



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, О работах В. А. Рохлина по эргодической теории, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 2, 236–241

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

18 марта 2025 г., 13:11:06



© 1990 г.

### О РАБОТАХ В. А. РОХЛИНА ПО ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Научное наследие Владимира Абрамовича включает около 60 работ и несколько неоконченных рукописей 50-60-х годов и может быть разделено условно на четыре части: топология - в основном четырехмерная топология и алгебраический аппарат топологии; вещественная алгебраическая геометрия (последние годы); эргодическая теория; наконец, труды по истории, методике преподавания, методологии математики. Последняя группа, к сожалению, не нашла достаточного отражения в публикациях, но занимала Рохлина постоянно, и его идеи, которые он часто излагал в докладах и публичных лекциях, достаточно широко известны и оказали влияние на окружающих.

Мы коснемся здесь кратко работ Владимира Абрамовича по эргодической теории: подробный анализ его работ по топологии, вещественной алгебраической геометрии содержится в статье О. Я. Виро и В. М. Харламова. Эргодической теории посвящено 24 публикации и несколько неопубликованных рукописей, которые не были, к сожалению, закончены и относятся к числу нереализованных замыслов В. А. Он неоднократно возвращался к идее написать книгу по метрической теории динамических систем, включающую большой раздел общей теории меры в его духе; он написал еще в 40-х годах несколько глав и предлагал продолжить работу молодым соавторам позже, но, перестав заниматься эргодической теорией, несколько остыл к этой идее. Заметим, что некоторые следы его замыслов были реализованы в обзорах и книгах, вышедших у нас позже.

В эргодическую теорию Владимир Абрамович внес геометрическую и алгебраическую культуру, которой ей - по происхождению, скорее, аналитическому в духе традиции теории динамических систем Пуанкаре и, с другой стороны, Больцмана - недоставало. В этом В. А. продолжал традицию фон Неймана. В его работах геометрическая сторона дела (разбиения, динамика и т. п.) преобладает над аналитическими аспектами. Он пропагандировал совместное рассмотрение систем алгебраического, аналитического, вероятностного, теоретико-числового и других происхождений. Эта традиция привилась и дала прекрасные результаты в его работах и позже в работах его учеников. С другой стороны, он строго следовал аксиоматическим построениям теории меры, в чем также сказались влияние А. Н. Колмогорова и фон Неймана.

Пространства Лебега, введенные Рохлиным в его студенческой работе и подробно исследованные в последующих диссертации и статье «Об основных понятиях теории меры», оказались очень удачным понятием, а предложенная Владимиром Абрамовичем аксиоматика - исключительно удобным уточнением предшествующих аксиоматизаций. Можно, не сомневаясь, сказать, что после аксиоматики Колмогорова и фон Неймана

Рохлин сделал наиболее важный шаг для выделения правильной категории пространств с мерой. К сожалению, удобство и важность теории пространств Лебега осознана была далеко не сразу. Может быть из-за этого исследователи еще долгое время привлекали топологические понятия для конструкций, являющихся по своей сути чисто метрическими. В настоящее время нет сомнений в том, что категория пространств Лебега является основой построения эргодической теории, теории меры и др. Попутно следует отметить, что Рохлину принадлежит также важное замечание о том, что система условных мер или, как он говорил, каноническая система мер существует лишь для измеримых разбиений пространств Лебега и попытки ввести их в других категориях некорректны.

Если сейчас задать вопрос любому специалисту по эргодической теории о том, каковы два наиболее фундаментальных результата, лежащих в основе теории, ответ будет следующий: 1) эргодическая теорема Биркгофа-фон Неймана, 2) лемма Рохлина-Халмоша. Эта лемма, являющаяся исходной точкой всех аппроксимационных построений, была доказана Рохлиным в конце 40-х годов и независимо в более слабой формулировке - Халмошем. Она гласит: для всякого аperiodического преобразования  $T$  с инвариантной конечной мерой  $\mu$  пространства Лебега  $X$ , целого  $n$  и положительного  $\varepsilon$  существует такое периодическое с периодом  $n$  преобразование  $T_n$ , что

$$\mu\{x \in X : T_n x \neq Tx\} < \frac{1}{n} + \varepsilon.$$

Эта лемма о периодической аппроксимации многократно обобщалась; на ней основаны категорные теоремы, аппроксимационные теории, энтропийные теоремы и т. д.

Заметим еще, что в ранней работе о разложении автоморфизма на эргодические компоненты В. А. фактически доказал некоторый вариант теоремы об измеримом выборе, который сейчас называют теоремой Рохлина-Куратовского-Рыль-Нардзевского. Под влиянием теории нормированных колец Гельфанда-Наймарка-Райкова-Шилова, Рохлин предпринимает (не вполне законченную) попытку построить теорию так называемых унитарных колец. Эта теория является двойственной теорией пространств Лебега, ее функционально-аналитическим вариантом.

