ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Январь 1962 Февраль № 1

О НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Е. Г. ДЬЯКОНОВ

(Москва)

Для приближенного нахождения решения краевой задачи для уравнения $\partial u/\partial t = Lu$ (L — эллиптический оператор с постоянными коэффициентами) существует большое число различных разностных схем. Основные требования к ним — их устойчивость и сходимость. Для явных разностных схем при этом приходится шаг по времени брать значительно меньше шага по пространственным переменным; для неявных схем такого ограничения шага по времени нет, но зато приходится решать системы линейных алгебраических уравнений.

Если число пространственных переменных $p \geqslant 2$, то и явные, и неявные схемы требуют большой вычислительной работы. Этим было вызвано появление серии работ (см. [1] — [5]), посвященных вопросам построения абсолютно устойчивых разностных схем, не требующих решения систем уравнений с большим числом неизвестных.

Настоящая работа посвящена анализу одной из таких разностных схем, так называемого метода дробных шагов, предложенного в работах [3]—[5]. При обосновании этого метода авторы [3]—[5] заменяли разностную схему метода дробных шагов другой разностной схемой, которую они считали эквивалентной первой, и для нее устанавливали сходимость как следствие устойчивости и аппроксимации. Однако при рассматривавшемся классе граничных условий эквивалентности этих схем не существует; более того, даже в случае уравнения теплопроводности может быть построен пример, когда метод дробных шагов не будет аппроксимировать дифференциальное уравнение ни при каких малых τ и h, если на границе области функция не является линейной. Если же брать нулевые краевые условия, то анализ метода дробных шагов в [3], [5] может быть применен, хотя и не для столь широкого класса уравнений с постоянными коэффициентами; результат же работы [4] не получается даже и при нулевых краевых условиях.

Все же некоторое расширение области применения метода дробных шагов возможно, и в настоящей работе показывается, что при нулевых граничных условиях несколько видоизмененный метод дробных шагов является абсолютно устойчивой и сходящейся разностной схемой, во-первых, для уравнений, где L — самосопряженный эллиптический отрицательно определенный оператор с разделяющимися переменными $2m$-

порядка, во-вторых, для уравнений с правой частью. При этом для $m > 1$ под сходимостью метода понимается сходимость к обобщенному решению.

Указывается также на возможность роста шагов по времени.

§ 1. Метод дробных шагов для уравнения теплопроводности

Рассмотрим сущность метода дробных шагов на примере уравнения теплопроводности [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

в цилиндре

$$Q_T = \overline{\Omega} \times [0 \leqslant t \leqslant T], \quad \overline{\Omega}\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

с начальным условием

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x, y) \tag{1.2}$$

и краевым условием

$$u\,|_S = \psi(x, y, t), \quad (x, y) \in S; \tag{1.3}$$

S — боковая поверхность Q_T.

Пусть $h = 1/N$ — шаг по x и y; τ — шаг по времени; $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$; $y_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N$; $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, T/\tau$; $\Omega_h\{(i, j) : i = 1, 2, \ldots, N-1;\ j = 1, 2, \ldots, N-1\}$; $S_h\{(i, j)\colon i = 0, N$ или $j = 0, N\}$;

$$\overline{\Omega}_h = \Omega_h \cup S_h.$$

$v(x_i, y_j, t_n)$ обозначим через $v_{ij}^{(n)}$.

Аппроксимируем условия (1.2) и (1.3) обычным образом:

$$v_{ij}^{(0)} = \varphi_{ij}, \quad (i, j) \in \overline{\Omega}_h, \tag{1.2'}$$

$$v_{ij}^{(n)} = \psi_{ij}^{(n)}, \quad v_{ij}^{(n+1)} = \psi_{ij}^{(n+1)}, \quad (i, j) \in S_h. \tag{1.3'}$$

Метод дробных шагов состоит в том, что для отыскания $v_{ij}^{(n+1)}$ при $(i, j) \in \Omega_h$ по известным $v_{ij}^{(n)}$ составляется система уравнений с использованием промежуточных функций $v_{ij}^{(n+1/2)}$:

$$\begin{aligned} \frac{v_{ij}^{(n+1/2)} - v_{ij}^{(n)}}{\tau} &= \sigma \Delta^2_{x\bar{x}} v_{ij}^{(n+1/2)} + (1-\sigma)\,\Delta^2_{x\bar{x}}\, v_{ij}^{(n)}, \\ \frac{v_{ij}^{(n+1)} - v_{ij}^{(n+1/2)}}{\tau} &= \sigma \Delta^2_{y\bar{y}} v_{ij}^{(n+1)} + (1-\sigma)\,\Delta^2_{y\bar{y}} v_{ij}^{(n+1/2)}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\Delta^2_{x\bar{x}} v_{ij} = \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h^2}, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

$$\Delta^2_{y\bar{y}} v_{ij} = \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{h^2},$$

Значения $v_{ij}^{(n+1/2)}$ при $(i, j) \in S_h$ определяются из условия

$$v_{ij}^{(n+1/2)} = v_{ij}^{(n)} = \psi_{ij}^{(n)}.$$

Перепишем (1.4) в виде

$$\begin{aligned} (E - \sigma\tau\Delta^2_{x\bar{x}})\, v_{ij}^{(n+1/2)} &= (E + (1-\sigma)\,\tau\Delta^2_{x\bar{x}})\, v_{ij}^{(n)}, \\ (E - \sigma\tau\Delta^2_{y\bar{y}})\, v_{ij}^{(n+1)} &= (E + (1-\sigma)\,\tau\Delta^2_{y\bar{y}})\, v_{ij}^{(n+1/2)}, \end{aligned} \quad (i, j) \in \Omega_h, \tag{1.5}$$

где E — тождественный оператор.

Введем обозначения:

$$D'\{(i, j): i = 2, 3, \ldots, N-2;\ j = 2, 3, \ldots, N-2\},$$
$$S_x\{(i; j): i = 2, 3, \ldots, N-2;\ j = 1,\ N-1\},$$
$$S_y\{(i, j): i = 1,\ N-1;\ j = 2, 3, \ldots, N-1\},$$
$$S_{xy}\{(i, j): i = 1,\ N-1;\ j = 1,\ N-1\}.$$

Авторы работ [3] — [5] заменяют схему (1.5) следующей схемой без промежуточных значений $v_{ij}^{(n+1/2)}$:

$$(E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)(E - \sigma\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)\, v_{ij}^{(n+1)} = \tag{1.6}$$
$$= (E + (1-\sigma)\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)(E + (1-\sigma)\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)\, v_{ij}^{(n)}.$$

Эта схема, как показано в [3], является абсолютно устойчивой и аппроксимирует уравнение (1.1) в метрике L_2 с порядком аппроксимации $O(\tau) + O(h^2)$; поэтому в силу известных теорем (см. [6]) следует ее сходимость в L_2 с порядком $O(\tau) + O(h^2)$.

Но так как (1.5) при условии (1.3′) имеет место не при всех $(i,j) \in \overline{\Omega}_h$, то на самом деле схеме (1.5) будет эквивалентна не (1.6), а

$$(E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)(E - \sigma\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)\, v_{ij}^{(n+1)} = \tag{1.7}$$
$$= (E + (1-\sigma)\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)(E + (1-\sigma)\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)\, v_{ij}^{(n)} + \tau R_{ij}^{(n)},$$

где

$$R_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0, & (i, j) \in D', \\ -\dfrac{1-\sigma}{h^2}\Delta_{x\bar{x}}^2\psi_{ij}^{(n)}\big|_{S_x}, & (i, j) \in S_x, \\ -\dfrac{\sigma}{h^2}\{(1-\sigma)\Delta_{y\bar{y}}^2\psi_{ij}^{(n)}\big|_{S_y} + \sigma\Delta_{y\bar{y}}^2\psi_{ij}^{(n+1)}\big|_{S_y}\}, & (i, j) \in S_y, \\ -\dfrac{1}{h^2}\{(1-\sigma)\Delta_{x\bar{x}}^2\psi_{ij}^{(n)}\big|_{S_x} + \sigma(1-\sigma)\Delta_{y\bar{y}}^2\psi_{ij}^{(n)}\big|_{S_y} + \sigma^2\Delta_{y\bar{y}}^2\psi_{ij}^{(n+1)}\big|_{S_y}\}, & \\ & (i, j) \in S_{xy}, \end{cases}$$

и $\psi_{ij}|_S$ — значение ψ_{ij} в ближайшей к (ij) точке границы.

Действительно, рассмотрим, как происходит исключение $v_{ij}^{(n+1/2)}$. Если $(i, j) \in D'$, то каждое из двух соотношений (1.5) выполнено в точках $(i, j-1)$, (i, j), $(i, j+1)$, $(i-1, j)$, $(i+1, j)$. Поэтому, применяя к первому соотношению оператор $(E + (1-\sigma)\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)$, а ко второму $(E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)$, получим, соответственно,

$$(E + (1-\sigma)\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)(E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)\, v_{ij}^{(n+1/2)} = \tag{1.8}$$
$$= (E + (1-\sigma)\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)(E + (1-\sigma)\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)\, v_{ij}^{(n)},$$

$$(E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)(E - \sigma\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)\, v_{ij}^{(n+1)} = (E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)(E + (1-\sigma)\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)\, v_{ij}^{(n+1/2)}. \tag{1.8′}$$

Складывая эти два равенства и учитывая перестановочность операторов $(E + (1-\sigma)\tau\Delta_{y\bar{y}}^2)$ и $(E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)$, приходим к (1.6).

Если же $(ij) \in S_x$ (для определенности возьмем, например, $j = N-1$), то второе из соотношений (1.5) выполнено в точках $(i-1, j)$, (ij), $i+1, j)$ и, применяя к нему оператор $(E - \sigma\tau\Delta_{x\bar{x}}^2)$, опять получим (1.8′).

