

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. К. Мартинсон, К. В. Морозов, Моделирование эволюции температурных полей в неоднородных средах, *Матем. моделирование*, 2004, том 16, номер 9, 72–82

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

23 марта 2025 г., 13:31:22



**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ  
В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ**

© Л.К. Мартинсон, К.В. Морозов

МГТУ им. Н.Э. Баумана

Рассмотрен эффективный алгоритм расчёта нестационарных температурных полей в неоднородных средах с изменяющимся коэффициентом теплопроводности (в качестве таких сред могут рассматриваться и композитные материалы с кусочно-постоянным значением коэффициента теплопроводности в различных областях). Представлены численные расчёты для ряда модельных задач.

**SIMULATION OF EVOLUTION OF TEMPERATURE FIELDS IN NON-UNIFORM MEDIA***L.K. Martinson, K.V. Morozov*

BMSTU

An efficient calculation algorithm is considered for non-stationary temperature fields in non-uniform media with varying coefficient of thermal conduction (for such media the composite materials with piecewise constant values of thermal conduction coefficient in various areas can be considered as well). Numerical calculations are presented for a number of simulation tasks.

**1. Введение**

Широкий класс прикладных проблем механики сплошных сред связан с решением задач для уравнений параболического типа с переменными коэффициентами. Сюда, прежде всего, относятся задачи о нахождении нестационарных температурных полей в средах, теплофизические характеристики которых не являются постоянными, а изменяются как функции координат. Такая неоднородность среды по теплофизическим параметрам может быть обусловлена как конструктивными особенностями исследуемого объекта, изготовленного из разнородных или композитных материалов, так и наличием в среде посторонних включений, примесей, пустот и т.п. [1].

В таких задачах коэффициенты дифференциальных уравнений могут существенно изменяться, что приводит к появлению в расчётных областях локальных зон с большими градиентами искомых функций. Поэтому численное решение таких задач с применением стандартных разностных схем наталкивается на определённые трудности. Использование же специальных, адаптированных к конкретному виду неоднородностей сеток с переменным шагом [2,3] делает метод решения задач менее универсальным.

В настоящей работе для решения задач нестационарной теплопроводности в неоднородных средах используется модификация метода, предложенного в [4,5]. При этом приближенное решение задачи после дискретизации по временной переменной ищется на каждом временном слое в аналитической форме разложения в ряд Фурье, коэффициенты которого находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Эта система допускает применение метода редукции, т.е. усечения её до СЛАУ конечного порядка. Предложенный метод достаточно универсален и не требует специальной адаптации к различным типам неоднородностей, включая кусочно-непрерывные.

**2. Математическая модель процесса**

Рассмотрим двумерную прямоугольную область  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ , ограниченную контуром  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  (см. рис.1). Пусть  $M = M(x, y)$  – внутренняя точка области  $\Omega$ , а  $P$  – точка границы.

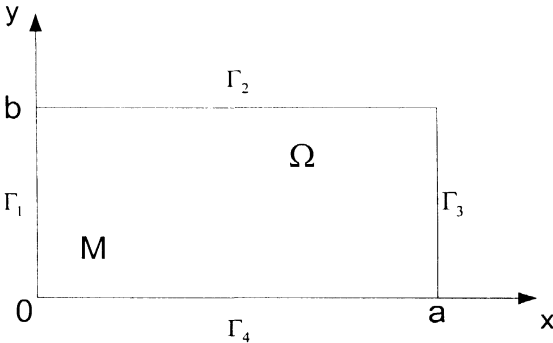


Рис.1.

Математическая модель процесса нестационарной теплопроводности в неоднородной среде, заполняющей область  $\Omega$ , при наличии в ней объёмно распределённых источников и заданных на границе  $\Gamma$  тепловых потоков запишется в виде следующей краевой задачи для параболического уравнения с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} C(M) \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}[\lambda(M) \text{grad } u] + f(M, t), & M \in \Omega, t \in [0, T), \\ -\lambda(P) \text{grad } u \cdot \mathbf{n} = Q(P, t), & P \in \Gamma = \bigcup_{m=1}^4 \Gamma_m, \\ u(M, 0) = u_0(M), & M \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $u(M, t) = u(x, y, t)$  – искомое нестационарное поле температур, известное в начальный момент времени  $t = 0$ , а  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к контуру  $\Gamma$ .

Теплоёмкость  $C(M) = C(x, y)$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda(M) = \lambda(x, y)$  неоднородной среды считаем заданными функциями координат.

Распределение объёмных тепловых источников в среде  $f(M, t) = f(x, y, t)$  известно в любой момент времени, а тепловые потоки определены на каждом участке границы  $\Gamma$ , т.е.  $Q = Q_m(P, t)$ , если  $P \in \Gamma_m, m = 1, 2, 3, 4$ .

