МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 24, № 3 (1978)

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

Л. В. Розовский

1. Введение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 1$ — независимые случайные величины, b — некоторая постоянная

$$F_n(x) = P\{X_1 + \ldots + X_n - b < x\},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt,$$

$$\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|.$$

В настоящей статье получена оценка снизу для Δ_n. Полученный результат применяется для оценки остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме. Здесь продолжаются исследования И. А. Ибрагимова, Л. В. Осипова, А. П. Бикялиса и других авторов ([1] — [5]).

Введем некоторые обозначения. Пусть $V_k(x) = P\{X_k < x\}$, τ — некоторое положительное число,

$$a_k(\tau) = \int_{|x|<\tau} x V_k(dx), \quad \overline{V}_k(x) = V_k(x + a_k(\tau)), \quad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

$$\nu_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{|x|\leqslant 1} x^2 \overline{V}_k(dx)\right)^2, \quad \overline{\Theta}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{V}_k(x);$$

$$\Gamma_n = \int_{|x|>1} \overline{\Theta}_n(dx) + \left|b - \sum_{k=1}^{n} a_k(\tau)\right| + \left|1 - \int_{|x|\leqslant 1} x^2 \overline{\Theta}_n(dx)\right| + \left|\int_{|x|\leqslant 1} x^3 \overline{\Theta}_n(dx)\right| + \int_{|x|\leqslant 1} x^4 \overline{\Theta}_n(dx).$$

Далее, условимся, что выражения C, $C(\ldots)$, с индексами или без них, обозначают конечные положительные постоянные, зависящие лишь от указанных в скобках аргументов, не всегда одни и те же.

2. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |a_k(\tau)| < \tau/2. \tag{1}$$

Существует постоянная $C_0(\tau)$ *такая, что*

$$\Gamma_n\cdot(C_0(\tau) - \Gamma_n) < \Delta_n + \nu_n. \tag{2}$$

Сделаем несколько замечаний относительно величины ν_n. Выполняются неравенства

$$(1 - \Gamma_n)/n \leqslant \nu_n \leqslant \Gamma_n. \tag{3}$$

Кроме того, если $\Gamma_n \leqslant 1/2$ и

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \int_{|x|\leqslant 1} x^2\overline{V}_k(dx) \leqslant C(\tau) \min_{1\leqslant k\leqslant n} \int_{|x|\leqslant 1} x^2\overline{V}_k(dx), \tag{4}$$

то

$$1/(2n) \leqslant \nu_n \leqslant C_1(\tau)/n,$$

в частности, если величины $X_1, \ldots, X_n$ распределены одинаково,

$$1/(2n) \leqslant \nu_n \leqslant 3/(2n). \tag{5}$$

3. Некоторые следствия (многомерный случай). Пусть $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $t = (t_1, \ldots, t_d)$ — векторы d-мерного евклидова пространства R_d; $|t|$, $|x|$, (t, x) — нормы векторов t, x и их скалярное произведение; $\mathfrak{M}$ — класс всех выпуклых борелевских множеств в R_d и их дополнений; $\mathfrak{B}$ — класс борелевских множеств A в R_d. Распространим обозначения, данные ранее, на многомерный случай. Пусть теперь $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n \geqslant 1$ — независимые случайные векторы в R_d, b — вектор в R_d; $F_n(x)$, $V_k(x)$, $\Phi(x)$ — функции распределения суммы $\sum_{k=1}^{n} X_k - b$, случайного вектора X_k и стандартного нормального вектора в R_d, соответственно; $\Delta_n = \sup_{A\in\mathfrak{M}} \left|\int_A (F_n - \Phi)(dx)\right|$.