Но первое из соотношений (1.5) имеет место только в точках $(i, j-1)$, (i, j), а в точке $(i, j+1)$ вместо него будет $(E-\sigma\tau\Delta^2_{x\bar{x}})\, v_{iN}^{(n+1/2)} = (E+(1-\sigma)\tau\Delta^2_{x\bar{x}})\, v_{iN}^{(n)} - \tau\Delta^2_{x\bar{x}}\psi_{iN}^{(n)}$. Поэтому вместо (1.8) получим

$$(E+(1-\sigma)\tau\Delta^2_{y\bar{y}})(E-\sigma\tau\Delta^2_{x\bar{x}})\, v_{ij}^{(n+1/2)} =$$
$$= (E+(1-\sigma)\tau\Delta^2_{y\bar{y}})(E+(1-\sigma)\tau\Delta^2_{x\bar{x}})\, v_{ij}^{(n)} - (1-\sigma)\frac{\tau}{h^2}\Delta^2_{x\bar{x}}\psi_{ij}^{(n)}\big|_{S_x}.$$

Складывая это равенство с (1.8′), убеждаемся в справедливости (1.7) для точек $(i, j)\in S_x$. Аналогично этот процесс исключения происходит и для точек S_y и S_{xy}.

Если $\psi(x, y, t) = 0$ или даже $\partial^2\psi/\partial x^2 = \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$, то $R_{ij}^{(n)}$ обращается в нуль для всех $(ij)\in\Omega_h$ и эквивалентность (1.5) и (1.6) имеет место; если же $R_{ij}^{(n)}\neq 0$, то легко построить пример, показывающий, что схема (1.7) (а следовательно, и схема (1.4)) не аппроксимирует уравнение (1.1).

Действительно, предположим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2},\quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \tag{1.9}$$

существуют и ограничены в Q_T. При этих условиях схема (1.6) аппроксимирует (1.1), а поэтому, подставляя $u(x, y, t)$ — точное решение (1.1) — в (1.7), получим

$$(E-\sigma\tau\Delta^2_{x\bar{x}})(E-\sigma\tau\Delta^2_{y\bar{y}})\, u_{ij}^{(n+1)} = \tag{1.10}$$
$$= (E+(1-\sigma)\tau\Delta^2_{x\bar{x}})(E+(1-\sigma)\tau\Delta^2_{y\bar{y}})\, u_{ij}^{(n)} + \tau\{O(\tau)+O(h^2)+R_{ij}^{(n)}\}.$$

Возьмем $u = \sin\pi x e^{-\pi^2 t}$. Тогда, очевидно, все условия на производные удовлетворяются, а

$$R_{ij}^{(n)} = (\sigma-1)\frac{4}{h^4}\sin^2\frac{\pi h}{2}\sin\pi x_i e^{-\pi^2 t},\quad \text{если } (i, j)\in S_x.$$

Вводим, как обычно, норму функции на слое $t = t_n = n\tau$:

$$\|v^{(n)}\| = \Big(h^2\sum_{i,j=1}^{N-1}(v_{ij}^{(n)})^2\Big)^{1/2}.$$

Тогда $\|R^{(n)}\| > c/h$, где $c > 0$ не зависит от τ и h, и поэтому из (1.10) следует, что (1.7) не аппроксимирует (1.1).

Таким образом, установлена следующая

Теорема 1. *Для уравнения* (1.1) *с начальным условием* (1.2) *и краевым условием* $u|_S = 0$ *метод дробных шагов есть абсолютно устойчивая и сходящаяся схема с порядком сходимости в среднем* $O(\tau)+O(h^2)$; *в случае неоднородного краевого условия* (1.3) *метод дробных шагов, вообще говоря, может не аппроксимировать уравнение* (1.1).

Нетрудно проверить, что и пример, и теорема полностью переносятся на случай p пространственных переменных, только к условиям (1.9) добавляется требование непрерывности

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x_{s_1}^2\,\partial x_{s_2}^2\cdots\partial x_{s_p}^2},$$

где $s_i\neq s_j$, если $i\neq j$, $s_i = 1, 2, \ldots, p$.

Заметим еще, что в случае схем [1], [2] сходимость устанавливается и для $\psi \neq 0$, причем схема [2], предложенная лишь для $p = 2$ и $p = 3$, без труда распространяется на случай любого p, а схема [1] применима лишь для $p = 2$.

§ 2. Метод дробных шагов для уравнений с разделяющимися переменными и правой частью

1. Изложим теперь видоизменение метода дробных шагов для уравнений с разделяющимися переменными и правой частью.

Пусть в цилиндре $Q_T = \overline{\Omega} \times [0 \leqslant t \leqslant T]$; $\overline{\Omega}\{0 \leqslant x_s \leqslant 1; s = 1, \ldots, p\}$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{s=1}^{p} L_s u + f, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\right)_S = (0, 0, \ldots, 0) \tag{2.2}$$

и начальному условию

$$u \mid_{t=0} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p). \tag{2.3}$$

Здесь

$$L_s u = \sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_s^\alpha}\left(a_{s\alpha}(x_s) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_s^\alpha}\right),$$

$a_{sm}(x_s) > 0$, $a_{s\alpha}(x_s) \geqslant 0$, S — боковая поверхность Q_T, ν — нормаль к S.

Построим разностную аппроксимацию этой задачи. Пусть τ — шаг во времени, $h = 1/N$ — шаг по пространственным переменным. Введем обозначения:

$$(x_s)_{i_s} = i_s h, \quad i_s = 0, 1, \ldots, N; \qquad s = 1, 2, \ldots, p; \qquad t_n = n\tau;$$

$$v(i_1 h, i_2 h, \ldots, i_p h, n\tau) = v^{(n)}_{i_1 \ldots i_p} = v^{(n)}_\Delta; \qquad \Delta = (i_1, i_2, \ldots, i_p);$$

$$\overline{\Omega}_h\{\Delta : i_s = 0, 1, \ldots, N; \ s = 1, 2, \ldots, p\},$$

$$\Omega_h\{\Delta : i_s = m, m+1, \ldots, N-m; \ s = 1, 2, \ldots, p\},$$

$$S_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h,$$

$$C_s\{\Delta : i_s = 0, 1, \ldots, N; \ i_{s'} = m, m+1, \ldots, N-m \text{ при } s' \neq s\},$$

$$C = \bigcup_{s=1}^{p} C_s.$$

В дальнейшем там, где это не вызывает недоразумений, вместо v_Δ будем писать просто v, опуская индекс Δ. Не будем также отмечать зависимость сеточных функций от сетки. $v^{(0)}_\Delta$ определяем из условия (2.3):

$$v^{(0)}_\Delta = \varphi_\Delta. \tag{2.3'}$$

Если $\Delta \in S_h$, то положим

$$v^{(k)}_\Delta = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, T/\tau), \tag{2.2'}$$

а для нахождения $v_\Delta^{(n+1)}$ в точках Ω_h по известным $v_\Delta^{(n)}$ рассмотрим p систем уравнений с $p-1$ промежуточными функциями $v_\Delta^{(n+s/p)}$:

$$\frac{v^{(n+s/p)}-v^{[n+(s-1)/p]}}{\tau}=\frac{1}{2}\left(L_s^h v^{(n+s/p)}+L_s^h v^{[n+(s-1)/p]}\right)\qquad (s=1,2,\ldots,p-1),$$

$$\frac{v^{(n+1)}-v^{[n+(s-1)/p]}}{\tau}=\frac{1}{2}\left(L_p^h v^{(n+1)}+L_p^h v^{[n+(p-1)/p]}\right)+T^h f^{(n)}, \tag{2.4}$$

где

$$L_s^h v=\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^{\alpha-1}\Delta_{\bar{x}_s^\alpha}^{\alpha}\left(a_{s\alpha}(i_s h)\,\Delta_{x_s^\alpha}^{\alpha} v\right),\qquad \Delta_{x_s} v_\Delta=\frac{v_{i_1\cdots(i_s+1)\cdots i_p}-v_{i_1\cdots i_p}}{h},$$

$$\Delta_{\bar{x}_s} v_\Delta=\frac{v_{i_1\cdots i_p}-v_{i_1\cdots(i_s-1)\cdots i_p}}{h},\qquad T^h f^{(n)}=\left\{\prod_{s=1}^{p-1}\left(E-\frac{\tau}{2}L_s^h\right)\right\}^{-1} f^{(n)};$$

E — тождественный оператор, $f_\Delta^{(n)}$ обозначает $f(i_1h, i_2h, \ldots, i_ph, (n+\frac{1}{2})\tau)$.

При такой аппроксимации $(-L_s^h)$ — самосопряженный и положительно определенный оператор и $L_{s_1}^h L_{s_2}^h=L_{s_2}^h L_{s_1}^h$ (см. например, [7], [8]).

Схема счета такова: по известному $(N+1)^p$-мерному вектору $v^{(n)}$ ($v^{(0)}$ определяется из начального условия) находится $v^{(n+1/p)}$ как решение первой системы (2.4) с условиями (2.2′); затем по полученному вектору $v^{(n+1/p)}$ ищется вектор $v^{(n+2/p)}$, удовлетворяющий второй системе (2.4) и условиям (2.2′) и т. д. до нахождения $v^{(n+(p-1)/p)}$.

Каждая из таких систем обладает матрицей при неизвестных, в которой отличные от нуля коэффициенты стоят на $2m+1$ соседних диагоналях, и поэтому для нахождения решения системы требуется $\asymp 1/h^p$ арифметических действий.