В задаче (1) всегда можно перейти к безразмерным функции и переменным путём нормировки на характерные пространственные и временные масштабы, связанные с характерными значениями температуры  $u_0$  (или потока  $Q_0$ ), теплоёмкости  $C_0$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda_0$ .

**3. Метод решения задачи**

Разбив временную ось с помощью системы точек  $t_k = \tau k, k = 0, 1, 2, \dots$  с шагом  $\tau > 0$ , проведём дискретизацию задачи (1) по временной переменной, заменив производную по времени её дискретным аналогом

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=t_k} \cong \frac{u_k(x, y) - u_{k-1}(x, y)}{\tau}, \quad (2)$$

где  $u_k(x, y)$  – приближенное значение  $u(x, y, t)$  в задаче (1) при  $t = t_k$ . При этом все функции в задаче (1) заменим их средними по времени на дискретных интервалах времени.

Такой подход, известный как метод Рунге, в случае ограниченности и равномерной параболичности дифференциального оператора в уравнении (1), позволяет находить последова-

тельность функций  $u_k(x, y)$  для  $k=1, 2, \dots$ , сходящихся при  $\tau \rightarrow 0$  к точному решению задачи (1) [6]. Предполагаем, что в рассматриваемой задаче все требуемые свойства дифференциального оператора выполнены.

После дискретизации по временной переменной задача (1) сводится к итерационной последовательности ( $k=1, 2, \dots, K$ ) задач для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{cases} \operatorname{div}[\lambda(M) \operatorname{grad} u_k] - \tau^{-1} C(M) u_k = F_k(M), & M \in \Omega, \\ -\lambda(P) \operatorname{grad} u_k \cdot \mathbf{n} = Q_k(P), & P \in \Gamma. \end{cases} \quad (3)$$

На каждом  $k$ -м шаге рассматриваемого итерационного процесса правая часть уравнения

$$F_k(x, y) = \tau^{-1} C(x, y) u_{k-1}(x, y) - f_k(x, y) \quad (4)$$

является известной функцией координат, если считать, что решение  $u_{k-1}(x, y)$  на предыдущем временном слое уже определено. Для первого шага  $u_0(x, y)$  совпадает с начальным распределением температуры в задаче (1).

Введём полную ортогональную в  $\Omega$  систему тригонометрических функций

$$Z_{ij}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \cos \mu_i x \cos \nu_j y, \quad (5)$$

где  $\mu_i = \frac{i\pi}{a}$ , а  $\nu_j = \frac{j\pi}{b}$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots$

Решение задачи (3)  $u_k(x, y)$  будем искать в виде разложения в двойной тригонометрический ряд Фурье:

$$u_k(x, y) = \sum_{i, j=0}^{\infty} \delta_{ij} a_{ij}^{(k)} Z_{ij}(x, y). \quad (6)$$

Здесь  $\delta_{ij} = \delta_i \delta_j$ , а

$$\delta_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i = 0, \\ 1, & i > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Коэффициенты ряда (6) определяются по правилу

$$a_{ij}^{(k)} = \iint_{\Omega} u_k(x, y) Z_{ij}(x, y) dx dy = (u_k, Z_{ij})_{\Omega}. \quad (8)$$

Здесь и далее скалярное произведение двух функций в  $\Omega$  будем изображать круглыми скобками.

Будем считать, что заданные функции  $C(x, y)$  и  $\lambda(x, y)$ , описывающие неоднородные свойства среды, а также функции  $f_k(x, y)$  и  $F_k(x, y)$  также могут быть разложены в ряды вида (6) с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_{ij} &= (C, Z_{ij})_{\Omega}, & \lambda_{ij} &= (\lambda, Z_{ij})_{\Omega}, \\ f_{ij}^{(k)} &= (f_k, Z_{ij})_{\Omega}, & F_{ij}^{(k)} &= (F_k, Z_{ij})_{\Omega}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для нахождения искоемых коэффициентов  $a_{ij}^{(k)}$  в разложении (6) умножим скалярно

правую и левую части уравнения в (3) на  $Z_{mn}(x, y)$ . В результате получим

$$\iint_{\Omega} \{ \operatorname{div}[\lambda(M) \operatorname{grad} u_k] - \tau^{-1} C(M) u_k \} Z_{mn} d\Omega = F_{mn}^{(k)} \quad (10)$$

Равенство (10) можно преобразовать к виду

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}[Z_{mn} \lambda(M) \operatorname{grad} u_k] Z_{mn} d\Omega - \iint_{\Omega} \lambda(M) \operatorname{grad} u_k \operatorname{grad} Z_{mn} d\Omega - \tau^{-1} \iint_{\Omega} C(M) u_k d\Omega = F_{mn}^{(k)} \quad (11)$$

