М. В. Ружанский, Регулярность параметрикса задачи с косой производной, *УМН*, 2001, том 56, выпуск 6, 137–138

2001 г. ноябрь — декабрь *т. 56, вып. 6(342)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

РЕГУЛЯРНОСТЬ ПАРАМЕТРИКСА ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

М. В. Ружанский

В статье даются L^p-оценки для оператора решения задачи с косой производной [1], [2]. Анализ базируется на представлении параметрикса задачи с косой производной в виде интегрального оператора Фурье с комплекснозначной фазовой функцией.

Пусть X – компактное многообразие размерности n, и пусть Γ – гладкая замкнутая гиперповерхность в X. Будем предполагать, что $X \setminus \Gamma$ представимо как объединение открытых непересекающихся множеств X_+ и X_-, для которых Γ – их общая граница. Будем обозначать через S_c^m пространство классических символов порядка m, т.е. подпространство пространства символов $S_{1,0}^m$, содержащее символы a, которые локально в каждом открытом конусе V разлагаются в асимптотический ряд

$$a(x,\theta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(x,\theta),$$

где a_{m-j} положительно однородны порядка $m-j$ по θ. Пространство символов $S_{1,0}^m$ состоит из гладких функций a, для которых локально однородно по x выполнена оценка

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x,\theta)| \leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\theta|)^{m-|\beta|}$$

для всех мультииндексов α и β. Класс псевдодифференциальных операторов в X с символами из S_c^m обозначается через $\Psi_c^1(X)$.

Пусть оператор $P \in \Psi_c^1(X)$ имеет вид

$$P(x,D_x) = m(x,D_x) + iQ(x,D_x), \tag{1}$$

где $D_x = -i\partial_x$, $m(x,\partial_x)$ – вещественное векторное поле на X и $Q \in \Psi_c^1(X)$ имеет вещественный главный символ q. Предположим также, что q постоянного знака в X_+ и в X_-, т.е. $q(x,\xi) \leqslant 0$ для $x \in X_+$ и $q(x,\xi) \geqslant 0$ для $x \in X_-$. Обозначим через K множество точек $x \in X$ таких, что $q(x,\xi)=0$ для некоторого $\xi \neq 0$. В частности, имеем $\Gamma \subset K$, так как $q(x,\xi)=0$ для всех $x \in \Gamma$. Предположим также, что

1) $m(x,D_x)$ не обращается в нуль на K;

2) ни одна из максимальных интегральных кривых поля m не содержится полностью в K;

3) m пересекает Γ трансверсально и направлено в сторону X_+.

Свойства фундаментальных решений оператора P изучались многими авторами (см. [1] и библиографию в [2]). Обозначим через E правый параметрикс для P, т.е. имеем $P \circ E \equiv I$ и $E \circ P \equiv I - F_+$, где F_+ – интегральный оператор Фурье положительного типа нулевого порядка. Положительный тип здесь означает, что в локальных координатах мнимая часть фазовой функции оператора неотрицательна. Такие операторы изучены в [3]–[5].

Несложно убедиться, что на дополнении к характеристическому множеству оператора P существует единственный микролокальный параметрикс $P^{-1} \in \Psi^{-1}(X)$, задаваемый оператором E. В [2] показано, что E непрерывен из $(L^2_\alpha)_{\mathrm{comp}}(X_\pm)$ в $L^2_\alpha(X)$ и из $L^2_\alpha(X)$ в $L^2_\alpha(X)$ для всех α. Применяя оценки в L^p для интегральных операторов Фурье с комплексными фазовыми функциями и дополнительный анализ в окрестности Γ, можно получить дополнительные свойства регулярности параметрикса оператора P.

Теорема 1. *Пусть P удовлетворяет условиям* 1)–3). *Тогда оператор E непрерывен из $(L^p_{\alpha+(n-1)|1/p-1/2|})_{\mathrm{comp}}(X_\pm)$ в $L^p_\alpha(X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $1 < p < \infty$. Более того, E непрерывен из $L^2_{\alpha+n(1/2-1/q)}(X)$ в $L^p_\alpha(X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $p \geqslant 2$.*

Основная трудность при доказательстве второго утверждения заключается в том, что хотя интегральные операторы Фурье $\exp(-itP) \circ \pi_\pm$ нулевого порядка в X, в окрестности Γ требуются дополнительные оценки. Из этих операторов интегрированием по t получается оператор E (см. [3]). Оценки для интегральных операторов Фурье с комплексными фазовыми функциями получаются аналогично стандартным L^p-оценкам, описанным в [6]. Используя L^p-непрерывность из теоремы 1 и непрерывность операторов порядка $-n/2$ из пространства Харди H^1 в L^2 (см., например, [6]) в качестве граничных условий для метода комплексной интерполяции, можно получить также и $L^p - L^q$ результат.

Теорема 2. *Пусть P удовлетворяет условиям* 1)–3). *Пусть $1 < p \leqslant q \leqslant 2$. Тогда оператор E непрерывен из $(L^p_{\alpha+|1/q-n/p+(n-1)/2|})_{\mathrm{comp}}(X_\pm)$ в $L^q_\alpha(X)$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Двойственный результат выполнен для $2 \leqslant p \leqslant q < \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] В. Г. Мазья, Б. П. Панея // Функц. анализ и его прил. 1969. Т. 3. С. 159–160. [**2**] A. Melin, J. Sjöstrand // Comm. Partial Differential Equations. 1976. V. 1. P. 313–400. [**3**] A. Melin, J. Sjöstrand // Lecture Notes in Math. 1975. V. 459. P. 120–223. [**4**] Л. Хёрмандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. III, IV. М.: Мир, 1968–1988. [**5**] Ю. В. Егоров. Микролокальный анализ // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 33: ВИНИТИ, 1988. [**6**] М. В. Ружанский // УМН. 2000. Т. 55. С. 99–170.

Имперский колледж, Лондонский университет
E-mail: `ruzh@ic.ac.uk`

Принято редколлегией
24.09.2001