Нахождение

$$w^{(n+1)}=T^h f^{(n)}=\left\{\prod_{s=1}^{p-1}\left(E-\frac{\tau}{2}L_s^h\right)\right\}^{-1} f^{(n)}$$

тоже проводится по шагам:

$$\left(E-\frac{\tau}{2}L_s^h\right)w_\Delta^{[n+s/(p-1)]}=w_\Delta^{[n+(s-1)/(p-1)]},$$

$$\Delta\in\Omega_h,\qquad s=1,2,\ldots,p-1,$$

$$w_\Delta^{[n+s/(p-1)]}=0\qquad \text{при } \Delta\in S_h,$$

$$w_\Delta^{(n)}=\begin{cases} f_\Delta^{(n)} & \text{при } \Delta\in\Omega_h,\\ 0 & \text{при } \Delta\in S_h.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при этом нахождение $w^{(n+1)}$ потребует $\asymp 1/h^p$ арифметических действий. По найденным $v^{[n+(p-1)/p)}$ и $w^{(n+1)}$ из

последней системы (2.4) и условий (2.2′) находится $v^{(n+1)}$. Всего, таким образом, переход от $v^{(n)}$ к $v^{(n+1)}$ совершается с числом арифметических действий $\asymp 1/h^p$, т. е. с числом арифметических действий, по порядку равным числу точек сетки на слое $t = t_n$.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости схемы (2.4). Для этого перепишем (2.4) в виде

$$\left(E - \frac{\tau}{2} L_s^h\right) v^{(n+s/p)} = \left(E + \frac{\tau}{2} L_s^h\right) v^{[n+(s-1)/p]}, \quad s = 1, 2, \ldots, p-1;$$
$$\left(E - \frac{\tau}{2} L_p^h\right) v^{(n+1)} = \left(E + \frac{\tau}{2} L_p^h\right) v^{[n+(p-1)/p]} + \tau T^h f^{(n)} \tag{2.5}$$

и исключим промежуточные значения $v^{(n+s/p)}$, учитывая перестановочность L_{s_1} и L_{s_2} и условия (2.2′), о важности которых уже говорилось в § 1. В силу условий (2.2′) можно считать, что (2.5) справедливо не только в точках Ω_h, но и во всех точках C. Поэтому первые $p-1$ систем (2.5) эквивалентны:

$$\prod_{s=1}^{p-1} \left(E - \frac{\tau}{2} L_s^h\right) v^{[n+(p-1)/p]} = \prod_{s=1}^{p-1} \left(E + \frac{\tau}{2} L_s^h\right) v^{(n)}.$$

Умножая это равенство на $(E + (\tau/2) L_p^h)$, последнее из равенств (2.5) на $\prod_{s=1}^{p-1} (E - (\tau/2) L_s^h)$ и затем складывая полученные соотношения, найдем

$$\prod_{s=1}^{p} \left(E - \frac{\tau}{2} L_s^h\right) v_\Delta^{(n+1)} = \prod_{s=1}^{p} \left(E + \frac{\tau}{2} L_s^h\right) v_\Delta^{(n)} + \tau f_\Delta^{(n)}, \quad \Delta \in \Omega_h, \tag{2.6}$$

так как

$$\prod_{s=1}^{p-1} \left(E - \frac{\tau}{2} L_s^h\right) T^h f_\Delta^{(n)} = f_\Delta^{(n)}, \quad \Delta \in \Omega.$$

L_s^h при условиях (2.2′) есть самосопряженный и отрицательно определенный оператор (см. [8]). Следовательно, существует такая система функций $\psi_k^{(s)}(x_s)$, $k = 1, 2, \ldots, N - 2m + 1$, удовлетворяющих (2.2′), что

$$L_s^h \psi_{k_s}^{(s)} = -(\lambda_{k_s}^{(s)})^2 \psi_{k_s}^{(s)}$$

и

$$(\psi_{k_1}^{(s)}, \psi_{k_2}^{(s)}) = \delta_{k_1 k_2} = \begin{cases} 0 & \text{при } k_1 \neq k_2, \\ 1 & \text{при } k_1 = k_2, \end{cases}$$

где

$$(\psi^{(s)}, \varphi^{(s)}) = h \sum_{i_s=0}^{N} \psi^{(s)}(i_s h) \cdot \varphi^{(s)}(i_s h).$$

Тогда операторы

$$A = \prod_{s=1}^{p} \left(E - \frac{\tau}{2} L_s^h\right) \quad \text{и} \quad B = \prod_{s=1}^{p} \left(E + \frac{\tau}{2} L_s^h\right)$$

имеют собственные функции

$$\overline{\psi}_{k_1\ldots k_p}(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{s=1}^{p} \psi_{k_s}^{(s)}(x_s)$$

и, соответственно, собственные значения

$$\prod_{s=1}^{p}\left(1 + \frac{\tau}{2}(\lambda_{k_s}^{(s)})^2\right) \quad \text{и} \quad \prod_{s=1}^{p}\left(1 - \frac{\tau}{2}(\lambda_{k_s}^{(s)})^2\right).$$

Поэтому, как это нетрудно проверить,

$$\left\|\left(E - \frac{\tau}{2}L_s^h\right)^{-1}\left(E + \frac{\tau}{2}L_s^h\right)\right\| < 1$$

и $\|A^{-1}B\| < 1$, где $\|C\| = \max|\lambda_i|$ ($\{\lambda_i\}$ — собственные числа матрицы C). Таким образом, доказана устойчивость не только схемы (2.6), но и каждого из промежуточных шагов; в схемах из [1], [2], как известно, промежуточные шаги могут быть неустойчивы. При доказательстве устойчивости условие $a_{s\alpha} \geqslant 0$ использовалось лишь для отрицательной определенности L_s^h, и поэтому его можно ослабить и требовать просто отрицательной определенности L_s^h.

Из доказанной устойчивости по начальным данным легко заключить об устойчивости по правой части (см. [6]).

3. Покажем теперь, что схема (2.6) аппроксимирует уравнение (2.1). В дальнейшем нам часто будет нужен класс функций $D_q^p(c)$, введенный в [9]. А именно, мы будем говорить, что функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, определенная в p-мерном гиперкубе $\overline{\Omega}$, принадлежит $D_q^p(c)$, если все частные производные $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, содержащие не более q дифференцирований по каждой координате, ограничены по модулю константой c. Перепишем (2.6) в виде

$$\frac{v^{(n+1)} - v^{(n)}}{\tau} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} L_s^h(v^{(n+1)} + v^{(n)}) + f^{(n)} + \tag{2.7}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)\sum_{\substack{s_1, s_2=1\\ s_1>s_2}}^{p} L_{s_1}^h L_{s_2}^h(v^{(n)} - v^{(n+1)}) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1} L_1^h \ldots$$

$$\ldots L_p^h(v^{(n)} - (-1)^p v^{(n+1)}),$$

$$v_\Delta^{(k)} = 0$$

Пусть $a_{s\alpha}$, f, φ таковы, что при $\Delta \in S_h$;

1) в Q_T существуют и непрерывны

$$\text{а)}\ \frac{\partial^{\alpha+1} a_{s\alpha}}{\partial x_s^{\alpha+1}}; \tag{2.8}$$

$$\text{б)}\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{k_1+k_2} u}{\partial x_{s_1}^{k_1}\,\partial x_{s_2}^{k_2}}\right), \quad k_i = 0, 1, \ldots, 2m; \tag{2.8'}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_s^k}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 2m; \quad \frac{\partial^{2m+2} u}{\partial x_s^{2m+2}}, \quad s = 1, 2, \ldots, p;$$

2) при каждом $t\,(0 \leqslant t \leqslant T)$

$$u \in D_{2m}^{p}(c). \tag{2.8''}$$

Тогда при подстановке u-решения (2.1) в (2.7) получим

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\tau} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p} L_s^h\,(u^{(n+1)} + u^{(n)}) + f^{(n)} + O(\tau^2) + O(h) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)\sum_{s_1 > s_2} L_{s_1}^h L_{s_2}^h\,(u^{(n)} - u^{(n+1)}) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1} L_1^h \ldots$$

$$\ldots L_p^h\,(u^{(n)} - (-1)^p u^{(n+1)}),$$

т. е. схема (2.5) аппроксимирует уравнение (2.1) в среднем с порядком $O(\tau^2) + O(h)$. Для уравнений с постоянными коэффициентами порядок аппроксимации, как легко проверить, будет $O(\tau^2) + O(h^2)$.

Краевые условия (2.2) аппроксимируются в общем случае с погрешностью $O(h)$.

Известно [6], что если разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение, начальные и краевые условия и является устойчивой по начальным условиям, по краевым условиям и по правой части, то разностная схема является сходящейся. Однако применение теоремы из [6] к задаче (2.1) — (2.2) — (2.3) возможно только при $m = 1$, так как только при $m = 1$ краевые условия аппроксимируются точно, а получить устойчивость по краевым условиям в общем случае не удается. Не достаточно для сходимости здесь и такого факта, что все собственные числа оператора

$$A = \prod_{s=1}^{p}\left(E - \frac{\tau}{2} L_s^h\right)$$

при условиях (2.2′) больше единицы, так как ограниченность A^{-1} этим устанавливается лишь для условий (2.2′), которые аппроксимируют (2.2) не точно. Поэтому для $m > 1$ ограничимся пока констатацией факта, что метод дробных шагов есть абсолютно устойчивая и аппроксимирующая схема; вопрос о ее сходимости будет разобран в § 4.

А для $m = 1$, следовательно, имеет место следующая

Теорема 2. *Метод дробных шагов для уравнения* (2.1) *с условиями* (2.2) *и* (2.3) *при выполнении условий* (2.8), (2.8′), (2.8″) *есть абсолютно устойчивая и сходящаяся схема с порядком сходимости в среднем* $O(\tau^2) + O(h)$; *если же коэффициенты уравнения постоянны, то порядок сходимости будет* $O(\tau^2) + O(h^2)$.

В работах [2], [10] изучались для уравнения теплопроводности некоторые разностные схемы с переменными шагами по времени.

В следующем параграфе мы рассмотрим возможность такого же видоизменения метода дробных шагов.

§ 3. Метод дробных шагов с переменными шагами по времени

1. Проведем анализ метода дробных шагов с растущими шагами по времени для несколько более общего уравнения, чем (2.1).

Пусть в области Q_T (см. § 2) ищется решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{s=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(a_s(x_s,t)\frac{\partial u}{\partial x_s}\right)-\sum_{s=1}^{p}b_s(x_s,t)\,u+f, \tag{3.1}$$

$$a_s(x_s,t)>0;\ b_s(x_s,t)\geqslant 0,$$

с краевым условием

$$u|_S=0 \tag{3.2}$$

и начальным условием (2.3).

