



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Р. Вайнерман, О приближении функций класса $H_{\omega_2}^2$ тригонометрическими интерполяционными многочленами с равноотстоящими узлами,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 6, 913–926

<https://www.mathnet.ru/mzm6480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

23 апреля 2025 г., 02:17:35



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 6 [1980]

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА $H_{\omega_2}^2$ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

Ю. Р. Вайнерман

Пусть $n = 1, 2, \dots$; $h = h_n = \pi(n + 1/2)^{-1}$; $x_k = x_k^{(n)} = kh$, $k = 0, \pm 1, \dots$; $-\infty < x < \infty$;

$$l_k^{(n)}(x) = (-1)^{k+1} \left[(2n+1) \sin \frac{x_k - x}{2} \right]^{-1} \sin(n+1/2)x,$$

f — непрерывная 2π -периодическая функция;

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x);$$

$$R_n(f, x) = L_n(f, x) - f(x); \quad \mathcal{E}(L_n, \mathfrak{M}, x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} |R_n(f, x)|$$

— уклонение тригонометрического интерполяционного процесса с равноотстоящими узлами на классе функций \mathfrak{M} в точке x ; $\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} |l_k^{(n)}(x)|$ — функция Лебега рассматриваемого процесса;

$$\Delta_{\eta} f(t) = \Delta_{\eta}^1 f(t) = f(t + \eta) - f(t);$$

$$\Delta_{\eta}^2 f(t) = f(t + \eta) - 2f(t) + f(t - \eta); \quad \|f\| = \sup_t |f(t)|;$$

$$\omega_k(f, \delta) = \sup_{|\eta| \leq \delta} \|\Delta_{\eta}^k f\|, \quad k = 1, 2; \quad H_{\omega_k}^k(H_{\omega_k}^k \langle a, b \rangle)$$

— класс непрерывных 2π -периодических (заданных на промежутке $\langle a, b \rangle$) функций, удовлетворяющих неравенству $\omega_k(f, \delta) \leq \omega_k(\delta)$ ($\delta \geq 0$), где $\omega_k(\delta)$ — заданная

неотрицательная функция; $H_\omega = H_\omega^1$; $H_\mu^k = H_{\omega_k}^k$ при $\omega_k(\delta) = \delta^\mu$; $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции f тригонометрическими многочленами порядка не выше n . Запись $X = O(Y)$ означает, что существует такая абсолютная константа $c > 0$, что $|X| \leq c|Y|$.

Асимптотическая формула для функции $\lambda_n(x)$, установленная в [1], была несколько уточнена в [2], где показано, что

$$\lambda_n(x) = 1 + |\sin(n + 1/2)x| \left[\frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]. \quad (1)$$

В [3] была, в частности, получена следующая асимптотическая формула типа формулы А. Н. Колмогорова

$$\mathcal{E}(L_n, H_\omega, x) = \frac{1}{2} \omega(h) \lambda_n(x) + O(\omega(h)), \quad (2)$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности. В [4] дано асимптотическое представление остаточного члена формулы (2) для случая $\omega(\delta) = \delta^\mu$ ($0 < \mu \leq 1$). Наконец, в [5] показано, что для любой ограниченной 2π -периодической функции f

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{1}{4} \omega_2(f, h) \lambda_n(x) + O(\omega_2(f, h)), \quad (3)$$

причем существует разрывная функция f , для которой в (3) имеет место равенство.

В настоящей работе устанавливается асимптотическая формула типа формулы А. Н. Колмогорова для величины $\mathcal{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x)$. Оказывается, что неравенство (3) является точным на классе $H_{\omega_2}^2$, если $\omega_2(\delta)$ возрастает, грубо говоря, медленнее чем δ , и может быть улучшено, если $\omega_2(\delta)$ возрастает быстрее чем δ .

