H – лес, и каждая его компонента содежит ровно по одной вершине из множества $\mathcal{J}$, то $M = \pm1$;*

2) *во всех остальных случаях $M = 0$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия пункта 1). Аналогично лемме 1 устроим перенумерацию вершин отдельно по каждой компоненте так, чтобы каждая из вершин j_m получила последний номер в своём дереве. Вычеркивая из матрицы инцидентности строки с вершинами из $\mathcal{J}$, получаем блочно-диагональную матрицу, каждый блок которой – нижне-треугольный с числами ± 1, стоящими на диагонали. Тем самым, соответствующий минор $M = \pm 1$.

2) Если условия пункта 1) не выполнены, но при этом H по-прежнему остаётся лесом, состоящим из k деревьев, то существует хотя бы одно его дерево T, не содержащее вершин множества $\mathcal{J}$. Тогда выполняя перенумерацию вершин и рёбер леса H отдельно по каждому его дереву, получаем клеточно диагональную матрицу. После вычеркивания строк с номерами из $\mathcal{J}$, остаётся матрица, в которой сумма строк, отвечающих вершинам дерева T, равна нулевой строке. Её определитель равен нулю.

В случае, когда H лесом не является, хотя бы одна его связная компонента $\mathcal{R}$ не имеет пересечения с множеством $\mathcal{J}$, а значит при удалении строк из $\mathcal{J}$, сумма строк, отвечающих вершинам из $\mathcal{R}$, остаётся равной нулю, и соответствующий минор тоже нулевой. $\square$

Другое обобщение касается взвешенных орграфов и, соответственно, специально подобранной взвешенной матрицы инцидентности $\mathbf{I^w}$, как определено выше.

Лемма 4. *Пусть H – $(m+1, m)$ однокомпонентный орграф с весами дуг равными h_{ij}. M – произвольный минор порядка m его взвешенной матрицы инцидентности $\mathbf{I^w}$, получаемый вычеркиванием строки, соответствующей вершине s. Тогда*

1) *если H – (заходящее) дерево с корнем в вершине s, то $M = \pm\pi_H$;*

2) *$M = 0$ в противном случае.*

Доказательство. Хотя при снятии ориентации граф H, поскольку он связен, и является неориентированным деревом, но исходно ориентированным деревом может и не являться. Однако, в любом случае его взвешенная матрица инцидентности после перенумерации, описанной в лемме 1, имеет вид

$$\mathbf{I}^{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \pm h_{1*} & 0 & \dots & 0 \\ * & \pm h_{2*} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \pm h_{m,m+1} \\ * & * & \dots & \mp h_{m+1,m} \end{pmatrix}.$$

После вычеркивания последней строки, соответствующий минор оказывается равен $\pm \prod\limits_{l=1}^{m} h_{l,*}$, что отвечает заходящему дереву с корнем в вершине $m+1$ (в которую после перенумерации перешла вершина s), поскольку из всех вершин кроме неё дуги исходят. Если граф H после перенумерации совпадает с этим деревом (т.е. до перенумерации являлся деревом с корнем в вершине s), то этот минор с точностью до знака совпадает с π_H. В любом другом случае хотя бы одно число $h_{l,*}$ равно нулю, поскольку такой дуги просто нет в исходном графе (есть обратная дуга), а во взвешенной матрице инцидентности соответствующий вводимый вес равен нулю. □

Замечание 1. По определению матрицы взвешенных инциденций ненулевые элементы h_{ij} входят в неё с тем же знаком, с которым в невзвешенной матрице инцидентности стоят на соответствующих местах числа ± 1. При одинаковом процессе перенумерации вершин в леммах 4 и 1 на главную диагональ веса дуг в $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$ попадают со знаком, совпадающим со знаком соответствующих элементов невзвешенных инциденций. Тем самым, если H – заходящее дерево с корнем в вершине, не вошедшей в минор взвешенных инциденций $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$, то в этом миноре множитель при произведении π_H совпадает с минором невзвешенной матрицы инцидентности $\mathbf{I}$, получаемым вычёркиванием той же строки.