Разностная аппроксимация этой задачи с переменным τ примет вид

$$\frac{v_\Delta^{(n+s/p)}-v_\Delta^{[n+(s-1)/p]}}{\tau_n}=\frac{1}{2}\left(L_{s,\,n}\,v_\Delta^{(n+s/p)}+L_{s,\,n}\,v_\Delta^{[n+(s-1)/p]}\right)\quad (s=1,2,\ldots,p-1),$$

$$\frac{v_\Delta^{(n+1)}-v_\Delta^{[n+(p-1)/p]}}{\tau_n}=\frac{1}{2}\left(L_{p,\,n}\,v_\Delta^{(n+1)}+L_{p,\,n}\,v_\Delta^{[n+(p-1/p]}\right)+T_n f_\Delta^{(n)},\quad \Delta\in\Omega_h,$$

$$v_\Delta^{(n+s/p)}=0\quad (s=1,2,\ldots,p),\quad \text{если } \Delta\in S_h.$$

$$L_{s,\,n}\,v^{(n)}=\Delta_{\bar x_s}\left(a_s\left(x_s,t_n+\frac{\tau_n}{2}\right)\Delta_{x_s}v^{(n)}\right)-b_s\left(x_s,t_n+\frac{\tau_n}{2}\right)v^{(n)},$$

$$T_n=\left\{\prod_{s=1}^{p-1}\left(E-\frac{\tau_n}{2}L_{s,\,n}\right)\right\}^{-1};\ t_n=\tau_0+\tau_1+\cdots+\tau_{n-1}.$$

Все остальные обозначения такие же, как в § 2. Здесь, как мы видим, $L_{s,\,n}$ $(s=1,\ldots,p)$ уже зависят от t_n, но тем не менее их самосопряженность, отрицательная определённость и перестановочность $L_{s_1,\,n}$ и $L_{s_2,\,n}$ устанавливаются так же, как и в [7]. Исключая промежуточные шаги, получим аналог (2.6):

$$\prod_{s=1}^{p}\left(E-\frac{\tau_n}{2}L_{s,\,n}\right)v^{(n+1)}=\sum_{s=1}^{p}\left(E+\frac{\tau_n}{2}L_{s,\,n}\right)v^{(n)}+\tau_n f^{(n)}. \tag{3.3}$$

Чтобы установить устойчивость этой схемы по начальным данным, надо рассмотреть, как меняется $\|w^{(n)}\|$ при переходе на следующий слой, если $w^{(n)}$ в точках Ω_h удовлетворяет

$$\sum_{s=1}^{p}\left(E-\frac{\tau_n}{2}L_{s,\,n}\right)w^{(n+1)}=\sum_{s=1}^{p}\left(E+\frac{\tau_n}{2}L_{s,\,n}\right)w^{(n)} \tag{3.4}$$

и условию $w_\Delta^{(n)}=0$, $\Delta\in S_h$. Все исследование проводится так же, как в § 2, с той только разницей, что семейство собственных функций операторов

$$L_{s,\,n};\qquad \prod_{s=1}^{p}\left(E-\frac{\tau_n}{2}L_{s,\,n}\right);\qquad \prod_{s=1}^{p}\left(E+\frac{\tau_n}{2}L_{s,\,n}\right)$$

меняется при переходе от t_n к t_{n+1}. Пользуясь ортогональностью различных собственных функций, из того, что коэффициент у каждой собственной функции в разложении $w^{(n+1)}$ меньше по модулю, чем у $w^{(n)}$, заключаем, что

$$\|w^{(n+1)}\|\leqslant\|w^{(n)}\|. \tag{3.5}$$

2. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1) *существуют и ограничены*

$$\frac{\partial^2 a_s}{\partial x_s^2} \quad (s = 1, \ldots, p);$$

2) a_s, b_s, φ *и* f *таковы, что*

а) *все производные*

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_s^\alpha} \ (\alpha = 0, 1, \ldots, 4), \qquad \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \ (\alpha = 0, 1, 2, 3), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x_s^\alpha \, \partial x_{s_1}^\beta}\right) \ (\alpha, \beta = 0, 1, 2)$$

в Q_T *по модулю меньше* $Me^{-\delta t}$;

б) *при любом* $t \, (0 \leqslant t \leqslant T)$

$$u \in D_{2m}^p \, (Me^{-\delta t}).$$

Тогда вектор $v^{(n)} \, (0 \leqslant n \leqslant T/\tau)$, *получаемый по схеме* (3.1′) с $\tau_n = \tau_0 e^{\delta t_n}$, *сходится к* $u^{(n)}$ *равномерно по* $t \, (0 \leqslant t \leqslant T)$ *в метрике* L_2 *с порядком* $O(\tau_0^2) + O(h)$.

Доказательство. Подставим $u(x_1, \ldots, x_p, t)$ в (3.3). Тогда в силу условий теоремы получим

$$\prod_{s=1}^{p}\left(E - \frac{\tau_n}{2} L_{s,\,n}\right) u^{(n+1)} = \prod_{s=1}^{p}\left(E + \frac{\tau_n}{2} L_{s,\,n}\right) u^{(n)} + \tau_n f^{(n)} + \tau_n e^{-\delta t} O(\tau_n^2) + \tau_n e^{-\delta t_n} O(h). \tag{3.6}$$

Здесь $\tau_n < 1$.

Для $e^{(n)} = u^{(n)} - v^{(n)}$ тогда будет

$$\prod_{s=1}^{p}\left(E - \frac{\tau_n}{2} L_{s,\,n}\right) e^{(n+1)} = \prod_{s=1}^{p}\left(E + \frac{\tau_n}{2} L_{s,\,n}\right) + \tau_n e^{-\delta t_n} O(\tau_n^2) + \tau_n e^{-\delta t_n} O(h), \tag{3.7}$$

$e_\Delta^{(n)} = 0$, если $\Delta \in S_h$, и, естественно, $e^{(0)} = 0$.

Рассматривая разложения $e^{(n+1)}$, $e^{(n)}$ и всех слагаемых в (3.7) по собственным функциям операторов

$$A = \prod_{s=1}^{p}\left(E - \frac{\tau_n}{2} L_{s,\,n}\right) \quad \text{и} \quad B = \prod_{s=1}^{p}\left(E + \frac{\tau_n}{2} L_{s,\,n}\right),$$

можно получить

$$\| e^{(n+1)} \| \leqslant \| e^{(n)} \| + e^{-\delta t_n} \tau_n (O(\tau_0^2) + O(h)),$$

или же, учитывая вид τ_n,

$$\| e^{(n+1)} \| \leqslant \| e^{(n)} \| + \tau_0 (O(\tau_0^2) + O(h)).$$

Отсюда уже легко получается для любого $t \ (0 \leqslant t \leqslant T)$

$$\| u^{(k)} - v^{(k)} \| = O(\tau_0^2) + O(h), \tag{3.8}$$

где k такое, что $\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_{k-1} = t$. Для уравнений с постоянными

коэффициентами, как это нетрудно проверить, в правой части (3.8) будет $O(\tau_0^2)+O(h^2)$.

3. Покажем теперь возможность применения одного варианта метода дробных шагов для уравнения (3.1) без каких-либо ограничений на знак b_s.

Введем обозначения:

$$L_{s,\,n}v=\Delta_{\bar{x}_s}(a_s(x_s,t_n)\Delta_{x_s}v);\quad B_nv=-\sum_{s=1}^{p}b_s(x_s,t_n)v.$$

Рассмотрим следующий вариант метода дробных шагов:

$$(E-\tau L_{1,\,n})v^{(n+1/p)}=(E+\tau B_n)v^{(n)}+f^{(n)},$$
$$(E-\tau L_{s,\,n})v^{(n+s/p)}=v^{[n+(s-1)/p]}. \tag{3.9}$$

Исключая $v^{(n+s/p)}$, получим

$$\prod_{s=1}^{p}(E-\tau L_{s,\,n})\,v^{(n+1)}=(E+\tau B_n)v^{(n)}+\tau f^{(n)}. \tag{3.10}$$

Операторы $L_{s,\,n}$ и B_n могут не иметь общих собственных функций, но нетрудно проверить, что

$$\Big\|\prod_{s=1}^{p}(E-\tau L_{s,\,n})\,e^{(n+1)}\Big\|\geqslant(1+c_1\tau)\,\|e^{(n+1)}\|$$

и

$$\|(E+\tau B_n)\,e^{(n)}\|\leqslant(1+c_2\tau)\,\|e^{(n)}\|.$$

Из этого уже легко получить достаточное условие для устойчивости по начальным данным

$$\|e^{(n+1)}\|\leqslant(1+c\tau)\,\|e^{(n)}\|.$$

Далее обычным образом выводится оценка $\|u^{(k)}-v^{(k)}\|=O(\tau)+O(h)$, а если коэффициенты уравнения постоянные, то $\|u^{(k)}-v^{(k)}\|=O(\tau)+O(h^2)$.

§ 4. Сходимость к обобщенному решению

1. Рассматриваем уравнение (2.1) с начальным условием (2.3) и краевым условием (2.2). Коэффициенты $a_{sm}>0$; $a_{s\alpha}$ $(\alpha<m)$ могут быть любого знака, но таковы, что L_s^h есть отрицательно определенный оператор. Для простоты всюду в дальнейшем предполагаем $a_{s\alpha}(x_s)\in C^{(0)}(Q_T)$ $(\alpha\leqslant m)$. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_p)$.

Назовем функцию $u(x,t)$ обобщенным решением уравнения (2.1) *с условиями* (2.2) *и* (2.3), *если*

1) $u(x,t)\in W_2^{(1)}(Q_T)$,

2) $u(x,t)\in W_2^{(m)}(\Omega_t)$ *как функция x при каждом* $t\in[0,T]$,

3) $\left(u,\dfrac{\partial u}{\partial\nu},\ldots,\dfrac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\right)_S=(0,0,\ldots,0)$ *в смысле метрики* $L_2(S)$,

4) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\int\limits_{\Omega}(u(x,\Delta t)-\varphi(x))^2\,d\Omega=0$,

5) *для любой функции* $\overline{\Phi}(x, t)$, *удовлетворяющей условиям* 1), 2), 3), *будет выполнено соотношение*

$$\int\limits_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial t}\overline{\Phi}\,dQ = -\int\limits_{Q_T}\Big(\sum_{s=1}^{p}\sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha}\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_s^\alpha}\frac{\partial^\alpha \overline{\Phi}}{\partial x_s^\alpha}\Big)dQ + \int\limits_{Q_T} f\overline{\Phi}\,dQ. \qquad (4.1)$$

Здесь Ω_{t_0} обозначает множество точек $0 \leqslant x_s \leqslant 1$ $(s = 1, \ldots, p)$, $t = t_0$. $W_2^{(m)}(D)$ — пространство функций, имеющих обобщенные производные до порядка m включительно, суммируемые с квадратом на D (см. [11]).

