G. A. Gal'perin, Rates of Interaction Propagation in One-Dimensional Automaton Networks,
Probl. Peredachi Inf., 1977, Volume 13, Issue 1, 73–81

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XIII **1977** **Вып. 1**

УДК 62-507:518.5

О СКОРОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ОДНОМЕРНЫХ СЕТЯХ АВТОМАТОВ

Г. А. Гальперин

Работа является продолжением статьи «Одномерные сети автоматов с монотонным локальным взаимодействием». Выясняется, какие значения могут принимать левые и правые скорости $L_{a,b}$, $R_{a,b}$ $(0\leqslant a,\ b\leqslant n)$, а также дается способ их вычисления с реальной сложностью.

§ 1. Введение. Формулировка основных теорем

В работе [1] исследовалось поведение одномерных сетей автоматов с $n+1$ состояниями, функционирование которых описывается детерминированным монотонным оператором P. В настоящей работе мы будем придерживаться всех определений, введенных в работе [1]. Цель работы — выяснить, какие значения могут принимать левые и правые скорости $L_{a,b}$ и $R_{a,b}$ $(0\leqslant a,\ b\leqslant n)$, а также дать способ их вычисления и оценку числа операций, необходимых для этого.

Как следует из [1], все скорости $L_{a,b}$, $R_{a,b}$ равны каким-то скоростям $v_{a',b'}$, где $(a',\ b')$ — сцепленные пары. При этом число $v_{a,b}$ всегда является *рациональным*, так как существует такая лестница f типа $(a,\ b)$, для которой

$$(1)\qquad P^q f = S^p f,$$

где S^1 — оператор сдвига на 1, S^p — p-я степень этого оператора. Число q будем называть *периодом* для лестницы f.

Если же $(a,\ b)$ — несцепленная пара, то из [1] следует существование левой и правой скоростей $L_{a,b}$ и $R_{a,b}$, также являющихся рациональными числами, причем $L_{a,b}=v_{a,c}$, $R_{a,b}=v_{d,b}$ при некоторых c, d (a, c, d, b — монотонная последовательность, а пары $(a,\ c)$ и $(d,\ b)$ — сцепленные). Поэтому, чтобы определить, какими дробями могут выражаться числа $L_{a,b}$ и $R_{a,b}$, достаточно рассмотреть лишь случай, когда пара $(a,\ b)$ является сцепленной и выяснить возможные значения $v_{a,b}$.

Без ограничения общности будем считать $a=0$, $b=n$; пара $(0,\ n)$ сцепленная. Основными результатами работы являются следующие теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Число $v_{0,n}$ выражается дробью, знаменатель которой не превосходит n (если $v_{0,n}=p/q<0$, то считаем $p<0$, $q>0$).*

Теорема 2. *Существует способ вычисления скорости $v_{0,n}$, содержащий $\asymp D^2n^4$ действий (D — диаметр окрестности нуля), причем однократное вычисление функции φ считается за одно действие* *.

---

* Знак $\asymp$ означает: с точностью до мультипликативной константы.

§ 2. Определения и доказательство теоремы 1

1. R-лестницы. Для дальнейших исследований оказывается необходимым расширить действие оператора P на всю вещественную прямую $\mathbf{R}$. Для этого включим решетку $\mathbf{Z}$ в прямую $\mathbf{R}$ как подмножество.

Ограничимся действием оператора P только на лестницы. Введем понятие $\mathbf{R}$-лестницы.

Определение 1. а) Будем говорить, что на прямой $\mathbf{R}$ задана $\mathbf{R}$-*лестница*, если $f:\mathbf{R}\to\{0, 1, \ldots, n\}$ — монотонная функция, не являющаяся константой. Разумеется, всякая такая функция кусочно-постоянна.

б) $\mathbf{R}$-лестницу f назовем $\mathbf{R}$-*лестницей типа* (a, b), *если* $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)=a$, $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)=b$, а числа a и b будем называть *нижним и верхним уровнями* лестницы.

Для $a>b$ определение б) аналогично.

в) Обозначим для $\mathbf{R}$-лестницы f

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_{\text{л}}(f)&=\sup\{x\in\mathbf{R}:\ f(x)=a\},\\ x_{\text{п}}(f)&=\inf\{x\in\mathbf{R}:\ f(x)=b\},\end{aligned}$$

а число $d(f)=x_{\text{п}}(f)-x_{\text{л}}(f)$ назовем *длиной* лестницы f. Очевидно, что $d(f)\geqslant 0$.

г) $\mathbf{R}$-лестницу f назовем $\mathbf{R}$-*скачком,* если $d(f)=0$.

