ЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
ом 17 1979 № 5

УДК 536.252

РОСТРАНСТВЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДВИЖУЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Мартинсон Л. К.

Показано, что в движущихся средах, коэффициент теплопроводности которых зависит от температуры по степенному закону, может образовываться стационарная поверхность, отделяющая область теплового возмущения от области, в которую возмущения от источника тепла не проникают. Такая конвективная пространственная локализация тепла обусловлена конечной скоростью распространения тепловых возмущений в нелинейных средах.

Процесс распространения тепла в среде с коэффициентом теплопроводности k, зависящим от температуры u по степенному закону $k=k_0u^\sigma$, $\sigma>0$, в отсутствие объемных источников тепла описывается [1] квазилинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\operatorname{div}(u^\sigma\operatorname{grad}u). \tag{1}$$

Это уравнение описывает, в частности, распространение тепла в высокотемпературных средах, когда перенос тепла осуществляется за счет лучистой и электронной теплопроводности [2].

Особенности процесса распространения тепловых возмущений в нелинейной среде могут быть выявлены из анализа решения следующей краевой задачи для уравнения (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\operatorname{div}(u^\sigma\operatorname{grad}u),\qquad M\in G,\qquad t>0, \tag{2}$$

$$u(M,0)=0,\quad u(M,t)=u_0=\text{const}\ \text{для}\ M\in S.$$

Здесь $u(M,t)$ — температура точки $M(x,y,z)$ в момент времени t; S — некоторая замкнутая поверхность, температура которой в начальный момент времени принимает значение $u_0>0$, не изменяющееся при $t>0$; G — внешняя область пространства. При решении задачи предполагаются выполненными естественные условия равенства нулю температуры и теплового потока на бесконечности.

Распространение тепловых возмущений от поверхности S (источника возмущений) в нелинейной среде качественно отличается от их распространения в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности. Из [2–5] следует, что одной из характерных особенностей процесса в нелинейной среде является конечная скорость распространения тепловых возмущений. Это означает, что для задачи (2) в любой конечный момент времени область, где $u>0$, имеет конечные размеры. При этом ее граница представляет собой замкнутую поверхность, соответствующую поверхности фронта температурной волны, распространяющейся от источника тепловых возмущений с конечной скоростью. В задаче (2) скорость распространения фронта температурной волны всегда уменьшается со вре-

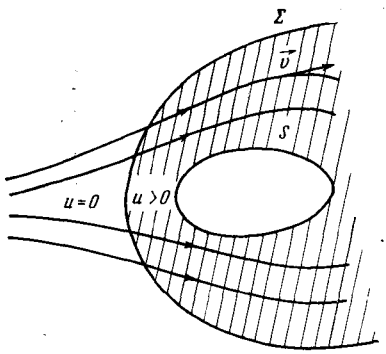
менем, однако при $t \to +\infty$ область возмущения неограниченно возрастает.

Предположим теперь, что процесс теплопереноса происходит в движущейся нелинейной среде, где задано стационарное поле скоростей $\mathbf{v}(M)$. С учетом конвективного переноса тепла распространение тепловых возмущений опишется краевой задачей

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\mathbf{v}), \quad M \in G, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u(M, 0) = 0, \quad u(M, t) = u_0 \text{ для } M \in S.$$

Конвективный перенос тепла изменяет характер распространения фронта температурной волны [6]. В некоторых направлениях, встречных направлению движения среды, фронт температурной волны может проникать в движущуюся среду лишь на конечное расстояние от источника тепловых возмущений. Поэтому при наличии конвективного переноса тепла в нелинейной среде даже при $t \to +\infty$ может существовать невозмущенная область (где $u=0$), ограниченная стационарной поверхностью Σ (см. рисунок), за пределы которой тепловые возмущения не проникают. Для наглядности на рисунке область возмущения при $t \to +\infty$ заштрихована.



Таким образом, в тепловых процессах в движущихся нелинейных средах следует ожидать появления эффекта, аналогичного образованию стационарной поверхности возмущения при сверхзвуковом обтекании тела потоком сжимаемого газа или образованию такой поверхности при движении заряженной частицы со скоростью, превышающей скорость распространения электромагнитных возмущений в среде. При наличии такой поверхности будем говорить о пространственной локализации тепловых возмущений, обусловленной конвективным переносом тепла.