Лемма 5. *Пусть H – взвешенный $(m+k, m)$-орграф, имеющий k связных компонент, и пусть каждой связной компоненте принадлежит ровно одна из вершин множества $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. M – минор порядка m взвешенной матрицы инцидентности $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$, получаемый вычеркиванием строк с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{J}$. Тогда:*

1) *если H – заходящий лес, и корень каждого его дерева принадлежит множеству $\mathcal{J}$, то $M = \pm\pi_H$;*

2) *$M = 0$ в противном случае.*

Доказательство. Заметим, что при снятии ориентации граф H превращается в лес, состоящий из k деревьев. Перенумеруем вершины и дуги таким образом, чтобы матрица инцидентности приняла блочно прямоугольный вид, собрав вместе вершины и дуги отвечающие каждой отдельной компоненте. Теперь в каждом блоке при вычёркивании строки, соответствующей той единственной вершине из $\mathcal{J}$, которая принадлежит данной связной компоненте, применяем лемму 4. Если исходный граф был заходящим лесом с корнями из $\mathcal{J}$, то определитель оставшейся блочно-диагональной матрицы с точностью до знака равен произведению по всем деревьям весов всех дуг каждого отдельного дерева, то есть $\pm\pi_H$. В противном случае, хотя бы один из блоков имеет нулевой определитель. □

Замечание 2. Аналогично замечанию 1 к лемме 4, заключаем, что если H – заходящий k-компонентный лес с корнями $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \cdots j_k\}$, то минор взвешенной матрицы инцидентности $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$, получаемый вычеркиванием строк с номерами из $\mathcal{J}$, совпадает с произведением π_H со множителем, равным минору матрицы $\mathbf{I}$ невзвешенных инциденций, возникающему при удалении тех же строк.

§6. Характеристический многочлен и остовные леса

Для получения коэффициентов характеристического многочлена потребуется еще один известный факт из матричной алгебры – формула Бине-Коши. Именно, пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – $n \times m$ и $m \times n$ матрицы, соответственно, $n \leqslant m$. Минор порядка n матрицы $\mathbf{B}$ назовём соответствующим минору того же порядка матрицы $\mathbf{A}$, если номера строк первого совпадают с номерами столбцов другого. Формула Бине-Коши состоит в том, что определитель матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ равен сумме произведений всех миноров порядка n матрицы $\mathbf{A}$ на соответствующие миноры $\mathbf{B}$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{L}) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^k c_k \tag{4}$$

– характеристический многочлен взвешенной матрицы Лапласа N-вершинного орграфа G без петель с весами g_{ij}. Тогда

$$c_k = (-1)^{N-k}\Big(\sum_{F\in\mathcal{F}^k(G)} \pi_F\Big), \quad \pi_F = \prod_{(i,j)\in\mathcal{A}F} g_{ij}, \tag{5}$$

где $\mathcal{F}^k(G)$ – множество всех остовных (заходящих) лесов графа G с точно k компонентами.

Замечание 3. Суммирование в формуле (4) можно вести от единицы, поскольку свободный член с точностью до знака представляет собой определитель лапласиана, который равен нулю в силу того, что сумма элементов каждой строки нулевая. Согласно же формуле (5) этот коэффициент есть сумма по лесам, не имеющим корней (деревьев). Таких лесов нет и сумма с нулевым количеством слагаемых, естественно, равна нулю. Коэффициент же при старшей степени равен единице, поскольку там ведётся сумма по лесам, состоящим из N деревьев. Такой остовной лес есть – это пустой N-вершинный граф. Его продуктивность, как произведение с нулевым количеством сомножителей, полагается равной 1.

Доказательство. Обозначим главный минор матрицы $\mathbf{L}$, получаемый вычеркиванием строк и столбцов с номерами, принадлежащими множеству вершин $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$, через $M_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$. Поскольку коэффициент при k-ой степени λ с точностью до множителя $(-1)^{N-k}$ есть сумма всех главных миноров порядка $N-k$, то он равен сумме миноров $M_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ по всем k-элементным подмножествам $\mathcal{J}$ множества вершин $\mathcal{V}G$ графа G. Согласно формуле (2) теоремы 1, имеем $\mathbf{L} = \mathbf{I}^{\mathbf{w}}\mathbf{I}^T$. Значит, по формуле Бине–Коши каждый такой минор $M_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ равен сумме произведений миноров матрицы $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$, получаемых вычеркиванием строк из множества $\mathcal{J}$, на соответствующие миноры $\mathbf{I}^T$. На минор же матрицы $\mathbf{I}$ (транспонирование минора не меняет) можно смотреть как на такой же минор своей $N \times (N - |\mathcal{J}|)$ подматрицы, состоящей из $N - |\mathcal{J}|$ столбцов. Эта подматрица представляет собой матрицу инцидентности некоторого остовного подграфа F исходного графа, имеющего $N-|\mathcal{J}|$ дуг. Согласно лемме 3 этот минор отличен от нуля (и равен ± 1) тогда и только тогда, когда выбранный подграф F при снятии ориентации является k-компонентным лесом и все вершины множества $\mathcal{J}$ принадлежат разным его деревьям. Миноры же матрицы $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$, которым соответствуют указанные ненулевые миноры матрицы $\mathbf{I}^T$, по лемме 5 отличны от нуля только если выбранный подграф F является заходящим лесом и корнями его деревьев являются вершины $j_1, j_2, \cdots, j_k$. При этом, любой такой минор равен $\pm\pi_F$ и знак при произведении весов дуг по замечанию 2 к лемме 5 совпадает со знаком соответствующего минора матрицы $\mathbf{I}$. Суммируя все соответствующие миноры, отвечающие различному выбору $N - |\mathcal{J}|$ дуг, получаем, что главный минор $M_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ лапласиана, определяемый вычеркиванием строк и столбцов с номерами $j_1, j_2, \cdots, j_k$, равен