Первое слагаемое в левой части (11) по формуле Остроградского сводится к интегралу по контуре:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Omega} \operatorname{div}[Z_{mn} \lambda(M) \operatorname{grad} u_k] Z_{mn} d\Omega = \int_{\Gamma} Z_{mn} \lambda(P) \operatorname{grad} u_k \mathbf{n} d\Gamma = \\ &= \sqrt{\frac{4}{ab}} \int_0^b \{ (-1)^m Q_3^{(k)}(y) - Q_1^{(k)}(y) \} \cos \nu_n y dy + \sqrt{\frac{4}{ab}} \int_0^a \{ (-1)^n Q_4^{(k)}(x) - Q_2^{(k)}(x) \} \cos \mu_m x dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} q_{mn}^{(k)} + \sqrt{\frac{2}{b}} p_{mn}^{(k)} = \gamma_{mn}^{(k)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $q_{mn}^{(k)}$  и  $p_{mn}^{(k)}$  – коэффициенты Фурье разложения функций  $q_m^{(k)}(y) = (-1)^m Q_3^{(k)}(y) - Q_1^{(k)}(y)$  и  $p_n^{(k)}(x) = (-1)^n Q_4^{(k)}(x) - Q_2^{(k)}(x)$  в тригонометрические ряды по полным и ортогональным на отрезках  $(0, b)$  и  $(0, a)$  системам функций  $\{\cos \nu_n y\}$  и  $\{\cos \mu_m x\}$ .

Второе слагаемое в левой части (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\Omega} \lambda(x, y) \left\{ \frac{\partial u_k}{\partial x} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial y} \right\} d\Omega = \iint_{\Omega} \lambda(x, y) \sum_{i,j=0}^{\infty} \delta_{ij} a_{ij}^{(k)} \left[ \frac{\partial Z_{ij}}{\partial x} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial x} + \frac{\partial Z_{ij}}{\partial y} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial y} \right] d\Omega = \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \delta_{ij} a_{ij}^{(k)} \iint_{\Omega} \lambda(x, y) \left[ \frac{\partial Z_{ij}}{\partial x} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial x} + \frac{\partial Z_{ij}}{\partial y} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial y} \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Проведя простые тригонометрические преобразования, можно показать, что выполняются следующие правила перемножения функций:

$$\begin{aligned} Z_{ij} Z_{mn} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{4}{ab}} (\hat{P}_+^{ij} + \hat{R}_+^{ij}) Z_{mn}, \\ \frac{\partial Z_{ij}}{\partial x} \frac{\partial Z_{imn}}{\partial x} &= \frac{\mu_i \mu_m}{4} \sqrt{\frac{4}{ab}} (\hat{P}_-^{ij} + \hat{R}_-^{ij}) Z_{mn}, \\ \frac{\partial Z_{ij}}{\partial y} \frac{\partial Z_{imn}}{\partial y} &= \frac{\nu_j \nu_n}{4} \sqrt{\frac{4}{ab}} (\hat{P}_+^{ij} - \hat{R}_+^{ij}) Z_{mn}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\hat{P}_{\pm}^{ij}$  и  $\hat{R}_{\pm}^{ij}$  – операторы сдвига индексов, действующие на произвольный двумерный массив  $\sigma_{mn}$  по правилу

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\pm}^{ij} \sigma_{mn} &= \sigma_{i+m, n+j} \pm \sigma_{i-m, n+j}, \\ \hat{R}_{\pm}^{ij} \sigma_{mn} &= \sigma_{i-m, j-n} \pm \sigma_{i-m, j+n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь соотношение (13) можно записать в виде

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{4ab}} \sum_{i,j=0}^{\infty} \delta_{ij} a_{ij}^{(k)} [\mu_i \mu_m (\hat{P}_-^{ij} + \hat{R}_-^{ij}) \lambda_{mn} + \nu_j \nu_n (\hat{P}_+^{ij} - \hat{R}_+^{ij}) \lambda_{mn}] \quad (16)$$

Аналогично, для третьего слагаемого в левой части (11) получим

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\Omega} C(M) u_k Z_{mn} d\Omega = \iint_{\Omega} C(M) \sum_{i,j=0}^{\infty} \delta_{ij} a_{ij}^{(k)} Z_{ij} Z_{mn} d\Omega = \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \delta_{ij} a_{ij}^{(k)} \iint_{\Omega} C(M) Z_{ij} Z_{mn} d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4ab}} \sum_{i,j=0}^{\infty} \delta_{ij} a_{ij}^{(k)} (\hat{P}_+^{ij} + \hat{R}_+^{ij}) c_{mn}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, с учётом (13), (16) и (17) соотношение (11) запишется в виде

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} Q_{mnij} a_{ij}^{(k)} = d_{mn}^{(k)}, \quad (18)$$