В дальнейшем всюду будем считать, что $\omega_2(\delta)$ — убывающая непрерывная функция такая, что $\omega_2(0) = 0$ и

$$\omega_2(\delta_2) \delta_2^{-2} \leq 4\omega_2(\delta_1) \delta_1^{-2} \quad (0 < \delta_1 < \delta_2). \quad (4)$$

Заметим, что все эти требования заведомо выполнены, если $\omega_2(\delta) = \omega_2(f_0, \delta)$, где f_0 — непрерывная 2π -периодическая функция (см. [6, стр. 115—116]).

ЛЕММА 1. Пусть $m = m_n(x)$ — целое число такое, что $x_{m-1}^{(n)} < x \leq x_m^{(n)}$. Тогда справедливы следующие

соотношения:

$$l_k^{(n)}(x) = O(|\sin(n + 1/2)x|), \quad k = m + 1, m + 2, \dots, m + 2n - 1, \quad (5)$$

$$l_m^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 + O(|\sin(n + 1/2)x|) & (x_m - h/2 \leq x \leq x_m), \\ O(|\sin(n + 1/2)x|) & (x_{m-1} < x \leq x_m - h/2), \end{cases} \quad (6)$$

$$l_{m-1}^{(n)}(x) = \begin{cases} O(|\sin(n + 1/2)x|) & (x_m - h/2 \leq x \leq x_m), \\ 1 + O(|\sin(n + 1/2)x|) & (x_{m-1} < x \leq x_m - h/2), \end{cases}$$

$$l_k^{(n)}(x) + l_{k+1}^{(n)}(x) = \begin{cases} O(|\sin(n + 1/2)x|(k - m)^{-2}, \\ k = m + 1, \dots, m + n - 1, \\ O(|\sin(n + 1/2)x|(m + 2n - k - 1)^{-2}), \\ k = m + n, \dots, m + 2n - 2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{k=m+1}^{m+2n-1} |l_k^{(n)}(x)| = |\sin(n + 1/2)x| \left[\frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]. \quad (8)$$

Доказательство формул (5) — (7) очевидно. Формула (8) следует из (1) и (6).

ЛЕММА 2. Пусть

$$R_n^{(1)}(f, x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{m+2n-1} \Delta_{h/2}^2 f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x),$$

$R_n^{(2)}(f, x) = R_n(f, x) - R_n^{(1)}(f, x)$. Тогда для любой функции $f \in H_{\omega_2}^2$ справедлива оценка

$$R_n^{(2)}(f, x) = O(\omega_2(h)). \quad (9)$$

Если мажоранта $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет дополнительно условию

$$\int_0^\delta \omega_2(u) u^{-2} du \leq A \omega_2(\delta) \delta^{-1} \quad (\delta > 0) \quad (10)$$

где A — положительная константа, то для любой функции $f \in H_{\omega_2}^2$ справедлива оценка

$$R_n^{(2)}(f, x) = O(A |\sin(n + 1/2)x| \omega_2(h)). \quad (11)$$

Доказательство. Положим для краткости $l_k = l_k^{(n)}(x)$, $x_{k\pm 1/2} = x_k^{(n)} \pm h/2$, $k = 0, \pm 1, \dots$ Тогда

$$R_n(f, x) = \sum_{k=m-1}^{m+2n-1} f(x_k) l_k - f(x),$$

$$R_n^{(2)}(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{m+2n-1} [f(x_{k+1/2}) + f(x_{k-1/2})] l_k +$$

$$+ f(x_{m-1}) l_{m-1} + f(x_m) l_m - f(x).$$

Пусть $T = T_n(f)$ — тригонометрический многочлен наилучшего приближения функции f порядка не выше n , $f^* = f - T$. По теореме Джексона — Ахиезера

$$\|f^*\| = E_n(f) = O(\omega_2(h)). \quad (12)$$

Используя аддитивность оператора $R_n^{(2)}$, представим величину $R_n^{(2)}(f, x)$ в виде суммы

$$R_n^{(2)}(f, x) = R_n^{(2)}(T, x) + R_n^{(2)}(f^*, x)$$

и оценим оба слагаемых в отдельности. Так как T — тригонометрический многочлен порядка не выше n , то

$$\sum_{k=m-1}^{m+2n-1} T(x_{k\pm 1/2}) l_k = L_n(T(\cdot \pm h/2), x) = T(x \pm h/2).$$