Нетрудно проверить, что всякое классическое решение смешанной задачи является обобщенным и что обобщенное решение единственно. Ниже будет показано, что обобщенное решение существует и может быть получено как предел приближений, получаемых с помощью метода дробных шагов. Основным аппаратом при этом являются разностные «энергетические неравенства» (см. [11], [12]). Получению таких неравенств для параболических уравнений посвящены работы [13], [14], [15], [16], [17], причем наиболее общие результаты содержатся в [13], [14].

2. Как говорилось в § 2, метод дробных шагов приводит к соотношению (2.6). Условимся суммы вида

$$\sum_{\substack{s_1, s_2, \ldots, s_k = 1\\ s_1 > s_2 > \ldots > s_k}}^{p}$$

обозначать через ${}_{s_1}\Sigma'_{s_k}$. Тогда (2.6) для $p = 2r$ можно переписать в следующем виде:

$$\Big\{\frac{E}{\tau} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{2}\Big){}_{s_1}\Sigma'_{s_2} L^h_{s_1} L^h_{s_2} + \ldots + \frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{p-1} L^h_1 L^h_2 \ldots L^h_p\Big\} \times \qquad (4.2)$$

$$\times (v^{(n+1)} - v^{(n)}) - \Big\{\sum_{s=1}^{p} L^h_s + \Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_3} L^h_{s_1} L^h_{s_2} L^h_{s_3} + \ldots$$

$$\ldots + \Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} L^h_{s_1} \ldots L^h_{s_{p-1}}\Big\}\frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2} = f^{(n)},$$

$$v_\Delta^{(n)} = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, T/\tau), \quad \text{если } \Delta \in S_h. \qquad (4.3)$$

Если же $p = 2r + 1$, то (2.6) примет вид:

$$\Big\{\frac{E}{\tau} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{2}\Big){}_{s_1}\Sigma'_{s_2} L^h_{s_1} L^h_{s_2} + \ldots + \frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} L^h_{s_1} \ldots L^h_{s_{p-1}}\Big\} \times \qquad ((4.2')$$

$$\times (v^{(n+1)} - v^{(n)}) - \Big\{\sum_{s=1}^{p} L^h_s + \Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_3} L^h_{s_1} L^h_{s_2} L^h_{s_3} + \ldots$$

$$\ldots + \Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{p-1} L^h_1 \ldots L^h_p\Big\}\frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2} = f^{(n)}.$$

Введем обозначения: $\Omega'_{h,\,t_0}$ — множество всех точек решетки, лежащих на слое $t = t_0$ и принадлежащих области Ω', причем $\overline{\Omega} \subset \Omega'$;

$$\sum_{k=0}^{t/\tau} \Omega'_{h,\,k\tau}$$

обозначим через $Q'_{h,\,t}$, а суммы по всем точкам $\Omega'_{h,t}$; $\Omega_{h,\,t}$ $Q'_{h,\,t}$; $Q_{h,\,t}$ будем соответственно обозначать

$$\sum_{\Omega'},\ \sum_{\Omega},\ \sum_{Q'},\ \sum_{Q}.$$

Если $\Delta = (i_1 \ldots i_p)$ лежит вне Ω_h, положим

$$v_\Delta^{(n)} = 0\ (n = 0, 1, \ldots, T/\tau), \quad a_{s\alpha}(i_s, h) = 0 \tag{4.4}$$

и распространим на эти точки (4.2) и (4.2′); конечно, при этом правые части (4.2) и (4.2′) в таких точках не будут иметь ничего общего с f. Но если (4.2) во всех точках $Q'_{h,\,t}$ умножить на $\tau h^p (v^{(n+1)} + v^{(n)})/2$ и просуммировать полученные соотношения по $Q'_{h,t}$, то в силу условий (4.3) и (4.4) получим

$$\tau h^p \sum_{Q'} \frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2} \left\{ \frac{E}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right) {}_{s_1}\Sigma'_{s_2} L^h_{s_1} L^h_{s^2} + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1} L^h_1 \ldots L^h_p \right\} \times \tag{4.5}$$

$$\times (v^{(n+1)} - v^{(n)}) - \tau h^p \sum_{Q'} \frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2} \left\{ \sum_{s=1}^{p} L^h_s + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} L^h_{s_1} \ldots L^h_{s_{p-1}} \right\} \frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2} = \tau h^p \sum_{Q} f^{(n)} \frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2}.$$

Поскольку при условиях (4.3) L^h_s есть отрицательно определенный самосопряженный оператор, а $L^h_{s_1} L^h_{s_2} = L^h_{s_2} L^h_{s_1}$, то

$$I_t \left(\frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2} \right) = -\tau h^p \sum_{Q'} \frac{v^{(n+1)} v^{(n)}}{2} \left\{ \sum_{s=1}^{p} L^h_s + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_3} L^h_{s_1} L^h_{s_2} L^h_{s_3} + \ldots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} L^h_{s_1} \ldots L^h_{s_{p-1}} \right\} \frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2} > 0.$$

Остальные слагаемые в левой части, имея в виду получение разностных энергетических неравенств, преобразуем, используя формулы «суммирования по частям» (см. [12]) и учитывая условия (4.3). Покажем, как ведутся эти преобразования, на примере $L^h_{s_1} L^h_{s_2}$, обозначив для сокращения записи $\Delta^{\alpha}_{x_s\alpha}$ через $\overline{D}^{\alpha}_s$ и $\Delta^{\alpha}_{x_s\alpha}$ через D^{α}_s:

$$\sum_{Q'} (v^{(n+1)} + v^{(n)})\ L^h_{s_1} L^h_{s_2} (v^{(n+1)} - v^{(n)}) = \tag{4.6}$$

$$= \sum_{Q'} \sum_{\alpha_1\alpha_2=0}^{m} (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} (v^{(n+1)} + v^{(n)})\ \overline{D}^{\alpha_1}_{s_1} a_{s_1\alpha_1} D^{\alpha_1}_{s_1}\ \overline{D}^{\alpha_2}_{s_2} a_{s_2\alpha_2} D^{\alpha_2}_{s_2} (v^{(n+1)} - v^{(n)}) =$$

$$= \sum_{\alpha_1\alpha_2=0}^{m} (-1)^{\alpha_2} \sum_{Q'} a_{s_1\alpha_1} D^{\alpha_1}_{s_1} (v^{(n+1)} + v^{(n)}) \cdot D^{\alpha_1}_{s_1} \overline{D}^{\alpha_2}_{s_2} a_{s_2\alpha_2} D^{\alpha_2}_{s_2} (v^{(n+1)} - v^{(n)}) =$$

$$= \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{m} \sum_{Q'} a_{s_1\alpha_1} a_{s_2\alpha_2} D_{s_2}^{\alpha_2} D_{s_1}^{\alpha_1} (v^{(n+1)} + v^{(n)}) \cdot D_{s_2}^{\alpha_2} D_{s_1}^{\alpha_1} (v^{(n+1)} - v^{(n)}) =$$

$$= \sum_{\Omega'} \sum_{\alpha_1\alpha_2=0}^{m} a_{s_1\alpha_1} a_{s_2\alpha_2} (D_{s_1}^{\alpha_1} D_{s_2}^{\alpha_2} v^{(k)})^2 - \sum_{\Omega'} \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{m} a_{s_1\alpha_1} a_{s_2\alpha_2} (D_{s_1}^{\alpha_1} D_{s_2}^{\alpha_2} \varphi)^2,$$

где $k = t/\tau$.

Как мы видим, в этих преобразованиях существенно используется то, что каждый оператор L_s^h зависит только от x_s. Таким образом, вместо (4.5) будем иметь

$$h^p \sum_{\Omega'} \Big\{ (v^{(k)})^2 + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_2} \sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{m} a_{s_1\alpha_1} a_{s_2\alpha_2} (D_{s_1}^{\alpha_1} D_{s_2}^{\alpha_2} v^{(k)})^2 + \ldots \tag{4.7}$$

$$\ldots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_p=0}^{m} \left(\prod_{i=1}^{p} a_{i\alpha_i}\right) (D_1^{\alpha_i} \ldots D_p^{\alpha_p} v^{(k)})^2 \Big\} + I_t \left(\frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant h^p \sum_{\Omega'} \Big\{ (\varphi)^2 + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_2} \sum_{\alpha_1\alpha_2=0}^{m} a_{s_1\alpha_1} a_{s_2\alpha_2} (D_{s_1}^{\alpha_1} D_{s_2}^{\alpha_2} \varphi)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_p=0}^{m} \left(\prod_{i=1}^{p} a_{i\alpha_i}\right) (D_1^{\alpha_1} \ldots D_p^{\alpha_p} \varphi)^2 \Big\} + \tau h^p \sum_{Q'} f^{(n)} \frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2}.$$

В (4.7) оставим в левой части только слагаемые, имеющие второй индекс у всех коэффициентов, равный m, а слагаемые с индексом $\alpha_s < m$ перенесем в правую часть.