Определение 2. Оператор $\mathscr{P}=P_{\mathbf{R}}$, действующий на множестве всех $\mathbf{R}$-лестниц и переводящий это множество в себя, определяется тем же натуральным числом r и той же функцией φ: $\{0, 1,\ldots,n\}^{2r+1}\to\{0, 1,\ldots,n\}$, что и оператор P, причем если f—$\mathbf{R}$-лестница, то для всех $x\in\mathbf{R}$ полагается

$$(3)\qquad (P_{\mathbf{R}}f)(x)=\varphi(f(x-r),\ldots,f(x+r));$$

как и для оператора P, $\varphi(0,\ldots,0)=0$ (ясно, что $\mathscr{P}$ — монотонный оператор).

Легко видеть, что $\mathbf{R}$-лестницы, рассматриваемые только на $\mathbf{Z}$, дают нам лестницы в прежнем смысле. Назовем их теперь $\mathbf{Z}$-*лестницами* (на $\mathbf{Z}$-лестницы действует оператор P — ограничение на $\mathbf{Z}$ оператора $\mathscr{P}$).

Определение 3. Пусть f — $\mathbf{Z}$-лестница. Будем обозначать той же буквой f $\mathbf{R}$-лестницу, определяемую следующим условием. Если из того, что для $\mathbf{Z}$-лестницы f при некотором $k\in\mathbf{Z}$ имеет место $f(k)=f(k+1)=\ldots$ $\ldots=f(k+l)=m$, $f(k-1)\neq m$, $f(k+l+1)\neq m$, то для $\mathbf{R}$-лестницы f имеет место

$$(4)\qquad f(x)=\begin{cases} m & \text{при}\quad k-1\leqslant x<k+l+1,\quad k,l\in\mathbf{Z},\\ \neq m & \text{при}\quad x<k-1\quad\text{и при}\quad x\geqslant k+l+1.\end{cases}$$

При этом точки разрыва у построенной таким способом $\mathbf{R}$-лестницы f целочисленные. Любую $\mathbf{R}$-лестницу, у которой все точки разрыва целые, назовем *целочисленной* лестницей.

Определение 4. Сегмент $K\subset\mathbf{R}$ (конечный), для всех точек x которого $f(x)=a$ и при $x\notin K$ $f(x)\neq a$, назовем *массивом* уровня a $\mathbf{R}$-лестницы f, а число $f(x)$ — *уровнем точки* $x\in\mathbf{R}$.

Замечание 1. Далее будут рассматриваться натуральные показатели степеней оператора $\mathscr{P}$ и произвольные вещественные показатели степеней оператора S^1 сдвига на 1.

Замечание 2. $\mathbf{R}$-лестницы f_1 и f_2 будем считать *эквивалентными,* если они совпадают с точностью до сдвига, т. е. $f_2=S^\alpha f_1$ при некотором $\alpha\in\mathbf{R}$ (тем самым длины массивов одного уровня у этих лестниц равны). Множество всех $\mathbf{R}$-лестниц разбивается на классы $\{(f)\}$ эквивалентности: каждый класс (f) однозначно определяется любым своим представителем f.

2. Метрическое пространство ($\mathbf{R}_+^{n-1}$, ρ). Ниже всюду будут рассматриваться $\mathbf{R}$-лестницы типа $(0, n)$ и специально это оговариваться не будет.

Рассмотрим произвольную $\mathbf{R}$-лестницу f, и пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ — точки ее разрыва. Числа $\Delta_1 = x_2 - x_1$, $\Delta_2 = x_3 - x_2, \ldots, \Delta_{n-1} = x_n - x_{n-1}$ — длины массивов f однозначно определены классом эквивалентности (f), которому принадлежит лестница f (в отличие от чисел $x_1, \ldots, x_n$, зависящих от конкретного представителя f). Поскольку $\Delta_i \geqslant 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то вектор $\mathbf{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$ лежит в замкнутом положительном октанте пространства $\mathbf{R}^{n-1}$. Положительный замкнутый октант обозначим через $\mathbf{R}_+^{n-1}$.

Итак, имеется взаимно-однозначное соответствие между классами $\{(f)\}$ эквивалентных $\mathbf{R}$-лестниц и точками октанта $\mathbf{R}_+^{n-1}$: точке $\mathbf{\Delta} = (\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}) \in \mathbf{R}_+^{n-1}$ соответствует класс (f) $\mathbf{R}$-лестниц, длины массивов которых равны $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$.