Первый период развития эргодической теории (30-40-е годы) был по преимуществу период спектральной теории. В. А. здесь принадлежит ряд результатов, вошедших в его обзоры 1949 и 1958 гг. Широко известны его категорные оценки перемешиваний, первые исследования автоморфизмов компактных коммутативных групп, как динамических систем, работы по измеримым потокам.

Многие работы, идеи и инициативы В. А. получили завершение или развитие в исследованиях учеников и последующих авторов. К ним следует отнести, например, предложение развить траекторную теорию (Р. Е. Белинская, А. М. Вершик), реализационные теоремы и «системы над системами» (мы бы сказали сейчас - квантование динамических систем), гауссовы системы (А. М. Вершик), смешанный спектр, косые произведения (Л. М. Абрамов), перемешивания (Я. Г. Синай) и др.

Особо следует остановиться на излюбленной в последние годы теме его занятий

(и наиболее важной в 60-70-х годах) - энтропийной теории. Открытие А. Н. Колмогоровым энтропии произвело на В. А. сильное впечатление. Язык этой теории - язык измеримых разбиений, разработанный ранее В. А. и использованный А. Н. Колмогоровым в его работе об энтропии.

Точный анализ понятия энтропии динамических систем, проведенный в цикле работ Колмогорова-Синая и затем Рохлина, Абрамова, Пинскера и других, просто невозможен без теории измеримых разбиений, в особенности без того ее раздела, который относится к убывающим последовательностям. Небольшая и несущественная ошибка в первой работе Колмогорова, обнаруженная Владимиром Абрамовичем, которая и привела к необходимости дать несколько иное определение энтропии по Синаю, связана как раз с некоторыми тонкостями этой теории (см. примечание во второй работе Колмогорова). Окончательно единство двух определений было восстановлено после того, как В. А. значительно позже доказал теорему об образующих для апериодических автоморфизмов. Завершающие результаты об образующих принадлежат здесь Кригеру.

Огромную роль в развитии энтропийной теории у нас и за рубежом сыграли две обзорные статьи В. А. в "Успехах" (1960 и 1967 гг.). Во второй из них подведены итоги развития и приложений понятия энтропии к теории преобразований с инвариантной мерой.

Особенный интерес вызывала у В. А. Рохлина теория инвариантных разбиений для автоморфизмов, к ней В. А. возвращался в более поздние годы, в период завершения своих работ по эргодической теории - именно на эту тему есть несколько неопубликованных набросков. Началом этой теории была классическая работа В. А. совместно с Я. Г. Синаем, в которой, в частности, доказывалось совпадение классов  $K$ -автоморфизмов и автоморфизмов с вполне положительной энтропией (в одну сторону это было ранее доказано М. С. Пинскером). Самые первые формулы энтропийной теории - формулы Абрамова для производного автоморфизма и потока; формулы для энтропии автоморфизмов компактных групп (Синай, Аров, Юзвинский и др.) были развитием идей и предложений В. А. По его же инициативе исследованы метрические свойства автоморфизмов компактных коммутативных групп (Рохлин, Синай, Юзвинский).

Интерес Владимира Абрамовича к эргодической теории стал постепенно спадать после появления новых постэнтропийных идей - аппроксимации, и в особенности фейерверка работ Орнштейна и его последователей. В. А. несомненно интересовал ход событий, но он не стал принимать в нем участие, тем более что его алгебро-топологические интересы к этому времени превалировали.

Отмечу еще два обстоятельства. В. А. Рохлин на протяжении длительного времени интересовался теорией чисел и возможностью применения к ней эргодической теории. Хотя имеется лишь одна его работа на эту тему, к тому же посвященная в основном теории точных эндоморфизмов, а именно работа о непрерывных дробях и эндоморфизме Гаусса, он считал (и это мнение имело косвенное подтверждение, например, в работе Ю. В. Линника об эргодическом методе в теории чисел), что возможности метрической

теории в теории чисел далеко еще не исчерпаны. Кстати, к теории эндоморфизмов (или полугрупп эндоморфизмов) В. А. всегда относился с повышенным вниманием, упомянутая работа представляет собой свод метрических понятий и теорем, относящихся именно к этому случаю. Особенно важно понятие естественного расширения, дающее инвариантную формулировку погружения одностороннего процесса в двусторонний (метрическая дилатация). Другое обстоятельство связано со взаимоотношениями с гладкой и классической динамикой. Могло показаться странным, что он, крупный специалист в области гладких многообразий, знавший хорошо классическую динамику и физику, не пытался связать эргодическую теорию с гладкой динамикой, тем более что многие его ученики и те, кто был близок к нему или испытывал его влияние, активно занимались ею (Я. Г. Синай, В. И. Арнольд, Д. В. Аносов и др.). Более того, в семинаре неоднократно заслушивались сообщения о работах Смейла, Аносова и др. Сам Владимир Абрамович говорил, что здесь он сторонник "чисто" поставленных задач, в которых не смешиваются совершенно непохожие друг на друга категории. Иначе говоря, он рассматривал гладкую и метрическую динамику как несмешиваемые области. Возможно, в такой точке зрения сказались отголоски аксиоматического ригоризма, сейчас, несомненно, непопулярного, но нельзя отказать ей в последовательности.