$$M_{\mathcal{J}\mathcal{J}} = \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathcal{J}}} \pi_F \ . \tag{6}$$

Здесь через $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ обозначено множество k-компонентных остовных заходящих лесов исходного графа с множеством корней

$$\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}.$$

Суммирование по всем главным минорам $M_{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ эквивалентно перебору k-элементных подмножеств $\mathcal{J}$ множества всех вершин $\mathcal{V}G$ и исчерпывает множество k-компонентных остовных заходящих лесов орграфа G, что и доказывает утверждение теоремы. □

§7. Формула для всех миноров

Те же рассуждения, что и при доказательстве последней теоремы, позволяют получить выражение для всех миноров матрицы Лапласа. В частности, пусть M_{ji} – максимальный минор, получаемый вычеркиванием j-й строки и i-го столбца. Заметим, что поскольку сумма элементов любой строки лапласиана равна нулю, то все алгебраические дополнения элементов любой j-ой строки строки равны между собой и совпадают с главным минором M_{jj}, величина которого определяется формулой (6). Поэтому

$$M_{ji} = (-1)^{i+j} \sum_{T \in \mathcal{F}_{\{j\}}} \pi_T \ , \tag{7}$$

где $\mathcal{F}_{\{j\}}$ – множество остовных заходящих деревьев с корнем в вершине j.

Этот же результат можно получить и воспользовавшись представлением $\mathbf{L} = \mathbf{I}^{\mathbf{w}}\mathbf{I}^T$. Для вычисления M_{ji} нужно удалить во взвешенной матрице инцидентности $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$ j-ю строку и i-ю в невзвешенной $\mathbf{I}$ и сложить произведение всех соответствующих миноров. Далее поступаем аналогично теореме 2. Именно, каждый минор невзвешенной матрицы инцидентности $\mathbf{I}$, входящий в формулу Бине-Коши, можно рассматривать как минор своей $N \times (N-1)$ подматрицы с теми же номерами столбцов. Эта подматрица является матрицей инцидентности некоторого остовного подграфа T и в силу леммы 1 её минор максимального порядка отличен от нуля (и равен ± 1) только, если выбранный подграф при снятии ориентации является деревом. Соответствующий минор взвешенной матрицы инцидентности $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$ по лемме 4 отличен от нуля (и равен $\pm\pi_T$) только, если выбранный подграф является заходящим деревом с корнем в вершине j. Однако, знаки у миноров $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$ и $\mathbf{I}$ уже, вообще говоря, не совпадают, поскольку первый из них отвечает вычёркиванию j-ой строки, а второй – вычеркиванию i-ой. Если в невзвешенной матрице инцидентности вычеркнуть j-ую строку, то получившийся минор совпадает по знаку с соответствующим минором матрицы $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$ в силу замечания 1 к лемме 4, а по формуле (3) леммы 2 он отличается множителем $(-1)^{i+j}$ от минора, возникающего при вычеркивании i-строки. Тем самым, само произведение требуемых миноров матриц $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$ и $\mathbf{I}$ входит в формулу Бине–Коши с общим знаком $(-1)^{i+j}$ и выполнено (7).

Аналогично получается обобщение (7) на миноры $M_{\mathcal{J}\mathcal{I}}$ матрицы Лапласа произвольного порядка k. Здесь $\mathcal{J} = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ - множество вычеркиваемых строк, а $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ - столбцов. Требуется дополнительно лишь предусмотреть возникающие перестановки индексов, которые образуются в силу того, что каждая вершина из $\mathcal{I}$, может оказаться в любом дереве леса, множеством корней которого является $\mathcal{J}$.

