V. V. Shikheeva, The construction of a model of representations of the general linear group over a finite field of odd characteristic,
Uspekhi Mat. Nauk, 1979, Volume 34, Issue 5, 233–234

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В. В. Шихеева

1. Пусть $G = GL(n, \mathrm{F}_q)$ — полная линейная группа над конечным полем нечетной характеристики. В заметке построено представление T группы G, обладающее тем свойством, что почти каждое неприводимое представление G входит в T ровно один раз (почти-модель представлений G). Эти представления напоминают построенные в [1] модели представлений компактных групп Ли. Аналогичные представления могут, по-видимому, быть построенными и для других групп Шевалле. Другой метод построения почти-моделей представлений $GL(n, \mathbf{F}_q)$ приведен в [2].

2. Пусть V — n-мерное векторное пространство над конечным полем F_q нечетной характеристики. Фиксируя в V базис, получаем естественное действие группы G на V и на пространстве $\mathcal{F}$ всех невырожденных билинейных симметричных форм. Пространство $\mathcal{F}$ под действием G разбивается на два класса эквивалентности (см. [3]). Зафиксируем представителей f_0 и f_1 этих классов.

Пусть $O(f)$ — ортогональная группа, соответствующая некоторой $f \in \mathcal{T}$. На $O(f)$ определен характер sign_f: $O(f) \to \{\pm 1\}$. А именно: если $o \in O(f)$ — отражение относительно неизотропного вектора $a \in V$, то $\mathrm{sign}_f(o) = 1$ при $f(a, a) \in (\mathrm{F}_q^*)^2$ и -1 в остальных случаях. Для $f \in \mathcal{F}$ положим

$$\tau_f = \mathrm{Ind}_{O(f)}^{GL(n,\, \mathrm{F}_q)} (\mathrm{sign}_f) \quad \text{и} \quad T(q) = \tau_{f_0} \oplus \tau_{f_1}.$$

Будем говорить, что величина $x(q)$, зависящая от q, эквивалентна величине $y(q)(x \sim q)$, если существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от q такие, что для достаточно больших q

$$c_1 y(q) \leqslant x(q) \leqslant c_2 y(q).$$

Теорема 1. *Число различных представлений, входящих в $T(q)$ с единичной кратностью, эквивалентно числу всех неприводимых представлений группы $GL(n, \boldsymbol{F}_q)$.*

Приведем набросок доказательства теоремы 1.

3. Так как $\mathrm{sign}_{f_0}(-E) \neq \mathrm{sign}_{f_1}(-E)$, где E — единичная матрица, то никакое неприводимое представление группы G не может входить с ненулевой кратностью и в τ_{f_0}, и в τ_{f_1}.

4. Пусть Ω — множество всех неприводимых представлений группы G, (τ, ω) — кратность вхождения неприводимого представления $\omega \in \Omega$ в представление τ группы G. Если существует некоторая антиинволюция i алгебры сплетающих операторов $\mathbf{B}$ представления $\tau = \tau_f$, причем $\mathbf{B}^{\pm} = \{x \in \mathbf{B} \mid \mathrm{i}x = \pm x\}$, то имеем оценку:

$$(1) \qquad \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ (\tau, \omega) \neq 0}} ((\tau, w) - 1) \leqslant \dim \mathbf{B}^{-}.$$

Поскольку $|\Omega| \sim q^n$ [1]), из п. 3 и (1) следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что $\dim \mathbf{B}^{+} \sim q^n/2$ и $\dim \mathbf{B}^{-} \leqslant cq^n$, где $c > 0$ не зависит от q.

Алгебра $\mathbf{B}$ изоморфна алгебре $\mathcal{B}$ функций на группе G таких, что $b(o_1 g o_2) = \mathrm{sign}(o_1) b(g) \mathrm{sign}(o_2)$, где $v_1, v_2 \in O(f)$, $g \in G$, $b \in \mathcal{B}$. Пусть $A \in G$. Тогда $A^{\mathfrak{f}(f)}$ определяется из условия: $(Ax, y) = (x, A^{\mathfrak{f}(f)} y)$. Антиинволюция i задается формулой