В соответствии с предыдущим, положим

$$a_k(\tau) = \left(\int_{|x|\leqslant\tau} x_1 V_k(dx), \ldots, \int_{|x|\leqslant\tau} x_d V_k(dx)\right),$$

$$\overline{V}_k(x) = V_k(x + a_k(\tau)),$$

$$\nu_n = \sup_{|t|=1} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{|(t,\, x)|\leqslant 1} (t, x)^2\, \overline{V}_k(dx)\right)^2,$$

$$\overline{\Theta}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{V}_k(x);$$

$$\Gamma_n = \sup_{|t|=1} \Big[\int_{|(t,\, x)|>1} \overline{\Theta}_n(dx) + \Big|\Big(t, b - \sum_{k=1}^{n} a_k(\tau)\Big)\Big| + \\ + \Big|1 - \int_{|(t,\, x)|\leqslant 1} (t, x)^2\, \overline{\Theta}_n(dx)\Big| + \\ + \Big|\int_{|(t,\, x)|\leqslant 1} (t, x)^3\, \overline{\Theta}_n(dx)\Big| + \int_{|(t,\, x)|\leqslant 1} (t, x)^4\, \overline{\Theta}_n(dx)\Big].$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполняется условие* (1). *Существуют постоянные* $C_0(\tau)$ *и* $C_1(\tau, d)$ *такие, что*

$$\Gamma_n \cdot (C_0(\tau) - \Gamma_n) < \Delta_n + \nu_n < C_1(\tau, d)\ (\Gamma_n + \\ + T_n(\lambda_n\ (1/12))). \qquad (6)$$

$$\Big(\text{Здесь } T_n(\varepsilon) = \min_{T>1/\varepsilon} \Big(\frac{1}{T} + \int_{|t|/\varepsilon\leqslant T} (1 + |t|^{d+4})\, e^{-Z_n(t)}\, dt\Big),$$

$$\varepsilon > 0; \quad Z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (1 - |E e^{i(t,\, X_k)}|),$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = \min\Big(\lambda\colon \sup_{|t|=1} \int_{\lambda<|(t,\, x)|\leqslant 1} (t, x)^2\, \overline{\Theta}_n(dx) \leqslant \varepsilon\Big).$$

Доказательство. Нижняя оценка в (6) вытекает из теоремы 1 и соотношения

$$\sup_{|t|=1} \sup_{z} \Big|\int_{(t,\, x)<z} (F_n - \Phi)(dx)\Big| \leqslant \Delta_n,$$

верхняя оценка является следствием результатов работы [5]. Отметим, что в [5] приводятся некоторые эквивалентные представления для Γ_n и подробно обсуждаются свойства $\lambda_n(\varepsilon)$, например, показано, что

$$T_n(\lambda_n(\varepsilon)) \leqslant \lambda_n(\varepsilon) \leqslant \sqrt{\Gamma_n/\varepsilon}. \qquad (7)$$

Автору не удалось получить общие и достаточно простые условия, при которых

$$T_n(\lambda_n(\varepsilon)) \leqslant C(d, \tau, \varepsilon)\, \Gamma_n.$$

Поэтому в настоящей работе выражение $T_n(\lambda_n(1/12))$ не будет заменяться каким-либо другим в формулировках дальнейших теорем.

Приведем некоторые следствия теоремы 2. Рассмотрим последовательность серий независимых в каждой серии случайных векторов X_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условию бесконечной малости:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} P\{|X_{nk}| > \varepsilon\} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$.

Пусть в обозначениях предыдущих параграфов

$$X_k = X_{nk}, \quad V_k(x) = V_{nk}(x), \quad \overline{V}_k(x) = \overline{V}_{nk}(x),$$
$$a_k(\tau) = a_{nk}(\tau), \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \quad b = b_n.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* ε_n — *положительная последовательность такая, что* $\varepsilon_n \geqslant \nu_n$. *Если* $\limsup\limits_{n\to\infty} \Gamma_n < \infty$ *и*