Коэффициенты a_{sm} в слагаемых левой части заменим на их минимум в Q_T, слагаемые в правой части увеличим, заменив $a_{s\alpha}$ на максимум $a_{s\alpha}|$ в Q_T, и сумму квадратов разностей с $\alpha_s < m$ заменим на ее оценку сверху через сумму квадратов аналогичных разностей, содержащих только индексы $\alpha_s = m$ (это можно сделать в силу условий (4.3)). Выражение

$$\tau h^p \sum_{Q} f^{(n)} \frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2}$$

оценивается через

$$\tfrac{1}{2} \tau h^p \sum_{Q} (f^{(n)})^2 + \tfrac{1}{2} \tau h^p \sum_{Q} (v^{(n)})^2.$$

Тогда, введя обозначение

$$J_t(v^{(k)}) = h^p \sum_{\Omega'} \Big\{ (v^{(k)})^2 + \tau^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_2} (D_{s_1}^m D_{s_2}^m v^{(k)})^2 + \cdots + \tau^p (D_1^m \ldots D_p^m v^{(k)})^2 \Big\},$$

из (4.7) получим

$$I_t \left(\frac{v^{(n+1)} + v^{(n)}}{2}\right) + J_t(v^{(k)}) \leqslant C_0(T) \Big\{ \tau h^p \sum_{Q} (f^{(n)})^2 + J_0(\varphi) + \sum_{n=0}^{k} J_{n\tau}(v^{(n)}) \Big\}, \tag{4.8}$$

где $C_0(T)$ — некоторая константа, не зависящая от τ и h. Это же соотношение может быть получено и для $p = 2r + 1$, если провести анало-

гичные преобразования над (4.2′) и ввести обозначения

$$I_t\left(\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{2}\right)=\tau h^p\sum_{Q'}\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{2}\left\{\sum_{s=1}^{p}L_s^h+\left(\frac{\tau}{2}\right)\sum_{s_1}\sum_{s_2}{}' L_{s_1}^h L_{s_2}^h L_{s_3}^h+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1}L_1^h\dots L_p^h\right\}\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{2};$$

$$J_t(v^{(k)})=h^p\sum_{\Omega'}\left\{(v^{(k)})^2+\tau^2\sum_{s_1}\sum_{s_2}{}'(D_{s_1}^m D_{s_2}^m v^{(k)})^2+\dots+\tau^{p-1}\sum_{s_1}\sum_{s_{p-1}}{}'(D_{s_1}^m\dots\right.$$

$$\left.\dots D_{s_{p-1}}^m v^{(k)})^2\right\}. \tag{4.9}$$

Пусть

$$f\in C^{(0)}(Q_T)\quad\text{и}\quad\varphi\in D_m^p(C).$$

Тогда из (4.8) методом, примененным в [12], легко получаются оценки

$$\begin{gathered}J_t(v^{(k)})\leqslant C_1(T)=\text{const},\\ I_t\left(\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{2}\right)\leqslant C_1(T)=\text{const}.\end{gathered}\tag{4.10}$$

При этом, естественно, предполагается также, что φ удовлетворяет условиям согласования, т. е. φ и все ее производные до $(m-1)$-го порядка обращаются в нуль на границе Ω.

$$\left.\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_p^{\alpha_p}}\right|_S=0\qquad(\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_p\leqslant m-1). \tag{4.9′}$$

Из полученных оценок очевидно следует

$$h^p\sum_{\Omega'}(v^{(k)})^2\leqslant C_1(T)=\text{const}. \tag{4.11}$$

3. Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (4.9) *и* (4.9′). *Тогда для* $v_\Delta^{(n)}$ *имеют место неравенства*

$$\tau h^p\sum_{Q'}\left(\frac{v^{(n+1)}-v^{(n)}}{\tau}\right)^2\leqslant C_2(T)=\text{const}, \tag{4.12}$$

$$h^p\sum_{\Omega'}\sum_{s=1}^{p}(D_s^m v^{(k)})^2\leqslant C_2(T)=\text{const}. \tag{4.12′}$$

Доказательство. Умножим (4.2) во всех точках $Q'_{h,T}$ на

$$\tau h^p D_t v^{(n)}=\tau h^p\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{\tau}$$

и просуммируем полученные равенства по $Q'_{h,\tau}$:

$$\tau h^p\sum_{Q'}D_t v^{(n)}\left\{\frac{E}{\tau}+\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)\sum_{s_1}\sum_{s_2}{}' L_{s_1}^h L_{s_2}^h+\dots+\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1}L_1^h\dots L_p^h\right\}\times \tag{4.13}$$

$$\times(v^{(n+1)}-v^{(n)})-\tau h^p\sum_{Q'}D_t v^{(n)}\left\{\sum_{s=1}^{p}L_s^h+\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\sum_{s_1}\sum_{s_3}{}' L_{s_1}^h L_{s_2}^h L_{s_3}^h+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-2}\sum_{s_1}\sum_{s_{p-1}}{}' L_{s_1}^h\dots L_{s_{p-1}}^h\right\}\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{2}=\tau h^p\sum_{Q}f^{(n)}D_t v^{(n)}.$$

Так как операторы $L^h_{s_1}L^h_{s_2}\ldots L^h_{s_{2l}}$ положительны, то

$$\tau h^p \sum_{Q'} D_t v^{(n)} \left\{\frac{E}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right) {}_{s_1}\Sigma'_{s_2} L^h_{s_1} L^h_{s_2} + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-1} L^h_1 \ldots L^h_p\right\} \times$$
$$\times (v^{(n+1)} - v^{(n)}) > 0$$

Преобразуем остальные слагаемые:

$$\tau h^p \sum_{Q'} D_t v^{(n)} L^h_s (v^{(n+1)} + v^{(n)}) = \tau h^p \sum_{Q'} \sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha} (D^\alpha_s D_t v^{(n)}) D^\alpha_s (v^{(n+1)} + v^{(n)}) =$$
$$= \tau h^p \sum_{Q'} \sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha} D_t (D^\alpha_s v^{(n)})^2 = h^p \sum_{\Omega'} \sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha} [(D^\alpha_s v^{(k)})^2 - (D^\alpha_s \varphi)^2],$$

где $k = t/\tau$.

Аналогично

$$\tau h^p \sum_{Q'} L^h_{s_1} L^h_{s_2} L^h_{s_3} (v^{(n+1)} + v^{(n)}) \cdot D_t v^{(n)} =$$
$$= h^p \sum_{\Omega'} \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{m} a_{s_1\alpha_1} a_{s_2\alpha_2} a_{s_3\alpha_3} (D^{\alpha_1}_{s_1} D^{\alpha_2}_{s_2} D^{\alpha_3}_{s_3} v^{(k)})^2 -$$
$$- h^p \sum_{\Omega'} \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{m} a_{s_1\alpha_1} a_{s_2\alpha_2} a_{s_3\alpha_3} (D^{\alpha_1}_{s_1} D^{\alpha_2}_{s_2} D^{\alpha_3}_{s_3} \varphi)^2.$$

Следовательно, из (4.13) вытекает

$$\tau h^p \sum_{Q'} (D_t v^{(n)})^2 + h^p \sum_{\Omega'} \left\{\sum_{s=1}^{p} \sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha} (D^\alpha_s v^{(k)})^2 + \cdots \right. \tag{4.14}$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}=0}^{m} a_{s_1\alpha_1}\ldots a_{s_{p-1}\alpha_{p-1}} (D^{\alpha_1}_{s_1}\ldots D^{\alpha_{p-1}}_{s_{p-1}} v^{(k)})^2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant h^p \sum_{\Omega'} \left\{\sum_{s=1}^{p} \sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha} (D^\alpha_s \varphi)^2 + \cdots + \left(\frac{\tau}{2}\right)^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}=0}^{m} a_{s_1\alpha_1}\ldots a_{s_{p-1}\alpha_{p-1}} \times \right.$$
$$\left. \times (D^{\alpha_1}_{s_1}\ldots D^{\alpha_{p-1}}_{s_{p-1}} \varphi)^2\right\} + \tau h^p \sum_{Q'} f^{(n)} D_t (v)^{(n)}.$$

В левой части (4.14) оставляем только слагаемые со всеми разностями lm-го порядка, а остальные слагаемые перенесем в правую часть. Коэффициенты в левой части заменяем на их минимум в Q_T, коэффициенты в правой части — на максимум их модуля, и оцениваем квадраты разностей через квадраты старших разностей. Учитывая, что при условиях (4.9) и (4.9′) фигурная скобка в правой части (4.14) ограничена и что

$$\sum_{Q'} f \cdot D_t v^{(n)} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{Q'} [(f)^2 + (D_t v)^2],$$

получаем

$$h^p \sum_{Q'} (D_t v^{(n)})^2 + h^p \sum_{\Omega'} \left\{\sum_{s=1}^{p} (D^m_s v^{(k)})^2 + \tau^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_2} (D^m_{s_1} D^m_{s_2} D^m_{s_3} v^{(k)})^2 + \cdots \right. \tag{4.15}$$
$$\left. \cdots + \tau^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} (D^m_{s_1}\ldots D^m_{s_{p-1}} v^{(k)})^2\right\} \leqslant C_3(T) +$$

$$+ C_4(T) h^p \sum_{\Omega'} \Big\{ \sum_{s=1}^{p} (D_s^{m-1} v^{(k)})^2 + \tau^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_3} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3m-1} (D_{s_1}^{\alpha_1} D_{s_2}^{\alpha_2} D_{s_3}^{\alpha_3} v^{(k)})^2 + \cdots$$

$$\cdots + \tau^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{p-1}=m(p-1)-1} (D_{s_1}^{\alpha_1} \ldots D_{s_{p-1}}^{\alpha_{p-1}} v^{(k)})^2 \Big\},$$

$$C_3(T) = \text{const}.$$

$$C_4(T) = \text{const}.$$

Покажем теперь, как можно оценить слагаемые в правой части (4.15). А именно, докажем справедливость неравенства

$$h^p \sum_{\Omega'} (D_s^{m-1} v^{(k)})^2 \leqslant \varepsilon h^p \sum_{\Omega'} (D_s^m v^{(k)})^2 + C_\varepsilon h^p \sum_{\Omega'} (v^{(k)})^2, \tag{4.16}$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Действительно, (4.16) в силу условий (4.3) и (4.4) можно переписать в виде

$$(-1)^{m-1} h^p \sum_{\Omega'} (v^{(k)}, \overline{D}_s^{m-1} D_s^{m-1} v^{(k)}) \leqslant \varepsilon (-1)^m h^p \sum_{\Omega'} (v^{(k)}, \overline{D}_s^m D_s^m v^{(k)}) + \tag{4.16'}$$

$$+ C_\varepsilon h^p \sum_{\Omega'} (v^{(k)})^2.$$

Если рассмотреть разложения $v^{(k)}$ по синусам в кубе Ω_2: $-1 \leqslant x_s \leqslant 2$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$, содержащем куб Ω,

$$v^{(k)} = \sum_l a_{kl} \sin \frac{l\pi (x_s + 1)}{3},$$

то, учитывая (4.4), получим, что (4.16′) эквивалентно неравенству

$$\sum_l a_{kl}^2 \lambda_l^{2m-2} \leqslant \varepsilon \sum_l a_{kl}^2 \lambda_l^{2m} + C_\varepsilon \sum_l a_{kl}^2. \tag{4.16''}$$