где

$$Q_{mnij} = \frac{\delta_{mn}}{2\sqrt{ab}} \left\{ \mu_i \mu_m (\hat{P}_-^{ij} + \hat{R}_-^{ij}) \lambda_{mn} + \frac{\nu_n \nu_j}{4} (\hat{P}_+^{ij} - \hat{R}_+^{ij}) \lambda_{mn} + \tau^{-1} (\hat{P}_+^{ij} + \hat{R}_+^{ij}) c_{mn} \right\} \quad (19)$$

и

$$d_{mn}^{(k)} = \gamma_{mn}^{(k)} - F_{mn}^{(k)}. \quad (20)$$

Приведём (17) к стандартному виду бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Для этого паре индексов  $(i, j)$  поставим в соответствие один индекс  $s$  по правилу

$$s = \begin{cases} j^2 + i + 1, & i < j \\ (i + 1)^2 - j, & i \geq j. \end{cases} \quad (21)$$

Это правило соответствует обходу массива по квадратам и наглядно иллюстрируется следующей таблицей:

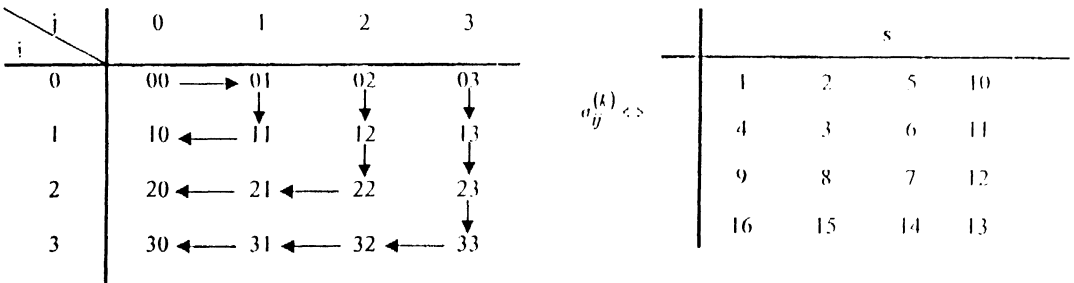


Рис.2.

Преобразование  $(i, j) \rightarrow s$  однозначно и имеет обратное преобразование  $s \rightarrow (i, j)$ . Аналогично устанавливается соотношение  $(m, n) \rightarrow r$  по такому же правилу.

Таким образом, искомое решение  $u_k(x, y)$  представлено в виде ряда

$$u_k(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \delta_s a_s^{(k)} Z_s(x, y) \quad (22)$$

с коэффициентами  $a_s^{(k)}$ , которые находятся из решения бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{\infty} Q_{rs} a_s^{(k)} = d_r^{(k)}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

#### 4. Алгоритм расчёта

Так как дифференциальный оператор в уравнении (3) является положительно определённым и самосопряжённым, то бесконечная система (23) допускает редукцию [4], когда её приближенное решение  $\tilde{a}_s^{(k)}$  может быть найдено из решения СЛАУ  $N$ -го порядка, полученной усечением бесконечной системы (23). В этом случае при суммировании ряда (22) следует считать, что все  $a_s^{(k)} = 0$  для  $s > N$ , т.е. ряд (22) следует оборвать на  $N$ -м члене. При этом в  $l_2$  имеет место сходимость приближенного решения к точному при  $N \rightarrow \infty$ . Заметим, что такую сходимость можно доказать также, используя стандартные схемы доказательства сходимости метода Галёркина.

Таким образом, построен простой алгоритм нахождения приближенного решения задачи (1) на любом временном слое  $t = t_k = k\tau$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  в виде тригонометрического ряда

$$u(x, y, t_k) \cong \tilde{u}_k(x, y) = \sum_{s=1}^N \delta_s \tilde{a}_s^{(k)} Z_s(x, y) \quad (24)$$

с коэффициентами  $\tilde{a}_s^{(k)}$ , которые находятся из решения СЛАУ  $N$ -го порядка с известными коэффициентами и правой частью

$$\sum_{s=1}^N Q_{rs} \tilde{a}_s^{(k)} = d_r^{(k)}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (25)$$

С уменьшением шага дискретизации по времени  $\tau$  и увеличением порядка  $N$  редуцированной системы точность найденного приближенного решения повышается.

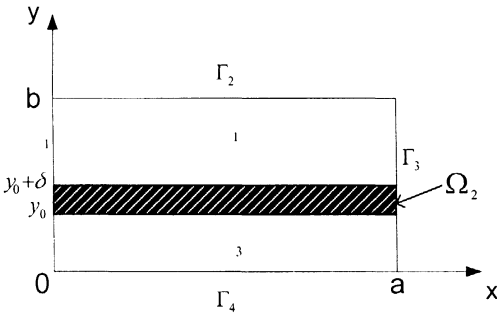


Рис.3.