$$T_n(\lambda_n(1/12)) = O(\varepsilon_n), \qquad n \to \infty, \tag{8}$$

то соотношение

$$\Delta_n = O(\varepsilon_n), \qquad n \to \infty,$$

выполняется тогда, и только тогда, когда

$$\Gamma_n = O(\varepsilon_n), \qquad n \to \infty.$$

Заметим, что если ν_n не стремится к нулю с ростом n, то и Δ_n также не убывает к нулю при $n \to \infty$; если $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$, то и $\Gamma_n \to 0$, $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\limsup\limits_{n\to\infty} \Gamma_n < \infty$ *и* $T_n(\lambda_n(1/12)) = O(\Gamma_n)$, $n \to \infty$. *Тогда* $\Delta_n + \nu_n \asymp \Gamma_n$, $n \to \infty$.

Предположим теперь, что случайные векторы X_{nk} имеют конечные вторые моменты, $1 \leqslant k \leqslant n$. Будем также считать, что

$$EX_{nk} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} E(t, X_{nk})^2 = |t|^2, \tag{9}$$

т. е. суммы $X_{n1} + \ldots + X_{nn}$, $n = 1, 2, \ldots$, соответствующим образом центрированы и нормированы.

Положим

$$\Theta_n(x) = \sum_{k=1}^{n} V_{nk}(x), \quad \tilde{\nu}_n = \sum_{k=1}^{n} (E|X_{nk}|^2)^2,$$

$$\widetilde{\Delta}_n = \Delta_n|_{b=0}, \quad \widetilde{\Gamma}_n = \int_{|x|>1} |x^2|\,\Theta_n(dx) + \\ + \sup_{|t|=1} \left| \int_{|x|\leqslant 1} (t,x)^3\,\Theta_n(dx) \right| + \int_{|x|\leqslant 1} |x|^4\,\Theta_n(dx),$$

$$\widetilde{\lambda}_n(\varepsilon) = \min\left(\lambda\colon \int_{|x|>\lambda} |x|^2\,\Theta_n(dx) \leqslant \varepsilon\right).$$

(Отметим, что $\widetilde{\Gamma}_n \leqslant 2$ при всех n.)

В предположении условия (9) из теоремы 2 вытекает

ТЕОРЕМА 5. *Найдутся постоянные C и $C\,(d)$ такие, что*

$$\widetilde{\Gamma}_n \cdot (C - \widetilde{\Gamma}_n) \leqslant \widetilde{\Delta}_n + \widetilde{\nu}_n \leqslant C\,(d)\,(\widetilde{\Gamma}_n + T_n(\widetilde{\lambda}_n(1/16))).$$

Аналогично можно переформулировать теоремы 3 и 4. Заметим, что если

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} E\,|X_k|^2 = O\left(\min_{1\leqslant k\leqslant n} E\,|X_k|^2\right), \qquad n\to\infty,$$

то

$$\gamma_n \asymp n^{-1}, \qquad n\to\infty.$$

4. Доказательство теорем. Мы опять рассматриваем одномерный случай ($d = 1$). Обозначим

$$f_k(t) = Ee^{itX_k}, \quad \bar f_k(t) = e^{-ita_k(\tau)} f_k(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

ЛЕММА 1. *Пусть выполняется условие* (1) *и* $\Gamma_n \leqslant 0{,}1$. *Тогда существует постоянная $C\,(\tau)$ такая, что при всех* $|t| \leqslant 0{,}2$

$$\prod_{k=1}^n f_k(t)\,e^{-itb} - e^{-t^2/2}(1 + \delta_n(t)) = \theta(\nu_n + \Gamma_n^2), \qquad (10)$$

где $|\theta| \leqslant C(\tau),\ \delta_n(t) = \sum_{k=1}^n (\bar f_k(t) - 1) - \\ - it\left(b - \sum_{k=1}^n a_k(\tau)\right) + t^2/2.$

Доказательство. В условиях леммы 1 имеем

$$|\bar f_k(t) - 1| \leqslant 2\int_{|x|>1} \bar V_k(dx) + |t| + t^2/2 < \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\log \prod_{k=1}^n f_k(t)\,e^{-ita_k(\tau)} = \sum_{k=1}^n (\bar f_k(t) - 1) + \theta \sum_{k=1}^n |\bar f_k(t) - 1|^2,$$

где $|\theta| \leqslant C_1(\tau)$.