Так как для любого малого $\varepsilon > 0$ и для любого λ можно найти достаточно большое C_ε (не зависящее от λ) такое, что $\lambda^{2m-2} \leqslant \varepsilon \lambda^{2m} + C_\varepsilon$, то (4.16″) справедливо. Следовательно, этим оценка (4.16) установлена. Очевидно, что для других слагаемых имеют место аналогичные оценки:

$$\tau^2 \sum_{\Omega'} (D_{s_1}^{m-1} D_{s_2}^m D_{s_3}^m v^{(k)})^2 \leqslant \tau^2 \varepsilon \sum_{\Omega'} (D_{s_1}^m D_{s_2}^m D_{s_3}^m v^{(k)})^2 + \tau^2 C_\varepsilon \sum_{\Omega'} (D_{s_2}^m D_{s_3}^m v^{(k)})^2.$$

Поэтому, беря ε столь малым, чтобы коэффициент у суммы квадратов разностей $m(2q+1)$-го порядка в правой части (4.15) был меньше $\frac{1}{2}\tau^{2q}$ и учитывая полученную ранее ограниченность $J_t(v^{(k)})$, получаем для $p = 2r$

$$\tau h^p \sum_{\Omega'} (D_t v_{(n)})^2 + h^p \sum_{\Omega'} \Big\{ \sum_{s=1}^{m} (D_s^m v^{(k)})^2 + \tag{4.17}$$

$$+ \tau^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_3} (D_{s_1}^m D_{s_2}^m D_{s_3}^m v^{(k)})^2 + \cdots + \tau^{p-2} {}_{s_1}\Sigma'_{s_{p-1}} (D_{s_1}^m \ldots D_{s_{p-1}}^m v^{(k)})^2 \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C(T) = \text{const}$$

и, соответственно, для $p = 2r + 1$

$$\tau h^p \sum_{Q'} (D_t v^{(n)})^2 + h^p \sum_{\Omega'} \Big\{ \sum_{s=1}^{p} (D_s^m v^{(k)})^2 + \tag{4.17'}$$

$$+ \tau^2 {}_{s_1}\Sigma'_{s_3} (D_{s_1}^m D_{s_2}^m D_{s_3}^m v^{(k)})^2 + \cdots + \tau^{p-1} (D_1^m D_2^m \ldots D_p^m v^{(k)})^2 \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant C(T) = \text{const}.$$

Этим доказательство леммы заканчивается.

4. Для применимости разностных теорем вложения [11], [12] нужно иметь более сильные неравенства, чем (4.17) и (4.17′). Поэтому докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Если для задачи* (2.1) — (2.2) — (2.3) *выполнены условия леммы* 1, *то для последовательности функции* $v_\Delta^{(n)}$, *определенных на точках решетки с помощью метода дробных шагов* (2.4), (2.2′), (2.3), (4.4), *имеют место неравенства*

$$\tau h^p \sum_{Q'} \Big\{ (D_t v^{(n)})^2 + \sum_{s=1}^{p} (D_s' v^{(n)})^2 + (v^{(n)})^2 \Big\} \leqslant \gamma = \text{const}, \tag{4.18}$$

$$h^p \sum_{\Omega'} \Big\{ \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_p \leqslant m} (D_1^{\alpha_1} \ldots D_p^{\alpha_p} v^{(k)})^2 \Big\} \leqslant \gamma = \text{const}. \tag{4.18'}$$

Доказательство. Неравенство (4.18) является тривиальным следствием леммы 1, так как $\tau \sum_{Q'} (D_s^1 v^{(n)})^2$ легко оценивается через $\sum_{\Omega'} (D_s^m v^{(n)})^2$ в силу условий (2.3′), (4.4).

Доказательство (4.18′) проводится так же, как для оценки (4.16), а именно, достаточно получить

$$h^p \sum_{\Omega'} (D_1^{\alpha_1} \ldots D_p^{\alpha_p} v^{(k)})^2 \leqslant \gamma_1 = \text{const}, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = m.$$

Легко проверить, что при условиях (4.4) будет

$$h^p \sum_{\Omega'} (D_1^{\alpha_1} \ldots D_p^{\alpha_p} v^{(k)})^2 = (-1)^m h^p \sum_{\Omega'} (v^{(k)}, \overline{D}_1^{\alpha_1} D_1^{\alpha_1} \ldots \overline{D}_p^{\alpha_p} D_p^{\alpha_p} v^{(k)}) =$$

$$= \sum_{l_1 \ldots l_p} a_{l_1 \ldots l_p}^2 \lambda_1^{2\alpha_1} \ldots \lambda_p^{2\alpha_p}$$

и

$$h^p \sum_{\Omega'} \sum_{s=1}^{p} (D_s^m v^{(k)})^2 = h^p \sum_{l_1 \ldots l_p} a_{l_1 \ldots l_p}^2 \sum_{s=1}^{p} \lambda_s^{2m},$$

где $a_{l_1 \ldots l_p}$ — коэффициенты разложения $v^{(k)}$ по произведениям синусов в кубе Ω_2; $(-\lambda_s^2)$ — собственное значение оператора $\overline{D}_s^1 D_s^1$ для произведения синусов с индексом $l_1 \ldots l_p$.

Но так как

$$\Big(\sum_{s=1}^{p} \lambda_s^2 \Big)^m \leqslant p^m \sum_{s=1}^{p} \lambda_s^{2m},$$

то из ограниченности

$$h^p \sum_{\Omega'} \sum_{s=1}^{p} (D_s^m v^{(k)})^2$$

следует ограниченность

$$\sum_{\Omega'} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_p=m} (D_1^{\alpha_1} \ldots D_p^{\alpha_p} v^{(k)})^2,$$

а следовательно, и справедливость (4.18′).

Сформулируем теперь теорему, которая является следствием теорем из работы [12] (гл. 1, § 6).

Теорема 5. *Пусть для заданной последовательности функций v_Δ, определенных на точках решетки $Q'_{h,T}$, выполнены неравенства* (4.18) *и* (4.18′). *Обозначим через $(v_\Delta)'$ полилинейную по $x_1, x_2, \ldots, x_p, t$ функцию, совпадающую на точках решетки с v_Δ. Тогда существует последовательность $v_{\Delta\beta}$, для которой*

1) функции $(D_t v_{\Delta\beta})'$ и $(D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_p^{\alpha_p} v_{\Delta\beta})'$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = m$, сходятся слабо, соответственно, в Q_T и Ω_t к функциям u_t и $u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$;

2) функции $(D_1^{\alpha_1} D_q^{\alpha_2} \ldots D_p^{\alpha_p} v_{\Delta\beta})'$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p \leqslant m, -1$, сходятся в $L_2(\Omega_t)$ к $u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$;

3) предельные функции обладают свойствами:

$$u = u_{0,0\ldots0} \in W_2^{(1)}(Q_T), \qquad \|u\|_{W_2^{(1)}(Q_T)} \leqslant C(\gamma),$$

$$u \in W_2^{(m)}(\Omega_t), \qquad \|u\|_{W_2^{(m)}(\Omega_t)} \leqslant C(\gamma)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t, \qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}} = u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \leqslant m.$$

5. Для доказательства сходимости к обобщенному решению (2.1) — (2.2) — (2.3) нам еще потребуется следующая

Лемма 2. *Пусть:*

1) $\varphi \in D_{2m}^p(c)$ *и при каждом* t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ $f \in D_{2m}^p(c)$;

2) *функции* φ *и* f *вместе со всеми производными до* $(2m-1)$*-го порядка по* x_s $(s = 1, 2, \ldots, p)$ *обращаются в нуль, соответственно, на границе* Ω *и* Q_T.

Тогда при любом n $(n \leqslant T/\tau)$ *будет*

$$h^p \sum_{\Omega_t} (L_{s_1}^h L_{s_2}^h \ldots L_{s_l}^h v^{(n)})^2 \leqslant C_5(T) = \text{const}, \quad i = 1, 2, \ldots p;$$

$$s_i \neq s_j \text{ при } i \neq j, \; s_i = 1, 2, \ldots, p.$$

Доказательство. Рассмотрим, как в § 2, разложения $v^{(n+1)}$, $v^{(n)}$ и $f^{(n)}$ по собственным функциям операторов L_s^h $(s = 1, 2, \ldots, p)$:

$$v^{(n+1)} = \sum_{k_1\ldots k_p} a_{k_1\ldots k_p}^{(n+1)} \bar{\psi}_{k_1\ldots k_p};$$

$$v^{(n)} = \sum_{k_1\ldots k_p} a_{k_1\ldots k_p}^{(n)} \bar{\psi}_{k_1\ldots k_p};$$

$$f^{(n)} = \sum_{k_1\ldots k_p} b_{k_1\ldots k_p}^{(n)} \bar{\psi}_{k_1\ldots k_p}.$$

Обозначения здесь такие же, как в § 2.

Тогда в силу (2.6) имеем

$$a^{(n+1)}_{k_1\ldots k_p} = \frac{\prod\limits_{s=1}^{p}\left(1-\frac{\tau}{2}(\lambda^{(s)}_{k_s})^2\right)}{\prod\limits_{s=1}^{p}\left(1+\frac{\tau}{2}(\lambda^{(s)}_{k_s})^2\right)} a^{(n)}_{k_1\ldots k_p} + \frac{\tau}{\prod\limits_{s=1}^{p}\left(1+\frac{\tau}{2}(\lambda^{(s)}_{k_s})^2\right)} b^{(n)}_{k_1\ldots k_p}.$$

В разложении $L^h_{s_1}L^h_{s_2}\ldots L^h_{s_l}v^{(n+1)}$ коэффициент при $\overline{\psi}_{k_1\ldots k_p}$ будет $a^{(n+1)}_{k_1\ldots k_p} = (-1)^l(\lambda^{(s_1)}_{k_{s_1}})^2\ldots(\lambda^{(s_l)}_{k_{s_l}})^2 a^{(n+1)}_{k_1\ldots k_p}$.