Предложенный алгоритм легко реализуется на ЭВМ с использованием стандартных подпрограмм нахождения коэффициентов Фурье табулированных функций и решения СЛАУ. Определённого уменьшения времени счёта можно добиться при использовании схем быстрого преобразования Фурье [7]. Блок-схема программного комплекса, реализующего данный алгоритм, приведена на рис.2.

5. Анализ точности

Апостериорные оценки точности полученного приближенного решения задачи (1) можно проделать на основе методов, изложенных в [8]. Однако в рассматриваемой задаче оценку точности приближенного решения можно получить следующим оригинальным способом.



Пусть прямоугольная область  $\Omega$  разделена на две подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  достаточно узкой полоской  $\Omega_2 = \{(x, y): 0 < x < a, y_0 < y < y_0 + \delta\}$ , шириной  $\delta$  (рис.4). Будем считать, что среда в полоске  $\Omega_2$  нетеплопроводная, т.е.

Рис.4.

$$\lambda(M) = \begin{cases} \lambda_0 = \text{const}, & M \in \Omega_1 \cup \Omega_3 \\ 0, & M \in \Omega_2 \end{cases} \tag{26}$$

Рассмотрим случай, когда три стенки области  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  теплоизолированы, а через стенку  $\Gamma_2$  поступает тепловой поток, т.е.  $Q_2(x, t) = q_0 = \text{const}$ .

Тогда при нулевом начальном распределении температуры  $u_0(x, y) = 0$  полоска  $\Omega_2$  полностью перекроет тепловой поток из области  $\Omega_1$  в область  $\Omega_3$ , и в области  $\Omega_3$  в любой момент времени температура должна оставаться равной нулю. Поэтому для такой физической постановки задачи отличие найденного приближенного решения  $\tilde{u}_k(x, y)$  от нуля в области  $\Omega_3$  может характеризовать погрешность метода.

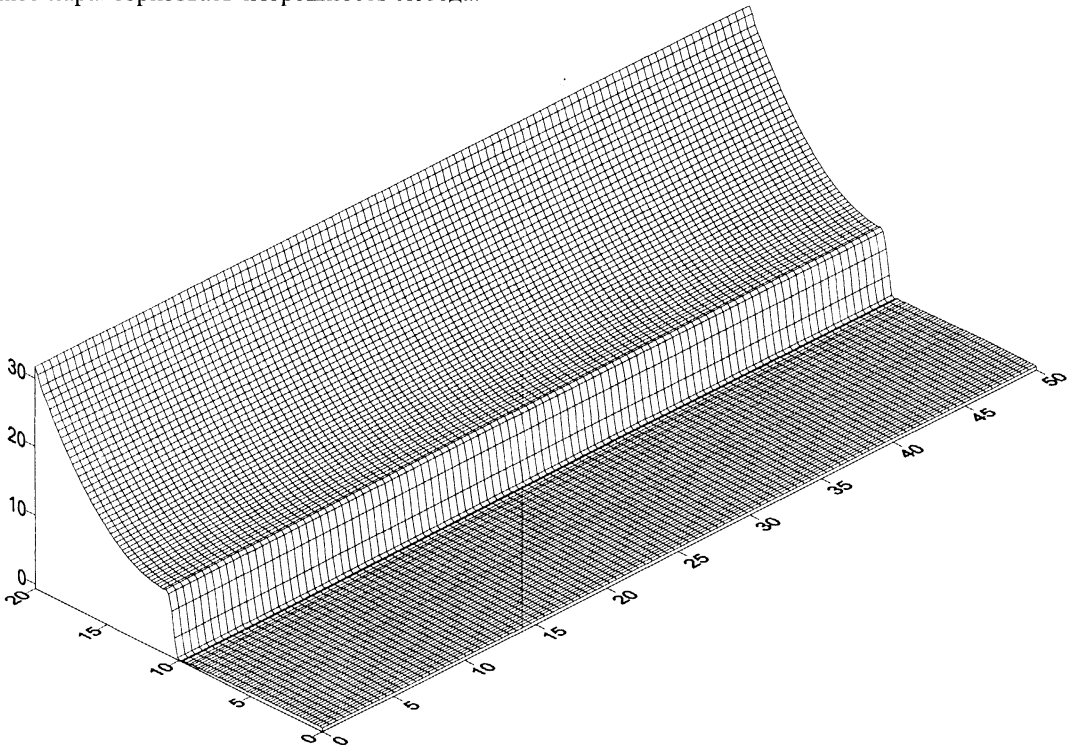


Рис.5.



Распределение температуры, рассчитанное для одного из моментов времени в такой задаче ( $a = 50, b = 20, y_0 = 8, \delta = 2$ ) представлено на рис.5. Из рисунка видна предсказанная теплоизоляция области  $\Omega_3$ . Для оценки погрешности приближенного решения выберем величину  $\Delta = \max u(M)$  на линии  $y = y_0/2$ .