Рассмотрим два класса эквивалентности (f) и (f'). Очевидно, что существуют две таких $\mathbf{R}$-лестницы $f \in (f)$, $f' \in (f')$, для которых выполнено неравенство

$$S^{\lambda_1} f \geqslant f' \geqslant S^{\lambda_2} f \tag{5}$$

при некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Среди всех чисел $\{\lambda_1\}$, при которых неравенство (5) выполняется, выберем *наибольшее* и обозначим $\lambda_1^{(0)}$, а среди всех чисел $\{\lambda_2\}$, при которых (5) выполняется, выберем *наименьшее* и обозначим $\lambda_2^{(0)}$ $(\lambda_2^{(0)} \geqslant \lambda_1^{(0)})$. Пусть классам (f) и (f') соответствуют векторы $\mathbf{\Delta}$ и $\mathbf{\Delta}'$ октанта $\mathbf{R}_+^{n-1}$.

Определение 5. *Расстоянием между векторами $\mathbf{\Delta}$ и $\mathbf{\Delta}' \in \mathbf{R}_+^{n-1}$ назовем число*

$$\rho(\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta}') = \lambda_2^{(0)} - \lambda_1^{(0)}. \tag{6}$$

Проверим *корректность* определения 5, т. е. покажем, что функция ρ удовлетворяет всем свойствам расстояния. Пусть $x_1', \ldots, x_n'$ — точки разрыва функции f', а $x, \ldots, x_n$ — точки разрыва функции $S^{\lambda_1^{(0)}} f$. Тогда ясно что

$$\rho(\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta}') = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i' - x_i) - \min_{1 \leqslant j \leqslant n} (x_j' - x_j).$$

Выразим $\rho(\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta}')$ через координаты векторов $\mathbf{\Delta}$ и $\mathbf{\Delta}'$. Поскольку $x_i' = x'_1 + \Delta_1' + \Delta_2' + \ldots + \Delta_i'$, $x_i = x_1 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_i$, то

$$\rho(\mathbf{\Delta}, \mathbf{\Delta}') = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[(x_1' - x_1) + \sum_{k=1}^{i} (\Delta_k' - \Delta_k) \right] -$$

$$- \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \left[(x_1' - x_1) + \sum_{s=1}^{j} (\Delta_s' - \Delta_s) \right] =$$

$$= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\sum_{k=1}^{i} (\Delta_k' - \Delta_k) \right] - \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \left[\sum_{s=1}^{j} (\Delta_s' - \Delta_s) \right].$$

Обозначим $\delta_k=\Delta_k'-\Delta_k$, тогда

$$\rho(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\Delta}')=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\delta_1+\ldots+\delta_i)-\min_{1\leqslant j\leqslant n}(\delta_1+\ldots+\delta_j)= \tag{7}$$
$$=\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}|\delta_{\min(i,j)+1}+\delta_{\min(i,j)+2}+\ldots+\delta_{\max(i,j)}|.$$

Мы видим, что правая часть в равенстве (7) удовлетворяет всем свойствам расстояния; тем самым определение 5 корректно.

Из формулы (7) следует также справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пара* $(\mathbf{R}_+^{n-1},\rho)$, *где функция* ρ *определена формулой* (6) (*или эквивалентной ей формулой* (7)), *образует метрическое пространство.*

Замечание 3. Нулевой вектор отвечает скачку типа $(0, n)$.

Замечание 4. Длиной вектора $\boldsymbol{\Delta}=(\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1})$ называется величина $|\boldsymbol{\Delta}|=\rho(\boldsymbol{\Delta},\mathbf{0})=\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_{n-1}$.

3. Условие Липшица. Оператор $\mathscr{P}$, действующий на множестве $\mathbf{R}$-лестниц, индуцирует оператор $\mathscr{P}_*$, действующий в метрическом пространстве $(\mathbf{R}_+^{n-1},\rho)$.

Лемма 2. *Отображение* $\mathscr{P}_*$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* 1.

Доказательство. Надо доказать, что для любых двух векторов $\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\Delta}'\in\mathbf{R}_+^{n-1}$ имеет место неравенство

$$\rho(\mathscr{P}_*\boldsymbol{\Delta},\mathscr{P}_*\boldsymbol{\Delta}')\leqslant\rho(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\Delta}'). \tag{8}$$

Пусть (f) и (f') — два различных класса эквивалентности, соответствующие векторам $\boldsymbol{\Delta}$ и $\boldsymbol{\Delta}'$. Выберем таких представителей этих классов $f\in(f)$, $f'\in(f')$, что координата самой левой точки разрыва функции f равна $0\in\mathbf{R}$ и $f\geqslant f'$. Тогда из определения 5 следует: если $f\geqslant f'\geqslant S^A f$, то

$$A\geqslant\rho(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\Delta}'). \tag{9}$$

Пусть $\rho(\boldsymbol{\Delta},\boldsymbol{\Delta}')=\alpha$, тогда $f\leqslant f'\leqslant S^\alpha f$, и в силу монотонности и однородности оператора $\mathscr{P}$

$$\mathscr{P}f\geqslant\mathscr{P}f'\geqslant S^\alpha\mathscr{P}f.$$

Из неравенства (9) и последнего соотношения следует, что

$$\alpha\geqslant\rho(\mathscr{P}_*\boldsymbol{\Delta},\mathscr{P}_*\boldsymbol{\Delta}').$$

Лемма доказана.