Для подтверждения этого вывода рассмотрим ряд модельных задач, в которых форма и расположение в пространстве поверхности Σ могут быть найдены точно. В этих задачах рассматриваются простейшие поля скоростей, для реализации которых в некоторых случаях изотермическая поверхность S будет считаться проницаемой.

В силу того, что решение эволюционной задачи (3) при $t \to +\infty$ стремится к стационарному, поверхность Σ может быть найдена из решения стационарной задачи для функции $u(M)$

$$a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) = \operatorname{div}(u, \mathbf{v}), \; M \in G; \; u(M) = u_0 \text{ для } M \in S. \tag{4}$$

Искомая поверхность Σ в общем случае является поверхностью слабого разрыва функции u, так как непрерывность этой функции в любой точке пространства вытекает из физического условия непрерывности температуры. С другой стороны, уже первые производные функции u могут терпеть разрыв на Σ из-за того, что физическое условие непрерывности теплового потока $\mathbf{Q} = -k_0 u^\sigma \operatorname{grad} u$ на этой поверхности не требует в общем случае непрерывности градиента температуры.

Задача 1. Источником тепловых возмущений (поверхность S) является плоскость $x=0$, температура которой считается равной $u_0 > 0$. Движение среды с постоянной скоростью v_0 происходит в направлении оси x. В этом случае стационарное распределение температуры в движущейся нелинейной среде может быть найдено из решения задачи

$$a^2\frac{d}{dx}\left(u^\sigma\frac{du}{dx}\right)=v_0\frac{du}{dx},\qquad x<0; \tag{5}$$

$$u(0)=u_0,\quad u(-\infty)=0.$$

Это решение имеет вид [6]

$$u(x)=\begin{cases} u_0[1+(x/x_+)]^{1/\sigma} & \text{при} \quad -x_+<x\leqslant 0,\\ 0 & \text{при} \quad x\leqslant -x_+,\end{cases} \tag{6}$$

где

$$x_+=a^2u_0^\sigma/v_0\sigma. \tag{7}$$

Анализ решения (6) показывает, что поверхность Σ представляет собой плоскость $x=-x_+$. Глубина проникновения тепловых возмущений при этом зависит от температуры u_0 и скорости потока v_0. При $v_0\to 0$ $x_+\to+\infty$, и пространственной локализации тепловых возмущений не наблюдается. Кроме того, глубина проникновения тепловых возмущений в движущуюся среду неограниченно возрастает при переходе к линейной среде с постоянным коэффициентом теплопроводности. Действительно, из (7) следует, что $x_+\to+\infty$ при $\sigma\to 0$.

Задача 2. Рассмотрим задачу о тепловом пограничном слое на пластине, имеющей температуру $u_0>0$, обтекаемой потоком несжимаемой жидкости, коэффициент теплопроводности которой зависит от температуры по степенному закону. Предположим, что толщина теплового пограничного слоя много больше толщины вязкого пограничного слоя. Кроме того, будем считать, что молекулярной теплопроводностью в направлении оси x можно пренебречь по сравнению с конвективным переносом тепла.

Расчет стационарного температурного поля в жидкости в этом случае сводится к решению уравнения

$$a^2\frac{\partial}{\partial y}\left(u^\sigma\frac{\partial u}{\partial y}\right)=v_0\frac{\partial u}{\partial x},\qquad (x>0,\ y>0) \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u(x,\ 0)=u_0,\quad u(0,\ y)=0,\quad u(x+\infty)=0. \tag{9}$$

Используя результаты [5], решение задачи (8), (9) запишем в виде

$$u(x,y)=\begin{cases} u_0B^{-1}\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_i\left(1-\dfrac{y}{C\sqrt{x}}\right)^{i+(1/\sigma)} & \text{при} \quad y<C\sqrt{x},\\ 0 & \text{при} \quad y\geqslant C\sqrt{x},\end{cases} \tag{10}$$

где $B=\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_i$; $b_i=b_i(\sigma)$ — известная последовательность коэффициентов [5]; константа C определяется выражением

$$C^2=2a^2u_0^\sigma[v_0\sigma B^\sigma]^{-1}. \tag{11}$$

Анализ решения (10) показывает, что поверхность возмущения в этой задаче определяется уравнением

$$y=Cx^{1/2}. \tag{12}$$

С физической точки зрения пространственная локализация тепловых возмущений в этой задаче означает конечную толщину теплового пограничного слоя. Из (11), (12) следует, что с увеличением скорости потока толщина пограничного слоя уменьшается.