В табл.1 приведены значения  $\Delta$  в зависимости от числа  $N$  членов ряда (24) приближенного решения с коэффициентами  $\tilde{a}_s^{(k)}$ , найденными из редуцированной системы (25). Для вычислений был выбран фиксированный шаг  $\tau = 0.05$  дискретизации по временной переменной, а погрешность  $\Delta$  оценивалась для  $k = 60$ .

Т а б л и ц а 1.

Зависимость погрешности решения от  $N$

$N$	10	20	30	40	50	60
$\Delta_{cp}$	0.61	0.60	0.35	0.30	0.10	0.00

Как видно из таблицы, погрешность решения  $\tilde{u}_k(M)$  при  $N > 40$  не превышает нескольких процентов.

В табл.2 приведены результаты исследования сходимости решения в зависимости от выбранного временного шага  $\tau$  при фиксированном порядке редукции  $N = 60$ . Значения  $\Delta$  вычислялись для момента времени  $t = 3$ .

Приведённые расчёты показывают, что уменьшением шага дискретизации  $\tau$  и увеличением порядка редукции  $N$  можно достичь достаточно высокой точности приближенного решения

Т а б л и ц а 2.

Зависимость погрешности решения от  $\tau$ .

$\tau$	1	0.5	0.2	0.1	0.05
$\Delta_{cp}$	0.08	0.04	0.03	0.01	0.00

### 6. Результаты расчётов

Описанный выше алгоритм решения задачи (1) был использован для расчёта нестационарных температурных полей в неоднородных средах. Приведём некоторые результаты расчётов для ряда модельных задач.

Предложенный метод позволяет находить решения задач вида (1) и для уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. С физической точки зрения это означает возможность исследования эволюции температурных полей в композитных средах.

На рис.7 приведены результаты расчёта температурного поля в некоторый момент времени для композитного материала, содержащего два включения прямоугольной формы, коэффициент теплопроводности которых в 10 раз меньше, чем в остальной части расчётной области (матрице). Три границы области  $\Gamma_1, \Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  теплоизолированы, а граница  $\Gamma_2$  содержит тепловой контакт конечной ширины (на рис.7 контакт выделен стрелками), через который в область поступает постоянный тепловой поток.

Изображённое на рис.7 поле изотерм обладает симметрией относительно линии  $x = 25$ , связанной с физической постановкой задачи, и этот результат подтверждает эффективность расчётного алгоритма. На рисунке видно, как наличие слабо теплопроводящих включений изменяет картину изотерм, которые на границах включений претерпевают излом, обусловленный различием коэффициентов теплопроводности матрицы и включений. Хорошо заметно различие скоростей распространения тепловых возмущений в областях с различными коэффициентами теплопроводности.

На рис.8 приведены результаты расчёта температурного поля в описанном выше компо-

зитном материале в случае, когда тепловой контакт на границе  $\Gamma_2$  движется с постоянной скоростью вдоль границы. Видно, как движение теплового контакта изменяет картину температурного поля в композитном материале.

Заметим, что предложенный метод решения позволяет рассматривать композитный материал с включениями, коэффициент теплопроводности которых равен нулю. Такие идеально теплонепроницаемые включения с  $\lambda=0$  могут моделировать дефекты материала типа пустот.

Кроме того, с помощью таких включений можно реализовать метод фиктивных областей [9] для расчёта температурных полей в областях сложной непрямоугольной формы. Действительно, теплонепроводящее включение – фиктивная область  $\Omega_\Phi$ , примыкающая к теплоизолированной стенке прямоугольной области  $\Omega$ , позволяет перенести однородное граничное условие второго рода на границу области  $\Omega'$  непрямоугольной формы.

Для примера, рассмотрим крестообразную область  $\Omega'$ , на границах которой заданы однородные граничные условия второго рода. В такой области имеется точечный тепловой источник, перемещающийся вдоль одной из осей креста с постоянной скоростью  $\vec{v}$ .

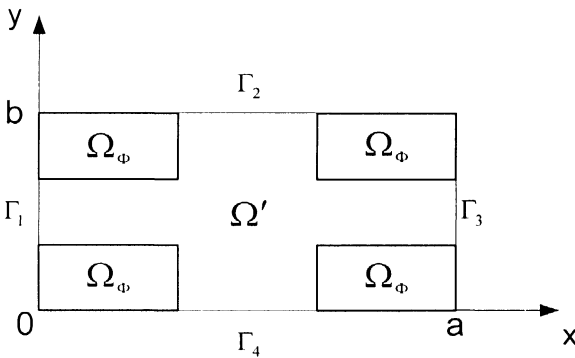


Рис.6.