Замечание 5. Оператор $\mathscr{P}_*$ *непрерывный*, поскольку удовлетворяет условию Липшица.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть f — $\mathbf{R}$-лестница типа $(0, n)$ и $d(f)=N$, где N — число, превосходящее константу сцепленности для лестницы f. Тогда существует натуральное число T, такое, что

$$d(\mathscr{P}^T f)<N-1. \tag{10}$$

Если лестнице f в $\mathbf{R}_+^{n-1}$ соответствует вектор $\boldsymbol{\Delta}=(\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1})$, то в силу замечания 4 он принадлежит множеству $\mathcal{O}=\{\boldsymbol{\Delta}\in\mathbf{R}_+^{n-1}:\ |\boldsymbol{\Delta}|<N\}$, которое является $(n-1)$-мерным тетраэдром с вершиной в $\mathbf{0}$, причем длины его ребер, исходящие из $\mathbf{0}$, равны N. Из формулы (10) вытекает, что

$$\mathscr{P}_*^T\mathcal{O}\subset\mathcal{O}. \tag{11}$$

Поскольку оператор $\mathscr{P}_*$ непрерывный (см. замечание 5), $\mathcal{O}$ — выпуклое множество, то из (11) и теоремы Брауэра о неподвижной точке [2] следует, что в $\mathcal{O}$ существует неподвижная точка $\boldsymbol{\sigma}$ для оператора $\mathscr{P}_*^T$:

$$\mathscr{P}_*^T\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}. \tag{12}$$

Однако верно даже более сильное утверждение.

Лемма 3. *Существует точка* $\xi\in\mathcal{O}$, *неподвижная для оператора* $\mathcal{P}_*$:

(13) $\mathcal{P}_*\xi=\xi$.

Доказательство. Рассмотрим точки $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathcal{P}_*\boldsymbol{\sigma}$, $\mathcal{P}_*^2\boldsymbol{\sigma},\ldots,$ $\mathcal{P}_*^{T-1}\boldsymbol{\sigma}$ и шары радиуса $2N$ с центрами в этих точках:

$$B_{2N}(\boldsymbol{\sigma}),\quad B_{2N}(\mathcal{P}_*\boldsymbol{\sigma}),\ldots,B_{2N}(\mathcal{P}_*^{T-1}\boldsymbol{\sigma}).$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ их пересечение с множеством $\mathcal{O}$

$$\mathfrak{A}=B_{2N}(\boldsymbol{\sigma})\cap B_{2N}(\mathcal{P}_*\boldsymbol{\sigma})\cap\ldots\cap B_{2N}(\mathcal{P}_*^{T-1}\boldsymbol{\sigma})\cap\mathcal{O}.$$

1°. Справедливо включение $\mathcal{P}_*\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}$.

Действительно, если $\mathbf{x}\in\mathfrak{A}$, то $\rho(\mathbf{x},\mathcal{P}_*^k\boldsymbol{\sigma})\leqslant 2N$ $(0\leqslant k\leqslant T-1)$ и из условия Липшица следует неравенство $\rho(\mathcal{P}_*\mathbf{x},\mathcal{P}_*^{k+1}\boldsymbol{\sigma})\leqslant 2N$, откуда $\mathcal{P}_*\mathbf{x}\in\mathfrak{A}$, что и требовалось.

2°. $\mathfrak{A}$ — выпуклое множество, так как $B_{2N}(\mathcal{P}_*^k\boldsymbol{\sigma})$ — выпуклое при всех $k=0,1,\ldots,T-1$.

3°. $\mathfrak{A}\neq\varnothing$, поскольку $\mathbf{0}\in\mathfrak{A}$.

Из 1°—3° и теоремы Брауэра следует существование точки $\xi\in\mathcal{O}$, причем $\mathcal{P}_*\xi=\xi$. Доказательство леммы 3 закончено.