Поскольку (см. [6, стр. 88])

$$\sup_{|t|\leqslant 0,2} |\bar{f}_k(t) - 1| \leqslant C_2(\tau)\left(\int_{|x|>1} \bar{V}_k(dx) + \int_{|x|\leqslant 1} x^2 \bar{V}_k(dx)\right),$$

$$\log e^{-itb+t^2/2} \prod_{k=1}^{n} f_k(t) = \delta_n(t) +$$
$$+ \theta\left(\nu_n + \Gamma_n \max_{1\leqslant k\leqslant n} \int_{|x|>1} \bar{V}_k(dx)\right). \quad (11)$$

Отсюда и из соотношений $|\delta_n(t)| \leqslant C_4(\tau)\Gamma_n$, $\nu_n \leqslant \Gamma_n$ имеем

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(t) e^{-itb+t^2/2} = 1 + \delta_n(t) +$$
$$+ \theta\left(\nu_n + \Gamma_n \cdot \left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \int_{|x|>1} \bar{V}_k(dx) + \sup_{|t|\leqslant 0,2} |\delta_n(t)|\right)\right). \quad (12)$$

Утверждение леммы 1 следует теперь из (12).

Далее, имеет место следующая простая

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$g(z) = z^{-2}(\cos z - 1 + z^2/2).$$

Тогда при всех z, $-\infty < z < \infty$

$$4g(2z) - g(4z) \geqslant \min(1;\ z^4)/8. \quad (13)$$

Пусть

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} t(u-t)e^{t^2/2}, & 0 \leqslant t \leqslant u, \\ 0, & t < 0, t > u, \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \hat{y}(t)\, dt, \quad \Delta_n(x) = F_n(x) - \Phi(x),$$

$$\hat{\Delta}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Delta_n(dx),$$

$$s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{z} \frac{\sin y}{y}\, dy.$$

Применяя к функциям

$$\Delta_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} S(\varepsilon(x-y))\, \Delta_n(dy), \qquad y(x)$$

и

$$(-it)^{-1} \hat{\Delta}_n(t) \ (1 - s(\varepsilon t)), \ \hat{y}(t) \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

равенство Парсеваля, и устремляя в нем ε к нулю, получим

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Delta}_n(t) \frac{\hat{y}(t)}{t}\, dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x)\, y(x)\, dx\right|. \quad (14)$$

Правая часть равенства (14) не превосходит $C\cdot\Delta_n$, в то время как левая часть (см. лемму 1) равна

$$\left|\int_0^u\int_0^t \delta_n(z)\,dz\,dt\right| + \theta(\nu_n+\Gamma_n^2), \qquad |\theta|\leqslant C_5(\tau), \tag{15}$$

при любом положительном $u\leqslant 0{,}2$.

Пусть

$$R(u)=\operatorname{Re}\int_0^u\int_0^t\delta_n(z)\,dz\,dt = u^2\int_{-\infty}^{\infty} g(ux)\,\overline{\Theta}_n(dx)-\frac{u^4}{4\,!}.$$

Положим $u_0=0{,}05$. Из (14), (15) и леммы 2 вытекают следующие оценки:

$$C_1\left(\int_{|x|>1}\overline{\Theta}_n(dx)+\int_{|x|\leqslant 1}x^4\overline{\Theta}_n(dx)\right)\leqslant 16R(2u_0)-R(4u_0)\leqslant$$
$$\leqslant 17\sup_{0\leqslant u\leqslant 0,2}|R(u)|\leqslant C_2(\tau)(\Delta_n+\nu_n+\Gamma_n^2). \tag{16}$$