У истоков эргодической теории как математической дисциплины стоят имена фон Неймана и А. Н. Колмогорова; вслед за ними можно назвать немногих, кто в 30-50-х годах формировал эту теорию и придал ей современный вид - это Дж. Биркгоф, С. Я. Хинчин, Э. Хопф, С. Какутани, П. Халмош и Владимир Абрамович Рохлин.

Работы Владимира Абрамовича Рохлина  
по теории меры и эргодической теории

1. О классификации измеримых разбиений // ДАН СССР. 1947. Т. 58, N 1. С. 29-32.
2. О проблеме классификации автоморфизмов пространства Лебега // ДАН СССР. 1947. Т. 58, N 2. С. 189-191.
3. Унитарные кольца // ДАН СССР. 1948. Т. 59, N 4. С. 643-646.
4. Общее преобразование с инвариантной мерой не есть перемешивание // ДАН СССР. 1948. Т. 60, N 3. С. 349-351.
5. Об основных понятиях теории меры // Мат. сб. 1949. Т. 25(67), N 1. С. 107-150.
6. О разложении динамической системы на транзитивные компоненты // Мат. сб. 1949. Т. 25(67), N 2. С. 235-249.
7. О динамических системах, неприводимые компоненты которых имеют чисто точечный спектр // ДАН СССР. 1949. Т. 64, N 2. С. 167-169.
8. Об аппроксимации непериодических потоков периодическими // ДАН СССР. 1949. Т. 64, N 5. С. 619-620. Совм. с А. А. Гуревич.
9. Об эндоморфизмах компактных коммутативных групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1949. Т. 13. С. 329-340.

10. Избранные вопросы метрической теории динамических систем // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, N 2. С. 57-123.
11. Аппроксимационные теоремы для измеримых потоков // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1950. Т. 14, N 6. С. 537-548. Совм. с А. А. Гуревич.
12. Метрическая классификация измеримых функций // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, N 2(74). С. 169-174.
13. Спектральная теория динамических систем // Тр. 3-го Всесоюз. мат. съезда (1956). 1958. Т. 3. С. 284-28. Совм. с С. В. Фоминым.
14. Об энтропии метрического автоморфизма // ДАН СССР. 1959. Т. 124, N 5. С. 980-982.
15. Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, N 4(94). С. 3-26.
16. Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений // ДАН СССР. 1961. Т. 141, N 5. С. 1038-1041.
17. Об энтропии автоморфизма компактной коммутативной группы. // Теория вероятностей и ее прим. 1961. Т. 6, N 3. С. 351-352. Совм. с Я. Г. Синаем.
18. Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 499-530.
19. Энтропия косо го произведения преобразований с инвариантной мерой // Вестн. ЛГУ. 1962. N 7. С. 5-13. Совм. с Л. М. Абрамовым.
20. Аксиоматическое определение энтропии преобразований с инвариантной мерой // ДАН СССР. 1963. Т. 148, N 4. С. 779-781.
21. Образующие в эргодической теории // Вестн. ЛГУ. 1963. N 1. С. 26-32.
22. Метрические свойства эндоморфизмов компактных коммутативных групп // Изв. АН СССР. 1964. Т. 28, N 4. С. 867-874.
23. Образующие в эргодической теории. II // Вестн. ЛГУ. 1965. Т. 13, N 3. С. 68-72.
24. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, N 5(137). С. 4-56.

Перечень рукописных материалов В. А. Рохлина  
по эргодической теории

1. Тетрадь малого формата в черном переплете без заголовка, около 80 с., материалы к книге (по-видимому, 40-е годы). Оглавление: Часть I. Пространства Лебега, гл. 1-13.
2. Набросок: "Предисловие". Организация книги. История теории преобразований с инвариантной мерой, ее связи и применения. Теория меры как самостоятельная наука и истинное место теории преобразования с инвариантной мерой. Что обычно понимают под теорией меры; назначение 1-й гл., что считается изв. Главная цель книги - новые вещи. С этого начать. Характеристика старых частей. Выбор

материала. Степень общности-пространства Лебега.

3. Рукопись «Преобразования с инвариантной мерой». Сбоку подпись - «книга», 69 с. + 29 (видимо, более поздних) - относится, скорее всего, к 60-м годам.
4. Рукопись «Унитарные кольца», 18 с. (видимо, 50-е годы).
5. Эргодическая теория 1966-1967. Лекции (планы) - 4 с.
6. Инвариантные разбиения, июнь 1967 г., 2 с.; добавления - июль 1967, сентябрь 1967.
7. «Замкнутые разбиения. Доклад 1.10.68», 1 с. добавления - 11.10 и 21.10.68.
8. «Насыщенные разбиения. Декабрь 1969», 2 с., 24 пункта.

*А. М. Вершик*