Заметим, что вектору ξ соответствует такой класс эквивалентности (f_ξ), что на любую лестницу $f_\xi\in(f_\xi)$ оператор $\mathcal{P}$ действует как некоторая степень оператора сдвига. Лестницу f будем называть *собственной*.

Лемма 4 будет играть существенную роль в завершении доказательства теоремы 1.

Лемма 4. *Существует не менее одного и не более n классов эквивалентных целочисленных лестниц* $(f_1),\ldots,(f_l)$ $(l\leqslant n)$, *которым соответствуют точки* $\boldsymbol{\Delta}_1,\boldsymbol{\Delta}_2,\ldots,\boldsymbol{\Delta}_l\in\mathbf{R}_+^{n-1}$, *такие, что* $\rho(\xi,\boldsymbol{\Delta}_i)<1$ *при всех* $i\leqslant l$ (ξ — *неподвижная точка оператора* $\mathcal{P}_*$).

Доказательство. а) Фиксируем какую-то $\mathbf{R}$-лестницу $f_\xi\in(f_\xi)$; пусть $x_1, x_2,\ldots,x_n$ — ее точки разрывов. Отметим на прямой точки $[x_1]$, $[x_2],\ldots,[x_n]\in\mathbf{Z}$ ($[\cdot]$ — целая часть числа) и построим целочисленную лестницу f_1, имеющую разрывы в этих точках. $\mathbf{Z}$-лестница f_1 принадлежит классу эквивалентности (f_1), которому соответствует вектор $\boldsymbol{\Delta}_1$, причем $\rho(\xi,\boldsymbol{\Delta}_1)<1$. Таким образом, множество классов эквивалентности, удовлетворяющих условиям леммы, не пусто.

б) Докажем, что произвольный класс (f) эквивалентных целочисленных лестиц, отвечающий вектору $\boldsymbol{\Delta}\in\mathbf{R}_+^{n-1}$, такому, что $\rho(\xi,\boldsymbol{\Delta})<1$, может быть построен способом, описанным в п. а).

Выберем лестницу $f\in(f)$, точки $y_1,\ldots,y_n$ разрывов которой целочисленны. Поскольку $\rho(\xi,\boldsymbol{\Delta})<1$, найдутся лестницы f_ξ', $f_\xi''\in(f_\xi)$, такие, что $f_\xi''\geqslant f\geqslant f_\xi'$, и точки разрывов функции f_ξ' получаются сдвигом точек разрыва функции f_ξ'' на число $\rho(\xi,\boldsymbol{\Delta})<1$ (см. определение 5). Если x_1, $x_2,\ldots,$ x_n — точки разрывов функции f_ξ', то при всех i, $1\leqslant i\leqslant n$, $0\leqslant x_i-y_i\leqslant 1$. Но $y_i\in\mathbf{Z}$, поэтому $y_i=[x_i]$ для всех $1\leqslant i\leqslant n$.

в) Докажем, что искомых классов эквивалентности не более n. Класс (f_1) уже построен в п. а).

Расположим дробные части чисел $x_1,\ldots,x_n$ (точек разрывов выбранной в п. а) лестницы $f_\xi\in(f_\xi)$) в порядке возрастания: $\{x_{i_1}\}\leqslant\{x_{i_2}\}\leqslant\ldots$ $\ldots\leqslant\{x_{i_n}\}$ и обозначим $\alpha_k=\{x_{i_k}\}$ $(k=1,\ldots,n)$.

Если проделать процедуру пункта а) построения целочисленной лестницы, отправляясь от $\mathbf{R}$-лестницы $S^{\lambda_0}f_\xi \in (f_\xi)$, где $\lambda_0 \leqslant \alpha_1$, то в результате мы заведомо получим $\mathbf{Z}$-лестницу класса (f_1).

Если же мы будем отправляться от $\mathbf{R}$-лестницы $S^{\lambda_1}f_\xi \in (f_\xi)$, где $\alpha_1 < \lambda_1 \leqslant \alpha_2$, то полученная после процедуры целочисленная лестница f_2, точки разрыва которой суть $[x_1-\lambda_1]$, $[x_2-\lambda_1]$, $[x_3-\lambda_1], \ldots, [x_n-\lambda_1]$, в общем случае будет принадлежать классу эквивалентности (f_2), не совпадающему с (f_1). При этом классу (f_2) соответствует вектор $\Delta_2 \in \mathbf{R}_+^{n-1}$, удовлетворяющий условию $\rho(\xi, \Delta_2) < 1$.