Для такой задачи  $f(x, y, t) = Q\delta(x - vt, y - b/2)$ , где  $\delta(x - x_0, y - y_0)$  – двумерная дельта-функция, моделирующая точечный тепловой источник, расположенный в точке  $(x_0, y_0)$ . Дополняя  $\Omega'$  до прямоугольной области четырьмя фиктивными областями с  $\lambda=0$  (рис.6), решаем задачу в прямоугольной области по предложенной выше методике.

На рис.9 и 10 представлено температурное поле в различные моменты времени для случая, когда  $u_0(M)$ . Отчётливо видно, что в любой момент времени в фиктивных областях температура остаётся равной нулю, а развитие температурного поля происходит лишь в крестообразной области.

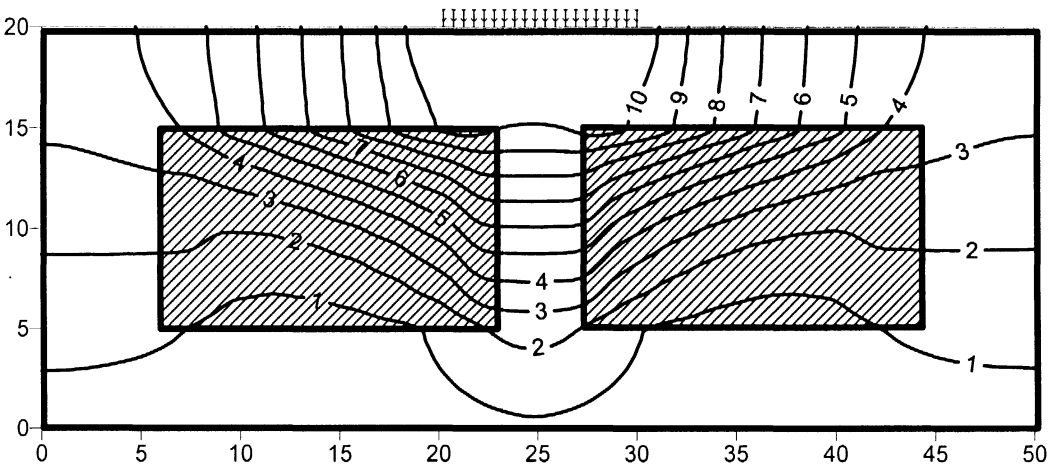


Рис.7.

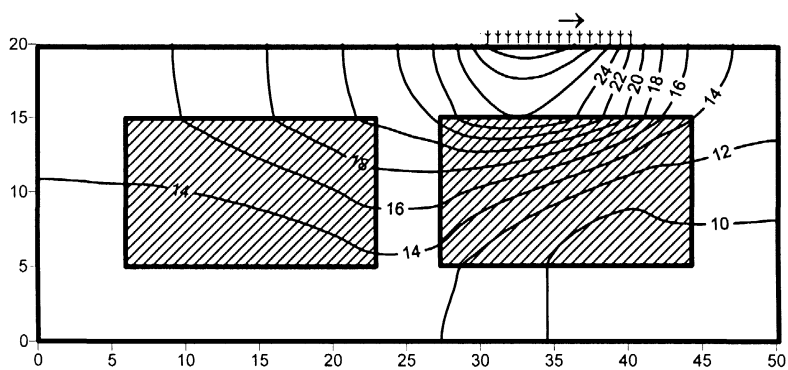


Рис.8.

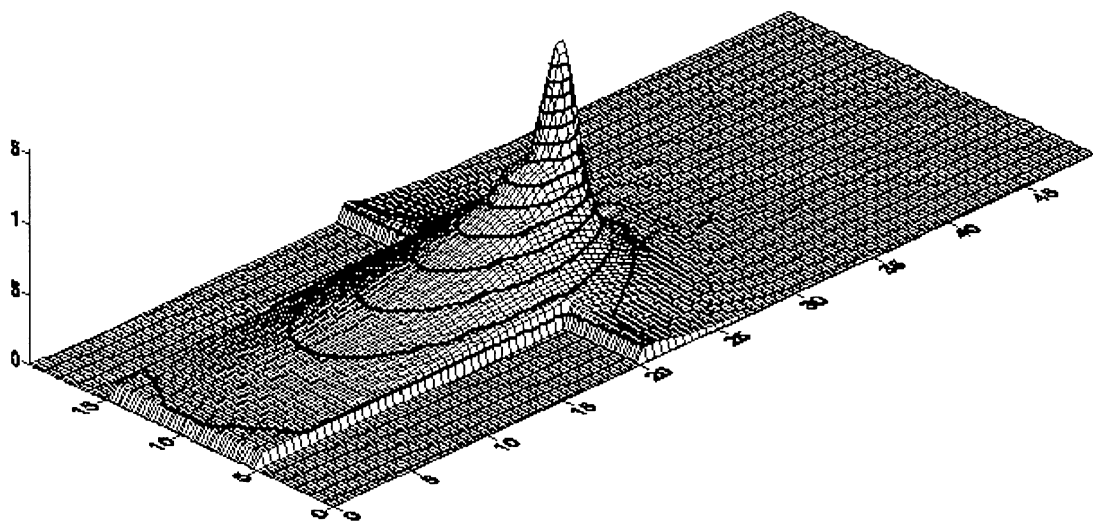


Рис.9.

