В. Зигмунт, Замечания о суперпозиционной измеримости многозначной функции, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 70–72

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ЗАМЕЧАНИЯ О СУПЕРПОЗИЦИОННОЙ ИЗМЕРИМОСТИ МНОГОЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ

В. Зигмунт

В этой статье, примыкающей к работе [1], исследуется связь между суперпозиционной измеримостью многозначной функции двух переменных и измеримостью по совокупности этих переменных. Доказывается, что если многозначная функция удовлетворяет определенным условиям, то оба понятия измеримости эквивалентны. Кроме того приводится усиление теоремы 3 доказанной Цалюком [1].

Начнем с введения нужных обозначений и определений. Итак, $P\mathfrak{X}$, $U\mathfrak{X}$, $\operatorname{Comp}\mathfrak{X}$ будут обозначать совокупность всех, всех замкнутых и всех компактных подмножеств топологического пространства $\mathfrak{X}$ соответственно. Если F: $\mathfrak{X}_1 - P\mathfrak{X}_2$ — многозначная функция, то множества $GrF = \{(x, y) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2\colon y \in F(x)\}$, $F^-A = \{x \in \mathfrak{X}\colon F(x) \cap A \neq \varnothing\}$, $F^+A = \{x \in \mathfrak{X}_1\colon F(x) \in A\}$ называются графиком F, нижним и верхним прообразом множества $A \subset \mathfrak{X}_2$ соответственно. Следуя [2], назовем многозначную функцию F: $\mathfrak{X}_1 \to P\mathfrak{X}_2$ полунепрерывной сверху (снизу), если для любого замкнутого (открытого) множества $A \subset \mathfrak{X}_2$, множество $F^-(A)$ (открыто) замкнуто в $\mathfrak{X}_1$, или, что эквивалентно, для любого открытого (замкнутого) множества $B \subset \mathfrak{X}_2$, множество $F^+(B)$ открыто (замкнуто) в $\mathfrak{X}_\perp$. F называется непрерывной, если она одновременно полунепрерывна сверху и снизу. Пусть $(Z, \mathfrak{M})$ — измеримое пространство. Тогда, следуя [4], многозначную функцию F: $Z \to P\mathfrak{X}$ назовем $\mathfrak{M}$-измеримой (слабо $\mathfrak{M}$-измеримой), если для любого замкнутого (открытого) множества $A \subset \mathfrak{X}$, множество F^-A $\mathfrak{M}$-измеримое, т. е. $F^-(A) \in \mathfrak{M}$ или, что эквивалентно, для любого открытого (замкнутого) множества $B \subset \mathfrak{X}$, множество $F^+(B)$ $\mathfrak{M}$-измеримое. Пусть теперь (T, Σ) — измеримое пространство, (X, ρ_x) — полное сепарабельное метрическое пространство, (Y, ρ_y) — метрическое пространство. Будем говорить (см. [1]), что многозначная функция F: $T \times X \to PY$ удовлетворяет слабому условию Каратеодори, если а) при каждом $x \in X$ отображение $t \to F(t, x)$ Σ-измеримо и б) для любого $t \in T$ отображение $x \to F(t, x)$ полунепрерывно сверху. Если потребовать в б) непрерывность отображений $x \to$

$\to F(t, x)$, то получившееся условие назовем сильным условием Каратеодори. Многозначную функцию F: $T \times X \to PY$ будем называть суперпозиционно измеримой, если для любой Σ-измеримой многозначной функции G: $T \to UX$ отображение $t \to F(t, G(t))$ Σ-измеримо.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что Σ — σ-алгебра универсально измеримых множеств [3, определение III.21] (здесь отметим, что тогда пространство (T, Σ) полное в смысле определения Химмельберга [4, с. 54]). Через $\mathfrak{B}(X)$ обозначим борелевскую σ-алгебру подмножеств пространства X, через $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$ — σ-алгебру порожденной множествами $A \times B$, где $A \in \Sigma$, $B \in \mathfrak{B}(X)$.

Известно [1, теорема 1], что если многозначная функция F: $T \times X \to PY$ является $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$-измеримой, то она суперпозиционно измерима. Эта импликация обратима в случае многозначной функции удовлетворяющей слабому условию Каратеодори, что подтверждает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть многозначная функция* F: $T \times X \to PY$ *удовлетворяет слабому условию Каратеодори. Тогда для того, чтобы она была* $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$*-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы была суперпозиционно измеримой.*

Доказательство. Необходимость вытекает из [1, теорема 1].