Аналогично строятся целочисленные лестницы $f_3 \in (f_3)$ (лестница f_3 имеет разрывы в точках $[x_1-\lambda_2]$, $[x_2-\lambda_2], \ldots, [x_n-\lambda_2]$, где $\alpha_2 < \lambda_2 \leqslant \alpha_3$), $f_4 \in (f_4)$ (точками разрыва у f_4 являются $[x_1-\lambda_3]$, $[x_2-\lambda_3], \ldots, [x_n-\lambda_3]$, где $\alpha_3 < \lambda_3 \leqslant \alpha_4$) и т. д., причем классам эквивалентности (f_3), (f_4), $(f_5) \ldots$ соответствуют в $\mathbf{R}_+^{n-1}$ векторы Δ_3, Δ_4, $\Delta_5, \ldots$, такие, что $\rho(\xi, \Delta_3) < 1$, $\rho(\xi, \Delta_4) < 1$, $\rho(\xi, \Delta_5) < 1$ и т. д. Но *различных* наборов чисел $[x_1-\lambda_i], \ldots, [x_n-\lambda_i]$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $\alpha_i < \lambda_i \leqslant \alpha_{i+1}$, $i=1, \ldots, n-1$, не более n, а потому и построенных различных классов эквивалентности (f_1), $(f_2), \ldots, (f_l)$, а соответственно и векторов $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ не более n. При этом $\rho(\xi, \Delta_i) < 1$ для всех $i=1, \ldots, l$.

Из пункта б) следует, что произвольный класс эквивалентности (f), отвечающий вектору Δ, $\rho(\xi, \Delta) < 1$, совпадает с одним из уже построенных классов (f_i). Тем самым множество таких классов исчерпано. Мы видим, что оно состоит из $l \leqslant n$ элементов. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Наряду с неподвижной точкой ξ оператора $\mathscr{P}_*$ в открытом шаре $B_1(\xi)$ радиуса 1 с центром в точке ξ могут находиться целочисленные точки Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_l$ октанта $\mathbf{R}_+^{n-1}$. По лемме 4 $l \leqslant n$. Так как $\rho(\xi, \Delta_i) < 1$ $(i=1, \ldots, l)$, то из леммы 2 имеем $\rho(\mathscr{P}_*\xi, \mathscr{P}_*\Delta_i) < 1$, т. е. $\rho(\mathscr{P}_*\Delta_i, \xi) < 1$. Отсюда следует, что $\mathscr{P}_*\Delta_i \in B_1(\xi)$. Поскольку оператор $\mathscr{P}$ на множестве целочисленных лестниц действует так же, как оператор P на множестве $\mathbf{Z}$-лестниц, в частности переводит их опять в целочисленные лестницы, то $\mathscr{P}_*\Delta_i$ — целочисленный вектор $(i=1, \ldots, l)$. Следовательно, оператор $\mathscr{P}_*$ переводит множество $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_l\}$ в себя и можно выбрать непустое подмножество $\mathfrak{x} = \{\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_m}\}$, $m \leqslant l$, такое, что $\mathscr{P}_*\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$, причем $\mathscr{P}_*\Delta_{i_1} = \Delta_{i_2}, \ldots, \mathscr{P}_*\Delta_{i_m} = \Delta_{i_1}$ (множество $\mathfrak{x}$ естественно называть *орбитой* точки ξ). Отсюда $\mathscr{P}_*^m\Delta_{i_1} = \Delta_{i_1}$, и если точке Δ_{i_1} соответствует класс эквивалентности (f_{i_1}), то период для произвольной лестницы $f_{i_1} \in (f_{i_1})$ равен m, $m \leqslant n$. Доказательство теоремы 1 закончено.

Замечание 6. У точки ξ может иметься несколько орбит.

§ 3. Доказательство теоремы 2

1. Предварительная лемма. Лемма 5. *Если f—$\mathbf{Z}$-скачок типа* $(0, n)$, *то при всех* $t \geqslant 0$ $d(P^t f) \leqslant nD$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что для некоторого вещественного β и произвольной $\mathbf{R}$-лестницы $f \in (f_\xi)$ (ξ — неподвижная точка $\mathscr{P}_*$) имеет место равенство

$$\mathscr{P}f_\xi = S^\beta f_\xi. \tag{14}$$

Докажем, что

$$d(f_\xi) \leqslant nD. \tag{15}$$

Предположим противное: пусть $d(f_\xi) > nD$. Тогда у $\mathbf{R}$-лестницы f_ξ длина какого-то массива $[x_1, x_2]$ уровня a строго больше D: $x_2 - x_1 > D$.