Поэтому

$$R_n^{(2)}(T, x) = \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{m+2n-1} [T(x_{k+1/2}) + T(x_{k-1/2})] l_k +$$

$$+ T(x_{m-1}) l_{m-1} + T(x_m) l_m - T(x) =$$

$$= \frac{1}{2} [\Delta_{h/2}^2 T(x) - \Delta_{h/2}^2 T(x_{m-1}) \cdot l_{m-1} - \Delta_{h/2}^2 T(x_m) l_m].$$

Предположим для определенности, что $x_{m-1/2} < x \leq x_m$ (случай $x_{m-1} < x \leq x_{m-1/2}$ рассматривается совершенно аналогично). Используя оценки (6), получим

$$R_n^{(2)}(T, x) = \frac{1}{2} [\Delta_{h/2}^2 T(x) - \Delta_{h/2}^2 T(x_m)] +$$

$$+ O(|\sin(n+1/2)x| [|\Delta_{h/2}^3 T(x_m)| + |\Delta_{h/2}^3 T(x_{m-1})|]).$$

Применяя (12) и неравенство Бернштейна, последовательно находим

$$\|\Delta_{h/2}^2 T\| \leq \|\Delta_{h/2}^2 f\| + \|\Delta_{h/2}^2 f^*\| \leq \omega_2(f, h/2) + 4\|f^*\| =$$

$$= O(\omega_2(h));$$

$$\begin{aligned}
|\Delta_{h/2}^2 T(x) - \Delta_{h/2}^2 T(x_m)| &\leq \| \Delta_{h/2}^2 T' \| (x_m - x) \leq \\
&\leq n \| \Delta_{h/2}^2 T \| (x_m - x) = O(\omega_2(h) n (x_m - x)) = \\
&= O(\omega_2(h) |\sin(n + 1/2)x|).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$R_h^{(2)}(T, x) = O(\omega_2(h) |\sin(n + 1/2)x|). \quad (13)$$

Для оценки величины $R_h^{(2)}(f^*, x)$ представим ее в виде

$$\begin{aligned}
R_n^{(2)}(f^*, x) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=m+1}^{m+2n-2} f^*(x_{k+1/2})(l_k + l_{k+1}) + \right. \\
&\quad \left. + f^*(x_{m+1/2})l_{m+1} + f^*(x_{m+2n-1/2})l_{m+2n-1} \right] + \\
&\quad + f^*(x_{m-1})l_{m-1} + f^*(x_m)l_m - f^*(x).
\end{aligned}$$

Из (5), (7) и (12) выводим:

$$\begin{aligned}
|f^*(x_{m+1/2})l_{m+1} + f^*(x_{m+2n-1/2})l_{m+2n-1}| &\leq \\
\leq \|f^*\| (|l_{m+1}| + |l_{m+2n-1}|) &= O(\omega_2(h) |\sin(n + 1/2)x|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=m+1}^{m+2n-2} f^*(x_{k+1/2})(l_k + l_{k+1})| &\leq \|f^*\| \sum_{k=m+1}^{m+2n-2} |l_k + l_{k+1}| = \\
&= O(\omega_2(h) |\sin(n + 1/2)x| [\sum_{k=m+1}^{m+n-1} (k-m)^{-2} + \\
&\quad + \sum_{k=m+n}^{m+2n-2} (m+2n-k+1)^{-2}]) = O(\omega_2(h) |\sin(n + 1/2)x|).
\end{aligned}$$

В силу (6) и (12) при $x_{m-1/2} < x \leq x_m$ будет

$$\begin{aligned}
f^*(x_{m-1})l_{m-1} + f^*(x_m)l_m - f^*(x) &= \\
= f^*(x_m) - f^*(x) + O(\omega_2(h) |\sin(n + 1/2)x|).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_n^{(2)}(f^*, x) = f^*(x_m) - f^*(x) + O(\omega_2(h) |\sin(n + 1/2)x|) \quad (14)$$

и, снова, используя (12), находим

$$R_n^{(2)}(f^*, x) = O(\omega_2(h)). \quad (15)$$

Объединяя оценки (13) и (15), получим (9).