Заметим, что предположение об однородности потока в рассматриваемой задаче не является принципиальным с точки зрения обсуждаемого эффекта. Исследования, проведенные в [7], указывают на наличие такого эффекта и при более сложном поле скоростей в вязком пограничном слое.

Задача 3. Пусть поверхность S представляет собой сферу радиуса r_0, а поле скоростей в области $r>r_0$ соответствует полю точечного стока, помещенного в центре сферы ($v_r=-qr^{-2}$, где q — параметр, характеризующий сток).

Стационарное распределение температуры найдем из решения краевой задачи

$$\frac{a^2}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2u^\sigma\frac{du}{dr}\right)=-\frac{q}{r^2}\frac{du}{dr},\qquad r>r_0; \tag{13}$$

$$u(r_0)=u_0,\quad u(+\infty)=0.$$

Анализ (13) показывает, что существует критическое значение параметра $q_{\text{кр}}=u_0^\sigma a^2 r_0\sigma^{-1}$: задача (13) имеет качественно различные решения при $q>q_{\text{кр}}$ и $q<q_{\text{кр}}$.

Вводя обозначения

$$w=\frac{u}{u_0},\qquad \xi=\frac{1}{r},\qquad \xi_0=\frac{1}{r_0},\qquad \xi_+=\frac{1}{r_+}=\xi_0\left(1-\frac{q_{\text{кр}}}{q}\right), \tag{14}$$

рассмотрим два тепловых режима в задаче (13).

Режим с локализацией тепловых возмущений ($q>q_{\text{кр}}$). Решение задачи (13) имеет вид

$$w(\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{\xi-\xi_+}{\xi_0-\xi_+}\right)^{1/\sigma} & \text{при}\quad \xi_+<\xi\leqslant\xi_0,\\ 0 & \text{при}\quad \xi\leqslant\xi_+.\end{cases} \tag{15}$$

Поверхность возмущения представляет собой сферическую поверхность радиуса r_+, величина которого определяется параметрами задачи в соответствии с (14). В частности, с увеличением температуры тепловые возмущения от сферы проникают в движущуюся среду на бо́льшие расстояния.

При $q\to q_{\text{кр}}$ $r_+\to+\infty$, и согласно (15) распределение температуры в этом предельном случае определяется зависимостью

$$u(r)=u_0(r_0/r)^{1/\sigma},\quad r\geqslant r_0. \tag{16}$$

Режим без пространственной локализации тепловых возмущений ($q<q^{\text{кр}}$). Для этого случая решение задачи (13) может быть найдено в виде неявной зависимости $\xi=\xi(w)$

$$\frac{\xi}{\xi_0}=\sigma\frac{q_{\text{кр}}}{q}\int_0^w\frac{z^\sigma\,dz}{z+A}, \tag{17}$$

где положительная константа A определяется из соотношения

$$\int_0^1\frac{z^\sigma\,dz}{z+A}=\sigma^{-1}\frac{q}{q_{\text{кр}}}. \tag{18}$$

Отметим, что квадратуры в (17) и (18) могут быть выражены через гипергеометрические функции [8].

Из (18) следует, что при $q\to q_{\text{кр}}$ $A\to0$. Тогда из (17) также получается предельное распределение (16).

Следовательно, в задаче 3 пространственная локализация тепловых возмущений наблюдается только для достаточно больших значений мощности стока. При $q \leqslant q_{кр}$ в нестационарном процессе распространения температурной волны от источника тепловых возмущений фронт волны уходит на бесконечность, и стационарной поверхности возмущения на конечных расстояниях от сферы не существует.

Таким образом, результаты, полученные в настоящей работе, указывают на возможность конвективной локализации тепла в движущихся средах с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры. Этот эффект локализации тепла обусловлен конечной скоростью распространения тепловых возмущений в таких средах.

Московское высшее техническое
училище им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
25 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* Уравнения математической физики. «Наука», 1966.
2. *Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. «Наука», 1966.
3. *Г. И. Баренблатт.* ПММ, *16*, № 1, 67, 1952.
4. *О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу Юй-линь.* Изв. АН СССР. Сер. матем., *22*, № 5, 667, 1958.
5. *А. А. Самарский, И. М. Соболь.* ЖВМ и МФ, *3*, № 4, 702, 1963.
6. *И. С. Граник, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов.* ЖВМ и МФ, *14*, № 5, 1340, 1974.
7. *К. Б. Павлов, Л. Д. Покровский.* ПМТФ, № 1, 93, 1978.
8. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.