Достаточность. Прежде всего отметим, что суперпозиционная измеримость влечет за собой Σ-измеримость множеств $\{t \in T\colon F(t, A) \cap B \neq \varnothing\}$ для любых $A \in UX$, $B \in UT$. Каждому $B \in UY$ и каждому $t \in T$ поставим в соответствие множество $\Phi_B(t)$, определенное по правилу $\Phi_B(t) = \{x \in X\colon F(t, x) \cap B \neq \varnothing\}$. Поскольку F полунепрерывна сверху по x, то множество $\Phi_B(t)$ замкнуто в X. Кроме того, для любого фиксированного $B \subset UY$ отображение Φ_B: $T \to UX$ Σ-измеримое. Действительно, для любого замкнутого $A \subset X$ имеем $\Phi_B^-(A) = \{t \in T\colon \Phi_B(t) \cap A \neq \varnothing\} = \{t \in T\colon \exists_{x \in A}\ x \in \Phi_B(t)\} = \{t \in T\colon \exists_{x \in A}\ F(t, x) \cap B \neq \varnothing\} = \{t \in T\colon\ F(t, A) \cap B \neq \varnothing\} \in \Sigma$. Таким образом, согласно [4, теорема 3.5], график Φ_B принадлежит σ-алгебре $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$. Отсюда, в силу произвольности множества $B \in UY$ и равенства $\mathrm{Gr}\,\Phi_B = \{(t, x) \in T \times X\colon x \in \Phi_B(t)\} = \{(t, x) \in T \times X\colon F(t, x) \cap B \neq \varnothing\} = F^-(B)$, вытекает $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$-измеримость многозначной функции F. Теорема доказана.

Следующий результат является усилением теоремы 3 из [1] (поскольку мы не требуем локальной компактности многозначной функции).

ТЕОРЕМА 2. *Если многозначная функция* F: $T \times X \to \mathrm{Comp}\, Y$ *удовлетворяет сильному условию Каратеодори, то она* $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$*-измерима, и следовательно, суперпозиционно измерима.*

Доказательство. Пусть $B \in UY$, A — счетное всюду плотное множество в X. Положим $B^n = \{y \in Y\colon \rho_y(y, B) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, в силу Σ-измеримости по t функции F, имеем

$\{t \in T\colon \ F(t, a) \subset B^n\} \in \Sigma$ и, очевидно, $\{x \in X\colon \rho_x(x, a) < 1/n\} \in \mathfrak{B}(X)$ для любых $a \in A$ и $n \in \mathbf{N}$. Кроме того, верна следующая эквивалентность:

$$F(t, x) \subset B \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbf{N}} \ \exists_{a \in A} \ (\rho_x(x, a) < 1/n) \wedge \wedge (F(t, a) \subset B^n), \quad (t, x) \in T \times X.$$

В самом деле, если $F(t, x) \subset B$, то благодаря верхней полунепрерывности по x многозначной функции F получаем справедливость правой стороны эквивалентности. Обратно, если выполнена правая сторона эквивалентности, то существует такая сходящаяся к x последовательность $\{a_n\} \subset A$, что $F(t, a_n) \subset B^n$, $n \in \mathbf{N}$. Очевидно, что $x \in \overline{\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}}$ при каждом $n \in \mathbf{N}$. Тогда, благодаря нижней полунепрерывности по x функции F, согласно [2, следствие 2а, с. 185], имеем $F(t, x) \subset \overline{\mathrm{S}F(t, \{a_n, a_{n+1}, \ldots\})} \subset \subset \overline{\mathrm{S}F(t, \{a_n, a_{n+1}, \ldots\})} = \overline{\bigcup_{i=n}^{\infty} F(t, a_i)} \in \overline{B^n}$, $n \in \mathbf{N}$, где $\mathrm{S}(R)$ означает операцию объединения всех множеств семейства R [2, с. 13]. Отсюда следует, что $F(t, x) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B^n} = B$. Теперь, учитывая эту эквивалентность, получаем

$$F^+(B) = \{(t, x) \in T \times X\colon \ F(t, x) \subset B\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{a \in A} \{t \in T\colon F(t, a) \subset B^n\} \times \{x \in X\colon \ \rho_x(x, a) < 1/n\} \in \Sigma \times \mathfrak{B}(X).$$

Это означает, что многозначная функция $F\colon T \times X \to \mathrm{Comp}\, Y$ слабо $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$-измерима. Но в случае компактнозначной функции слабая измеримость эквивалентна измеримости [4, теорема 3.1]. Таким образом, F $\Sigma \times \mathfrak{B}(X)$-измерима и, следовательно, суперпозиционно измерима. Теорема доказана.

Институт математики при
Университете М. Кюри-Складовской
(Люблин, ПР)

Поступило
14.06.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Цалюк В. З. О суперпозиционной измеримости многозначных функций // Математические заметки. 1988. Т. 43, вып. 1. С. 98—102.
[2] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
[3] Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions // Lect. Notes in Math. V. 580. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
[4] Himmelberg C. J. Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87. P. 53—71.