Пусть теперь мажоранта $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (10). Из (4) и (10) очевидным образом вытекает, что $A \geq \geq 1/4$, если только $\omega_2(\delta) \neq 0$. Условие (10) влечет также непрерывную дифференцируемость функции f . Действительно, достаточным условием дифференцируемости f является (см., например, [6, стр. 347]) сходимость ряда $\sum_{v=1}^{\infty} E_v(f)$. С помощью теоремы Джексона — Ахиезера и

очевидных оценок находим

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} E_v(f) &= O\left(\sum_{v=1}^{\infty} \omega_2\left(\frac{1}{v}\right)\right) = \\ &= O\left(\int_0^1 \omega_2(u) u^{-2} du\right) = O(A\omega_2(1)). \end{aligned}$$

При этом [6, стр. 347]

$$\begin{aligned} \omega_2\left(f', \frac{1}{n}\right) &= O\left(n^{-2} \sum_{v=0}^n (v+1)^2 E_v(f) + \sum_{v=n+1}^{\infty} E_v(f)\right) = \\ &= O\left(n^{-2} \sum_{v=0}^n (v+1)^2 \omega_2((v+1)^{-1}) + \sum_{v=n+1}^{\infty} \omega_2(v^{-1})\right) = \\ &= O\left(n^{-2} \int_{(n+1)^{-1}}^1 \omega_2(u) u^{-4} du + \int_0^{(n+1)^{-1}} \omega_2(u) u^{-2} du\right), \end{aligned}$$

Применяя (4) и (10), получим

$$\begin{aligned} \omega_2\left(f', \frac{1}{n}\right) &= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n+1}\right) \int_{(n+1)^{-1}}^1 u^{-2} du + A(n+1) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \omega_2\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = O\left(An\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O(An\omega_2(h)) \end{aligned}$$

Из теорем Фройда (см. [6, стр. 555]) и Джексона — Ахиезера выводим

$$\|f^{*'}\| = O(E_n(f^{*'})) = O\left(\omega_2\left(f', \frac{1}{n}\right)\right) = O(An\omega_2(h)),$$

откуда

$$\begin{aligned} |f^*(x_m) - f^*(x)| &\leq \|f^{*'}\| (x_m - x) = \\ &= O(A\omega_2(h)(x_m - x)) = O(A\omega_2(h) |\sin(n+1/2)x|). \end{aligned}$$

Подставляя в (14), имеем

$$R_n^{(2)}(f^*, x) = O(A\omega_2(h) |\sin(n+1/2)x|). \quad (16)$$

Из (13) и (16) следует (11).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если мажоранта $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию

$$0 \leq \Delta_{\eta}^2 \omega_2(\delta) \leq 2\omega_2(\eta) \quad (0 < \eta \leq \delta) \quad (17)$$

то функция φ , определенная по формуле

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (-1)^k [\omega_2(|t - kh|) - \omega_2(h/2)]/2, \\ t &\in [kh - h/2, kh + h/2], \quad k = 0, \pm 1, \dots, \end{aligned}$$

принадлежит классу $H_{\omega_2}^2(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Покажем, что для произвольных t и η будет

$$|\Delta_{\eta}^2 \varphi(t)| \leq \omega_2(|\eta|).$$

Так как $\varphi(t \pm h) = -\varphi(t)$ и $\varphi(-t) = \varphi(t)$, то, не нарушая общности, можно считать, что $t \in [0, h/2]$. С другой стороны $\Delta_{-\eta}^2 \varphi(t) = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t)$, а при $\eta \geq h$, учитывая выпуклость вниз $\omega_2(\delta)$, имеем

$$|\Delta_{\eta}^2 \varphi(t)| \leq 4 \|\varphi\| = 2\omega_2(h/2) \leq \omega_2(h) \leq \omega_2(\eta),$$

и, следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением случая $0 < \eta < h$. При этом точка $t + \eta$ может занимать одно из трех положений: (а) $t + \eta \in (0, h/2)$; (б) $t + \eta \in [h/2, h]$; (в) $t + \eta \in (h, 3h/2)$, а точка $t - \eta$ — одно из трех положений: (а) $t - \eta \in (0, h/2)$; (б) $t - \eta \in [-h/2, 0]$; (в) $t - \eta \in (-h, -h/2)$. Ситуации (ав) и (ва) (здесь первая буква соответствует положению точки $t + \eta$, а вторая — $t - \eta$) очевидным образом невозможны. Рассмотрим последовательно остальные семь случаев. Все приводимые ниже выкладки основаны на использовании неравенства (17), а также свойств монотонности и неотрицательности $\omega_2(\delta)$. При этом выражения, заключенные в фигурные скобки, неотрицательны.

$$(aa) \quad 0 \leq 1/2 \Delta_{\eta}^2 \omega_2(t) = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t) \leq \omega_2(\eta);$$

$$(аб) \quad 0 \leq 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t) \leq \omega_2(t) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta);$$

$$(ба) \quad -\omega_2(\eta) \leq -\omega_2(t + \eta - h/2) \leq -1/2 \cdot \Delta_{t+\eta-h/2}^2 \omega_2(h/2) \leq 1/2 \Delta_{\eta}^2 \omega_2(t) - 1/2 \Delta_{t+\eta-h/2}^2 \omega_2(h/2) = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t) \leq 1/2 \Delta_{\eta}^2 \omega_2(t) \leq \omega_2(\eta);$$

$$(бб) \quad -\omega_2(\eta) \leq -\omega_2(t + \eta - h/2) \leq -1/2 \cdot \Delta_{t+\eta-h/2}^2 \omega_2(h/2) \leq -1/2 \Delta_{t+\eta-h/2}^2 \omega_2(h/2) + 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t) \leq 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} \leq \omega_2(t) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta);$$

$$(бв) \quad 0 \leq 1/2 \{\omega_2(h/2) - \omega_2(h - t - \eta)\} + \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t)\} + 1/2 \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t - \eta + h)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t) = -1/2 \Delta_t^2 \omega_2(h - \eta) - \Delta_{h/2-\eta}^2 \omega_2(h/2) + \omega_2(\eta) - \omega_2(t) \leq \omega_2(\eta);$$

$$\begin{aligned}
 (\text{вб}) \quad 0 &\leq 1/2\{\omega_2(\eta - t) - \omega_2(t + \eta - h)\} + \{\omega_2(h/2) - \\
 &- \omega_2(t)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t) = 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) - 1/2 \Delta_{h/2}^2 \omega_2(t + \\
 &+ \eta - h/2) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} - \{\omega_2(t + \eta - h/2) - \\
 &- \omega_2(h/2)\} \leq 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} \leq \\
 &\leq \omega_2(t) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{вв}) \quad 0 &\leq 1/2 \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t + \eta - h)\} + \{\omega_2(h/2) - \\
 &- \omega_2(t)\} + 1/2 \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t - \eta + h)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t) = \\
 &= 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) - 1/2 \Delta_{h/2}^2 \omega_2(t + \eta - h/2) - 1/2 \cdot \\
 &\cdot \Delta_{\eta-t-h/2}^2 \omega_2(h/2) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} - \{\omega_2(t + \eta - h/2) - \\
 &- \omega_2(h/2)\} \leq 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) + \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} \leq \omega_2(t) + \\
 &+ \{\omega_2(\eta) - \omega_2(t)\} = \omega_2(\eta).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Как следует из доказательства леммы

$$|\Delta_{\eta}^2 \varphi(t)| = \omega_2(|\eta|) \quad (|\eta| \leq h/2).$$

2. Функция φ не является 2π -периодической, и, следовательно, не принадлежит классу $H_{\omega_2}^2$.