$$(\mathrm{i}b)(A) = b(A^{\mathfrak{f}(f)}).$$

5. Зададим взаимно однозначное соответствие ψ между множеством классов смежности $O(f) \diagdown (G/O(f)$ и множеством R_f орбит естественного действия G на множество P_f пар (A, φ) таких, что $\varphi \in \mathcal{F}$, $\varphi \sim f$, $A \in G$, где A — самосопряжена относительно f, $\det A \in (\mathrm{F}_q^*)^2$, полагая $\psi(\overline{A}) = \overline{(A^{\mathfrak{f}(f)} \cdot A_1 f)}$, где $\overline{A}$ — класс, в котором лежит матрица A, $(\overline{B, \varphi})$ — орбита пары (B, φ).

[1]) $|X|$ — число элементов множества X.

6. Предложение 1. *Пусть* $A \in G$ *— самосопряженная относительно* f *матрица и* $\det A \in (\mathbf{F}_q^*)^2$. *Тогда число орбит из* R_f, *содержащих пары вида* (A, φ), *не превосходит* 2^n *и в случае, если матрица* A *— регулярна, равно* 2^{k-1}, *где* k *— число неразложимых над* $\mathbf{F}_q$ *инвариантных подпространств матрицы* A.

7. Пусть λ — элемент из алгебраического замыкания поля $\mathbf{F}_q$. Обозначим через $\mathbf{F}_q(\lambda)$ поле, порожденное $\mathbf{F}_q$ и λ.

Предложение 2. *Пусть* $A \in G$ *— регулярная полупростая матрица, самосопряженная относительно* f, *причем* $A = B^{\mathfrak{f}(f)} \cdot B$. *Матрицы* O_1 *и* $O_2 \in O(f)$ *такие, что* $O_1 B O_2 = B$ *и* $\operatorname{sign}_f(O_1)\operatorname{sign}_f(O_2) = -1$ *найдутся в том и только том случае, если существует собственное значение* λ *матрицы* A, *не являющееся квадратом в* $\mathbf{F}_q(\lambda)$.

Предложение 3. *Пусть* $A \in G$ *— регулярная полупростая матрица, самосопряженная относительно* f, *причем любое собственное значение* λ_i *матрицы* A *является квадратом в* $\mathbf{F}_q(\lambda)$. *Тогда существует* $B \in G$, *самосопряженная относительно* f, *такая, что* $B^2 = A$.

8. Лемма 1. *Если для* $A \in G$ *существуют* O_1 *и* $O_2 \in O(f)$ *такие, что* $A = O_1 A O_2$ *и* $\operatorname{sign}_f(O_1)\operatorname{sign}_f(O_2) = -1$, *то любая функция* $b \in \mathcal{B}$ *обращается в* 0 *на двойном классе смежности, содержащем* A. *Наоборот, если таких* O_1 *и* O_2 *нет, то существует единственная с точностью до множителя функция из* $\mathcal{B}$, *ненулевая на любом элементе из класса смежности, содержащего* A, *и равна* 0 *на остальных элементах.*

9. Лемма 2. *Пусть подмножество* $S_f \subset R_f$ *состоит из орбит, содержащих пары* (A, φ) *такие, что* A *удовлетворяет условиям предложения* 3. *Тогда* $|S_f| \sim q^n/2$.

Из предложений 1, 2, 3 и лемм 1 и 2 следует доказательство теоремы 1.

10. Теорема 2. *Если* $n = 2k+1$, *то* $T(q)$ *совпадает с* $\operatorname{Ind}_{SO(f)}^{GL(n, \mathbf{F}q)}(\operatorname{sign}^! f)$, *где* $f \in \mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 2 следует из того, что в случае нечетного n $O(f_0)$ изоморфно $O(f_1)$.

В заключение автор выражает глубокую признательность авторам статьи [1] за постановку задачи и постоянную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, Модели представлений групп, Труды семинара имени И. Г. Петровского, вып. 2 (1976), 3—21.

[2] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, Новая модель представлений конечных полупростых алгебраических групп, УМН **29**:3 (1974), 185—186.

[3] Ж.-П. Серр, Курс арифметики, М., «Мир», 1972.

[4] Семинар по алгебраическим группам, Сборник статей, М., «Мир», 1973 г.

Поступило в Правление общества 15 марта 1977 г.