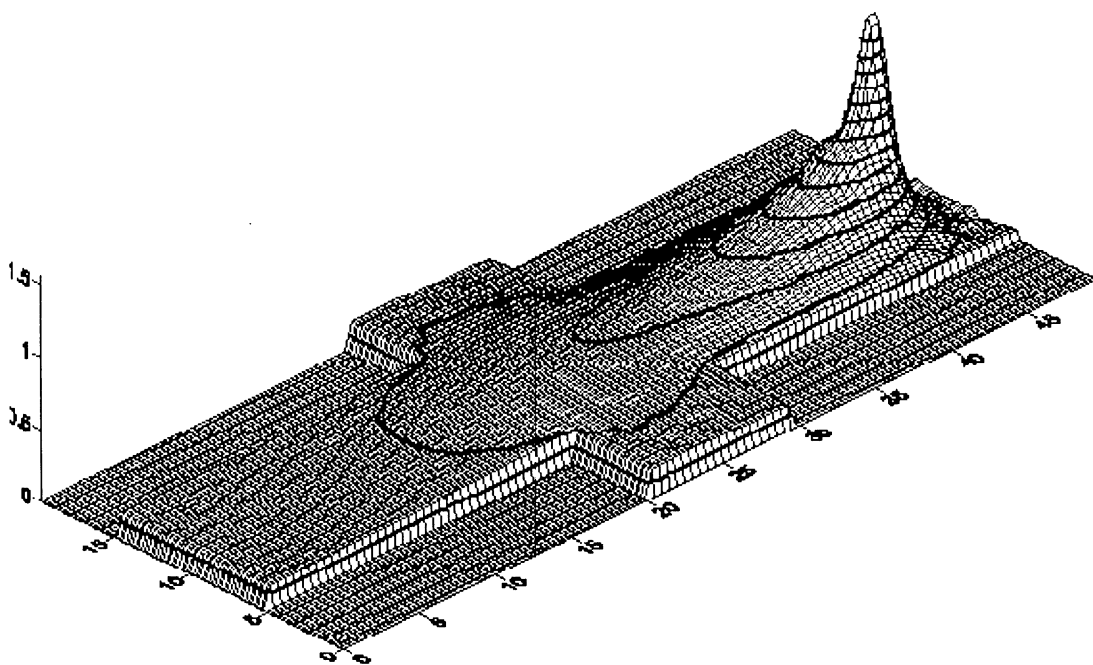


Рис.10.

### Заключение

В заключение отметим, что предложенный алгоритм может быть обобщен и на случай решения задач вида (1), в которых тепловые потоки на границе области  $\Gamma$  зависят (линейно или нелинейно) от локального значения температуры на границе, т.е. когда  $Q = Q(u(P), P, t)$ ,  $P \in \Gamma$ .

В таких задачах в каждый момент дискретного времени  $t_k = kt$  при вычислении  $Q$  значение температуры на границе можно брать с предыдущего временного слоя. Тогда  $Q_k = Q(u_{k-1}(P), P, t_k) = Q_k(P)$  как и в граничном условии задачи (3).

С помощью такого подхода могут быть рассмотрены задачи с граничными условиями третьего рода и с нелинейными граничными условиями типа условий излучения [4].

В [10] описан дополнительный итерационный процесс, который можно использовать для улучшения точности приближенного решения в таких задачах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983, 328 с.
2. Мажукин В.И., Малафеев Д.А., Матус П.П., Самарский А.А. Разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений математической физики с переменными коэффициентами. // ЖВМ и МФ, 2001, т.41, №3, с. 407-409.
3. Зверев В.Г. Об одной специальной разностной схеме для решения краевых задач тепломассообмена. // ЖВМ и МФ, 2003, т.43, №2, с.265-278
4. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К., Рогожин В.М. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса при плазменном напылении. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия «Машиностроение», 1994, №3, с. 3-17.
5. Мартинсон Л.К., Морозов К.В. Моделирование и расчёт температурных полей в неоднородных средах. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия «Естественные науки», 2002, №2, с. 56-68.
6. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973, 408с.
7. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989, 448с.
8. Репин С.И., Фролов М.Е. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа. // ЖВМиМФ, 2002, т.42, №12, с.1774-1787.
9. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1991, 156с.
10. Малов Ю.И., Мартинсон Л.К. Математическое моделирование процессов переноса в некоторых задачах экологического прогнозирования. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана, серия «Машиностроение», 1992, №4, с. 108-114.

Поступила в редакцию 30.06.03