Заметим, что точка x_i не лежит в окрестности (диаметра D) точки x_j ($i=1, 2$; $j=2, 1$; $i\neq j$), а поэтому координаты точек x_1 и x_2 под действием $\mathscr{P}$ меняются независимо. Поэтому если рассмотреть лестницу $\hat{f}_\xi$, у которой все массивы, кроме массива уровня a, совпадают с массивами лестницы f_ξ, а длина массива уровня a равна kD, где k — произвольное натуральное число, то будет иметь место равенство

(16) $$\mathscr{P}\hat{f}_\xi=S^\beta\hat{f}_\xi.$$

Следовательно, при достаточно большом k при всех t число $d(\mathscr{P}^t\hat{f}_\xi)$ будет превосходить константу сцепленности для пары $(0, n)$, поэтому $(0, n)$ — пара несцепленная. Получаем противоречие.

Итак, выполнено неравенство (15). Для $\mathbf{Z}$-скачка f можно подобрать такую $\mathbf{R}$-лестницу $f_\xi \in (f_\xi)$, чтобы было верным неравенство

(17) $$f_\xi>f>S^{d(f_\xi)}f_\xi.$$

Из монотонности $\mathscr{P}$ тогда имеем: при всех $t\geqslant 0$ $\mathscr{P}^tf_\xi>P^tf>S^{d(f_\xi)}\mathscr{P}^tf_\xi$.

Учитывая равенство (14), получим $S^{t\beta}f_\xi>P^tf>S^{t\beta+d(f_\xi)}f_\xi$, откуда $d(P^tf)\leqslant(t\beta+d(f_\xi))-t\beta=d(f_\xi)\leqslant nD$, что и требовалось.

2. Процедура вычисления скорости $\mathbf{v}_{0,n}$. Рассмотрим в нуле скачок f типа $(0, n)$. Применим к нему n^3D раз оператор P и определим левую и правую координаты лестницы $P^{n^3D}f$. Обозначим

$$x_л=x_л(P^{n^3D}f),\qquad x_п=x_п(P^{n^3D}f).$$

Выберем далее дробь p/q, удовлетворяющую двум неравенствам:

(18) $$q\leqslant n$$

(если $p/q<0$, то полагаем $p<0$, $q>0$),

(19) $$x_л/n^3D\leqslant p/q\leqslant x_п/n^3D.$$

Утверждается, что

(α): такая *дробь единственна*

и

(β): $v_{0,n}=p/q$.

3. Доказательство утверждений (α) и (β). Как следует из теоремы 1, множество *допустимых* значений скорости $v_{0,n}$ состоит из всех дробей, знаменатели которых не превосходят n.

Для модуля разности двух неравных допустимых значений скоростей $v_1=p_1/q_1$ и $v_2=p_2/q_2$ имеет место следующая оценка снизу:

(20) $$|v_1-v_2|=|p_1q_2-p_2q_1|/q_1q_2\geqslant 1/n^2.$$

Поэтому в интервал длины $1/n^2$ может входить не более чем одно допустимое значение скорости $v_{0,n}$.

Рассмотрим в нуле скачок f типа $(0, n)$. Пусть мы t раз применили к нему оператор P. Тогда

(21) $$x_л(P^tf)/t\leqslant v_{0,n}\leqslant x_п(P^tf)/t.$$

Как следует из леммы 5, $(x_п(P^tf)/t)-(x_л(P^tf)/t)\leqslant nD/t$.
Итак, формула (21) показывает, что число $v_{0,n}$ заключено в интервале длины nD/t; однако уже в интервале длины $1/n^2$ может заключаться максимум *одно* допустимое значение $v_{0,n}$. Следовательно, достаточно выбрать t таким, чтобы выполнялось неравенство $nD/t\leqslant 1/n^2$, например положить

$t=n^3D$, а затем выбрать в интервале $(x_{\text{л}}(P^{n^3D}f)/n^3D,\ x_{\text{п}}(P^{n^3D}f)/n^3D)$ дробь p/q со знаменателем, не превосходящим n.

Согласно доказанному, такая дробь единственна и равна $v_{0,\,n}$. Доказательство завершено.

4. Оценка числа действий. Определим, какое число действий надо сделать, чтобы определить значение скорости $v_{0,\,n}$ способом, описанным в п. 2. Под действием мы будем понимать однократное вычисление функции φ, определяющей оператор P.

Так как из леммы 5 следует, что при всех t $d(P^tf)\leqslant nD$, то однократное применение оператора P к лестнице f соответствует не более чем nD действиям, нужным для определения получающейся лестницы Pf.

Для определения скорости $v_{0,\,n}$ мы к скачку типа $(0,\,n)$ в нуле применяли оператор P $t=n^3D$ раз. Следовательно, число действий, нужных для вычисления $v_{0,\,n}$, оценивается сверху числом

$$\asymp nD\cdot t=n^4D^2. \tag{22}$$

(Мы пренебрегаем действиями, необходимыми для выполнения арифметических операций.)