Для вычисления $M_{\mathcal{J}\mathcal{I}}$ необходимо в матрице $\mathbf{I}^{\mathbf{w}}$ вычеркнуть строки с номерами из $\mathcal{J}$, а в $\mathbf{I}$ – с номерами из $\mathcal{I}$ и воспользоваться формулой Бине-Коши. Ненулевыми минорами (равными ± 1) невзвешенной матрицы инцидентности, согласно лемме 3, являются, миноры, соответствующие выбору леса F (рассматриваемого без учёта ориентации) состоящего из k деревьев, причем каждому такому дереву принадлежит ровно одна вершина из $\mathcal{I}$. По лемме 5, миноры взвешенной матрицы инцидентности, которым соответствуют указанные ненулевые миноры невзвешенных инциденций, отличны от нуля (и равны $\pm\pi_F$) только, если и только если выбранный подграф F является заходящим лесом и корнями его деревьев являются вершины множества $\mathcal{J}$. При этом каждому дереву принадлежит ровно одна вершина из $\mathcal{I}$. Обозначим множество таких лесов $\mathcal{F}_{\mathcal{J}\mathcal{I}}$. Будем считать, что все индексы упорядочены: $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Если бы последовательно каждая вершина i_l содержалась в дереве с корнем в j_l, $l = 1, 2 \ldots k$, то совокупный знак при π_F от всех деревьев такого леса в силу (7) был бы равен $(-1)^{\sum\limits_{l=1}^{k}(i_l+j_l)}$. Для произвольного леса $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{J}\mathcal{I}}$ каждая вершина $i_l \in \mathcal{I}$ находится в дереве с корнем в некоторой вершине j_{m_l}. Тем самым, лес F указанного типа порождает перестановку индексов $p_F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_k \end{pmatrix}$, которую следует учесть. Пусть $\varepsilon(p_F)$ – четность этой перестановки. Суммируя вышеизложенное, получаем

$$M_{\mathcal{J}\mathcal{I}} = (-1)^{\sum\limits_{l=1}^{k}(i_l+j_l)} \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathcal{J}\mathcal{I}}} \varepsilon(p_F)\pi_F. \qquad (8)$$

Формула (8) носит название теоремы о всех минорах Чайкена [11] в формулировке Муна [15].

Литература

1. G. Kirchhoff, *Über Die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird.* — Ann. Phys. Chem. **72** (1847), 497–508.
2. H. N. Gabow, Z. Galil, T. Spencer, R. E.Tarjan, *Efficient algorithms for finding minimum spanning trees in undirected and directed graphs.* — Combinatorica **6**, No. 2 (1986), 109–122.
3. D. Cvetkovič, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Application.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschlaften, Berlin (1980).
4. В. А. Буслов, М. С. Богданов, В. А. Худобахшов, *О минимальном остовном дереве для орграфов с потенциальными весами.* — Вестник СПбГУ **10**, No. 3 (2008).
5. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.* М. (1979).
6. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Иерархия масштабов времени при малой диффузии.* — ТМФ **76**, No. 2 (1988), 219–230.
7. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Времена жизни и низшие собственные значения оператора малой диффузии.* — Мат. заметки **51**, No. 1 (1992), 20–31.
8. А. К. Кельманс, *О свойствах характеристического многочлена графа.* — In: Кибернетику - на службу коммунизму, Москва–Ленинград, Энергия (1967), 27–41.
9. M. Fiedler, J. Sedlaček, *O w-basich orientirovanych grafu.* — Časopis Pěst. Mat. **83** (1958), 214–225.

10. П. Ю. Чеботарёв, Р. П. Агаев, *Матричная теорема о лесах и лапласовские матрицы орграфов*. LAP LAMBERT Academic Publising GmbH Co.Kg (2011).
11. S. Chaiken, *A combinatorial proof of the all minors matrix tree theorem.* — SIAM J. Algebraic Discrete Methods **3**, No. 3 (1982), 319–329.
12. У. Татт, *Теория графов*. М., Мир (1988).
13. P. Chebotarev, R. Agaev, *Forest matrices around the Laplacian matrix.* — Linear Algebra and its Applications **356** (2002), 253–274.
14. В. А. Емеличев и др., *Лекции по теории графов*. М., Наука (1990).
15. J. W. Moon, *Some determinant expansions and the matrix-tree theorem.* — Discrete Mathematics **124** (1994), 163–171.

Buslov V. A. On characteristic polynomial coefficients of the Laplace matrix of a weighted digraph and all minors theorem.

The simple proof of the expression of characteristic polynomial coefficients of the Laplace matrix of a weighted digraph in the form of sum over all incoming forests is submitted. The proof is based on the Laplace matrix expression as a product of weighted incidence matrices and investigation of relations between its minors and forests, which is useful to calculate all Laplace matrix minors.

С.-Петербургский
государственный университет,
физический факультет,
Старый Петергоф, ул. Ульяновская, д. 3
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: abvabv@bk.ru, v.buslov@spbu.ru

Поступило 17 ноября 2014 г.