Теперь

$$R(u)=\frac{u^4}{4\,!}\left(\int_{|x|\leqslant 1}x^2\overline{\Theta}_n(dx)-1\right)+$$
$$+\theta\left(u^2\int_{|x|>1}\overline{\Theta}_n(dx)+u^4\int_{|x|\leqslant 1}x^4\overline{\Theta}_n(dx)\right)$$

и, следовательно,

$$\left|1-\int_{|x|\leqslant 1}x^2\overline{\Theta}_n(dx)\right|\leqslant C_3(\tau)(\Delta_n+\nu_n+\Gamma_n^2). \tag{17}$$

Далее, при всех положительных u

$$\operatorname{Im}\int_0^u\int_0^t\delta_n(z)\,dz\,dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ux-ux}{x^2}\overline{\Theta}_n(dx)-\frac{u^3}{3\,!}\left(b-\sum_{k=1}^n a_k(\tau)\right)=$$
$$=-\frac{u^3}{3\,!}\left(b-\sum_{k=1}^n a_k(\tau)\right)+\frac{u^5}{5\,!}\int_{|x|\leqslant 1}x^3\Theta_n(dx)+$$
$$+\theta\left(\int_{|x|>1}\overline{\Theta}_n(dx)+\int_{|x|\leqslant 1}x^4\overline{\Theta}_n(dx)\right), \qquad |\theta|\leqslant C_5(\tau).$$

Отсюда и из (14) — (17) легко выводим

$$C_0(\tau)\ \Gamma_n\leqslant\Delta_n+\nu_n+\Gamma_n^2,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Для доказательства необходимости в теореме 3 и оценки снизу в теореме 4 покажем, что Γ_n и ν_n стремятся к нулю с ростом n, если при выполнении условия бесконечной малости $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$ (если $\Delta_{n_k} \not\to 0$ для какой-либо стремящейся к бесконечности подпоследовательности n_k, то доказываемые утверждения становятся тривиальными, поскольку Γ_n равномерно ограничено).

Имеем

$$\nu_n \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} \left(\int_{|x|\leqslant 1} |x|^2 \overline{V}_{nk}(dx) + \int_{|x|>1} \overline{V}_{nk}(dx)\right) \cdot$$
$$\cdot \max_{1\leqslant l\leqslant d} \left(\int_{|x_l|\leqslant 1} x_l^2 \overline{\Theta}_n (dx) + \int_{|x_l|>1} \Theta_n(dx)\right).$$

Первый множитель суть $o(1)$, $n \to \infty$, в силу условия бесконечной малости, второй — равномерно ограничен по n, если $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$ (см. [6, стр. 92]). Таким образом, если $\Delta_n \to 0$, то и $\nu_n \to 0$, $n \to \infty$.

Тот факт, что $\Gamma_n \to 0$, $n \to 0$, если $\Delta_n \to 0$, $n \to \infty$, можно либо вывести непосредственно из центральной предельной теоремы [6, стр. 119], либо доказать (чтобы обеспечить замкнутость изложения) по аналогии с [4, стр. 74], исходя из соотношений (11), (12), (14) и далее.

Всесоюзный научно-исследовательский институт торфяной промышленности

Поступило
29.X.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ибрагимов И. А., О точности аппроксимации функции распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Теория вероятн. и ее примен., 11, № 4, (1966), 632—655.
[2] Осипов Л. В., О точности приближения распределения суммы независимых случайных величин к нормальному распределению, Докл. АН СССР, 178, № 5 (1968), 1013—1016.
[3] Бикялис А. П., О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин нормальным распределением, Литовск. матем. сб., 2, (1971), 237—240.
[4] Розовский Л. В., О скорости сходимости в теореме Линдеберга — Феллера, Вестник ЛГУ, Сер. матем., механ., астроном., 19, № 1 (1974), 70—75.
[5] Розовский Л. В., Оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме без моментных предположений, Матем. заметки, 23, № 4 (1978), 627—640.
[6] Петров В. В., Суммы независимых случайных величин, М., «Наука», 1972.