Доказательство теоремы 2 составляют в совокупности пп. 1—4.

ПРИЛОЖЕНИЕ

С помощью техники, развитой в § 1, получим некоторые результаты работы [1]. На пару $(0,\,n)$ не будет здесь делаться никаких ограничений: она может быть и несцепленной.

Рассмотрим в метрическом пространстве $(\mathbf{R}_+^{n-1},\,\rho)$ куб $\mathcal{K}$ с ребром $2D$, одна вершина которого — точка $\mathbf{0}$, а ребра, исходящие из $\mathbf{0}$, расположены на положительных полуосях системы координат.

Кроме оператора $\mathcal{P}_*$, действующего в этом пространстве, определим еще оператор $\mathcal{Q}_*$ (действующий там же) следующим образом: если $\Delta=(\Delta_1,\ldots,\Delta_{n-1})$, то положим

$$\mathcal{Q}_*(\Delta)=(\min(\Delta_1,\,2D),\ldots,\min(\Delta_{n-1},\,2D)). \tag{23}$$

Оператор $\mathcal{Q}_*$ непрерывный, поэтому $\mathcal{Q}_*\mathcal{P}_*$ — тоже непрерывный оператор и переводит $\mathcal{K}$ в себя. По теореме Брауэра, в $\mathcal{K}$ существует неподвижная точка $\boldsymbol{\omega}$ для оператора $\mathcal{Q}_*\mathcal{P}_*$:

$$\mathcal{Q}_*\mathcal{P}_*\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}. \tag{24}$$

Пусть вектору $\boldsymbol{\omega}$ соответствует лестница g. Применим к лестнице $\mathcal{P}g$ оператор $\mathcal{Q}$, индуцируемый $\mathcal{Q}_*$. При этом оператор $\mathcal{Q}$ оставляет без изменения все длины массивов лестницы $\mathcal{P}g$, меньшие $2D$, а все прочие делает равными $2D$. Однако из (24) следует, что в результате получается первоначальная лестница g. Поэтому справедливо

Предложение 1. *Лестница g, соответствующая вектору $\boldsymbol{\omega}$, определяемому равенством* (24), *под действием оператора $\mathcal{P}$ преобразуется следующим образом: при всех t длины некоторых массивов $\mathcal{P}^tg$ остаются неизменными, длины всех остальных массивов растут линейно по t.*

Из предложения 1 можно легко получить (и даже несколько усилить) утверждения пп. β) и δ) леммы 5 в работе [1]. Сформулируем их еще раз.

Предложение 2. β) *Пусть f — скачок типа* $(0,\,n)$ *в нуле. Тогда при всех t с точностью до $O(1)$ левая и правая координаты лестницы $\mathcal{P}^tf$ определяются формулами*

$$x_{\text{л}}(\mathcal{P}^tf)=L_{0,n}t+O(1), \tag{25}$$

$$x_{\text{п}}(\mathcal{P}^tf)=R_{0,n}t+O(1), \tag{26}$$

причем $|O(1)|\leqslant nD$.

δ) *Существует и единственна последовательность* $0<c_1<c_2<\ldots<c_m<n$, $m\geqslant 0$, *такая, что пары* $(0,\,c_1)$, $(c_1,\,c_2),\ldots,(c_m,\,n)$ *сцепленные и* $L_{0,n}=v_{0,c_1}\leqslant v_{c_1,c_2}\leqslant\ldots\leqslant$

$\leqslant v_{c_m,n}=R_{0,n}$, *причем числа* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *однозначно определены оператором* $\mathscr{P}$ *и соответствуют тем уровням лестницы* g, *массивы которых линейно растут под действием* $\mathscr{P}^t$.

Доказательство β) получается путем применения утверждения 1 и леммы 5 несколько раз; для доказательства δ) надо лестницу $\mathscr{P}^t f$ промажорировать и проминорировать сдвигами лестницы g.

И наконец, последнее замечание. Все результаты [1] и этой статьи остаются верными и почти дословно переносятся на случай непрерывного аргумента (что в настоящей работе частично использовалось). В частности, верна теорема 2 работы [1], и в ее формулировке в качестве константы $\mathscr{K}_3$ можно взять число nD.

Выражаю благодарность А. Л. Тоому за ценные советы, которые очень помогли при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальперин Г. А.* Одномерные сети автоматов с монотонным локальным взаимодействием. Проблемы передачи информации, 1976, 12, 4, 74–87.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.

Поступила в редакцию
30 января 1975 г.