В силу условий леммы имеем

$$\sum_{k_1\ldots k_p}(\lambda^{(s_1)}_{k_s})^4\ldots(\lambda^{(s_l)}_{k_{s_l}})^4(a^{(0)}_{k_1\ldots k_p})\leqslant C_6, \qquad \sum_{k_1\ldots k_p}(\lambda^{(s_1)}_{k_{s_1}})^4\ldots(\lambda^{(s_l)}_{k_{s_l}})^4(b^{(n)}_{k_1\ldots k_p})^2\leqslant C_6.$$

Поэтому

$$\sum_{k_1\ldots k_p}(d^{(n+1)}_{k_1\ldots k_p})^2\leqslant C_5(T) = \text{const},$$

и лемма доказана.

Теперь мы имеем все необходимое для доказательства сходимости метода дробных шагов.

6. Теорема 6. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда при* $\tau\to 0$ *и* $h\to 0$ *последовательности* $(v_\Delta)'$, $(D_t v_\Delta)'$, $(D_1^{\alpha_1},\ldots,D_p^{\alpha_p}v_\Delta)'$ *в смысле, указанном в теореме* 5, *стремятся к обобщенному решению и к соответствующим производным обобщенного решения.*

Доказательство. При выполнении условий леммы 2 неравенства (4.18), (4.18′) справедливы. Поэтому теорема 5 имеет место. Докажем, что функция u, получаемая по этой теореме, как предел подпоследовательности $(v_{\Delta\beta})'$ при $\tau\to 0$ и $h\to 0$, есть обобщенное решение задачи (2.1) — (2.2) — (2.3).

Для этого осталось проверить, что u удовлетворяет условиям 3), 4), 5) из определения обобщенного решения.

Функции $(D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\ldots D_p^{\alpha_p}v_\Delta)'$ при $\alpha_1+\alpha_q+\cdots+\alpha_p\leqslant m-1$ суть элементы пространства $W_2^{(1)}(\Omega_t)$, обращающиеся в нуль вблизи границы. Поэтому по теореме о полной непрерывности оператора вложения (см. [11]) предельные функции $\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_p}u/\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_p^{\alpha_p}$ будут обращаться в нуль на S, и поэтому условие 3) выполнено.

Условие 4) удовлетворяется, так как функции $(v_\Delta)'$ суть элементы пространства $W_2^{(1)}(Q_T)$ и в силу этого равностепенно непрерывны в целом в $L_2(\Omega_t)$ [11].

Для проверки условия 5) достаточно получить (4.1) для любой функции Φ, имеющей обычные производные до m-го порядка по $x_1, x_2, \ldots, x_p$, первого порядка по t и обращающейся в нуль вблизи S, так как любая функция $\overline{\Phi}$ из класса допустимых может быть получена как предел таких гладких функций Φ.

Возьмем любую функцию Φ, умножим (4.2) и (4.2′) на $\tau h^p(\Phi(n+1)+$

$+\Phi(n))/2$ и просуммируем полученные равенства по $Q_{h,T}$. Получим

$$\tau h^p \sum_{Q_T}\left\{D_t v^{(n)}\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}-\sum_{s=1}^{p} L_s^h\left(\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{2}\right)\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}\right\}+ \tag{4.19}$$

$$+\tau[\ ]=\tau h^p\sum_{Q_T} f^{(n)}\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2},$$

где квадратная скобка обозначает сумму слагаемых с

$$L_{s_1}^h L_{s_2}^h\ldots L_{s_{2l}}^h(v^{(n+1)}-v^{(n)}) \text{ и } L_{s_1}^h L_{s_2}^h\ldots L_{s_{2l+1}}^h(v^{(n+1)}+v^{(n)}).$$

Как нетрудно проверить, в силу леммы 2 выражение, стоящее в квадратной скобке, будет ограничено в $L_2(Q_T)$. Учитывая, что Φ при малом h удовлетворяет (2.2), равенство (4.19) можно преобразовать к виду

$$\tau h^p\sum_{Q_T}\left\{D_t v^{(n)}\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}-\sum_{s=1}^{p}\sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha} D_s^\alpha\left(\frac{v^{(n+1)}v^{(n)}}{2}\right) D_s^\alpha\left(\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}\right)\right\}+$$

$$+\tau[\ ]=\tau h^p\sum_{Q_T} f\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}. \tag{4.20}$$

Из теоремы 5, так же как в [12], можно установить, что при $\tau\to 0$ и $h\to 0$ будет

$$\tau h^p\sum_{Q_T} f\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}\to\int_{Q_T} f\Phi dQ,\qquad \tau h^p\sum_{Q_T} D_t v^{(n)}\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}\to\int_{Q_T}\frac{\partial u}{\partial t}\Phi dQ.$$

В теореме 5 говорилось лишь о компактности $(D_1^{\alpha_1}\ldots D_p^{\alpha_p} v_\Delta^{(n)})'$, но нетрудно проверить, что все в этой теореме применимо и к $(D_1^{\alpha_1}\ldots D_p^{\alpha_p}(v_\Delta^{(n+1)}+v_\Delta^{(n)}))'$. Поэтому

$$\tau h^p\sum_{Q_T}\sum_{s=1}^{p}\sum_{\alpha=0}^{m} a_{s\alpha} D_s^\alpha\left(\frac{v^{(n+1)}+v^{(n)}}{2}\right) D_s^\alpha\left(\frac{\Phi^{(n+1)}+\Phi^{(n)}}{2}\right)\to$$

$$\to\int_{Q_T}\sum_{s=1}^{p}\sum_{\alpha=0}^{m}\alpha_{s\alpha}\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_s^\alpha}\frac{\partial^\alpha\Phi}{\partial x_s^\alpha}dQ.$$

Слагаемое $\tau[\ ]$, очевидно, стремится к нулю при $\tau\to 0$. Следовательно, в пределе из (4.20) мы получим как раз (4.1), что и было необходимо.

В силу единственности обобщенного решения задачи (2.1) — (2.2) — (2.3) нетрудно проверить, что сходимость к нему имеет место при $\tau\to 0$, $h\to 0$ не только для $(v_{\Delta\beta})'$, но и для всей последовательности v_Δ.

Таким образом, доказана сходимость дискретных функций, получаемых по методу дробных шагов, к обобщенному решению задачи (2.1) — (2.2) — (2.3), причем нигде ограничений типа $\tau/h^{2m}<c$, как это имеет место для явной схемы, не делалось. Для неявной схемы тоже можно получить сходимость к обобщенному решению без таких ограничений [13], но объем вычислительной работы при неявной схеме будет несравненно бо́льшим, чем при методе дробных шагов.

Замечание 1. Если вместо схемы (2.4) рассматривается несколько более общая схема

$$\frac{v^{(n+s/p)}-v^{[n+(s-1)/p]}}{\tau}=\sigma_s L_s^h v^{(n+s/p)}+(1-\sigma_s)L_s^h v^{[n+(s-1)/p]}\ (s=1,2,\ldots,p-1),$$

$$\frac{v^{(n+1)}-v^{[n+(p-1)/p]}}{\tau}=\sigma_p L_p^h v^{(n+1)}+(1-\sigma_p)L_p^h v^{[n+(p-1)/p]}+T^h f^{(n)},$$

$$T^h = \left\{\prod_{s=1}^{p-1} (E - \tau\sigma_s L_s^h)\right\}^{-1}, \quad 0 \leqslant \sigma_s \leqslant 1,$$

то все результаты § 2, 3 и 4 полностью переносятся на случай $\frac{1}{2} \leqslant \sigma_s \leqslant 1$, причем существенное усложнение выкладок возникает лишь в § 4, а в теореме 2 вместо $O(\tau^2)$ будет стоять $O(\tau)$, если $\sigma_s \neq \frac{1}{2}$.

Замечание 2. Все результаты легко переносятся на случай сетки

$$(x_s)_{i_s} = i_s h_s \quad (s = 1, 2, \ldots, p),$$

когда $\overline{\Omega}$ есть p-мерный параллелепипед.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Самарскому за ценные указания по редактированию статьи.

Поступила в редакцию
27.09.1961

Цитированная литература

1. D. Peaceman, H. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, **3**, № 1, 28—41.
2. J. Douglas, H. Rachford. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 2, 421—439.
3. Н. Н. Яненко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1207—1210.
4. Н. Н. Яненко, В. А. Сучков, Ю. Я. Погодин. О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 5, 903—905.
5. Н. Н. Яненко. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов). Докл. АН СССР, 1960, **134**, № 5, 1034—1036.
6. В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1956.
7. Е. Г. Дьяконов. Метод переменных направлений решения систем конечно-разностных уравнений. Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 2, 271—274.
8. Е. Г. Дьяконов. Об одном итерационном способе решения систем конечно-разностных уравнений. Докл. АН СССР, 1961, **138**, № 3, 522—525.
9. И. М. Гельфанд, А. С. Фролов, Н. Н. Ченцов. Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло. Изв. высш. учебн. заведений. Сер. матем., 1958, № 5, 32—45.
10. J. Douglas, T. Gallie. Variable time steps in the solution of the heat flow equation by a difference equation. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 787—793.
11. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
12. О. А. Ладыженская. Смешанная задача для гиперболического уравнений, М.— Л., Гостехиздат, 1953.
13. О. А. Ладыженская. О решении нестационарных операторных уравнений. Матем. сб., 1956, **39**, вып. 4, 491—524.
14. О. А. Ладыженская. О решении нестационарных операторных уравнения и их приложениях к линейным задачам математической физики. Матем. сб., 1958, **45**, вып. 2, 123—158.
15. M. Lees. Energy inequalities for the solution of differential equations. Trans. Amer. Math. Soc., 1960, **94**, 58—73.
16. M. Lees. Approximate solutions of parabolic equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, **7**, 167—183.
17. А. А. Самарский. Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—460.