3. Из условий $f \in H_{\omega_2}^2 \langle a, b \rangle$ и $f(t) = f(b)$ ($b < t \leq c$), вообще говоря, не следует, что $f \in H_{\omega_2}^2 \langle a, c \rangle$.

ЛЕММА 4. Если $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (17), то функция φ_0 , определенная на $(-\infty, \infty)$ по формулам $\varphi_0(t) = \varphi_0(h)$ ($0 \leq t < h$); $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ ($h \leq t \leq 2\pi$); $\varphi_0(t \pm 2\pi) = \varphi_0(t)$, принадлежит классу $H_{\omega_2}^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для произвольных t и η будет

$$|\Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t)| \leq \omega_2(|\eta|).$$

Так же, как и в лемме 3, достаточно рассмотреть случай $0 < \eta < h$, а так как $\varphi_0(h/2 + t) = \varphi_0(h/2 - t)$ и $\Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = \Delta_{\eta}^2 \varphi(t)$, если $t + \eta \leq 0$, то, не нарушая общности, можно считать, что $-\eta < t < h/2$.

При этом возможны четыре случая взаимного расположения точек t и $t + \eta$: (а) $t \in (0, h/2]$, $t + \eta \in (h, 3h/2]$; (б) $t \in (0, h/2]$, $t + \eta \in (0, h]$; (в) $t \in [-h/2, 0]$, $t + \eta \in (0, h]$; (г) $t \in (-h, -h/2]$, $t + \eta \in (0, h]$. В свою очередь точка $t - \eta$ может занимать одно из пяти положений: (а) $t - \eta \in [0, h/2]$; (б) $t - \eta \in [-h/2, 0]$; (в) $t - \eta \in [-h, -h/2]$; (г) $t - \eta \in [-3h/2, -h]$; (д)

$t - \eta \in (-2h, -3h/2)$. Нетрудно видеть, что невозможны ситуации (аа), (аг), (ад), (бг), (бд), (ва), (вд), (га), (гб), (гв). Остальные десять случаев исследованы ниже так же, как и в лемме 3.

$$(аб) \quad -\omega_2(\eta) = -1/2 \{\omega_2(\eta) + \omega_2(\eta)\} \leq \\ = -1/2 \{\omega_2(t + \eta - h) + \omega_2(\eta - t)\} = \Delta_{\eta}^3 \varphi_0(t) \leq 0;$$

$$(ав) \quad -\omega_2(\eta) \leq -\omega_2(h/2) \leq -\omega_2(h/2) + \\ + 1/2 \{\omega_2(t - \eta + h) - \omega_2(t + \eta - h)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = \\ = -1/2 \{\omega_2(t + \eta - h) + \omega_2(h/2)\} - 1/2 \{\omega_2(h/2) - \\ - \omega_2(t - \eta + h)\} \leq 0;$$

$$(ба) \quad \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = 0;$$

$$(бб) \quad -\omega_2(\eta) \leq -1/2 \omega_2(\eta) \leq -1/2 \omega_2(\eta - t) = \\ = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) \leq 0;$$

$$(бв) \quad -\omega_2(\eta) \leq -\omega_2(h/2) \leq -\omega_2(h/2) + \\ + 1/2 \omega_2(t - \eta + h) = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = -1/2 \omega_2(h/2) - \\ - 1/2 \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t - \eta + h)\} \leq 0;$$

$$(вб) \quad -\omega_2(\eta) \leq -\omega_2(\eta) + 1/2 \omega_2(\eta + t) + \{\omega_2(-t) - \\ - 1/2 \Delta_{-t}^2 \omega_2(\eta)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = \omega_2(-t) - \\ - 1/2 \omega_2(\eta - t) \leq \omega_2(-t) \leq \omega_2(\eta);$$

$$(вв) \quad -\omega_2(\eta) \leq -\omega_2(\eta) + 1/2 \omega_2(\eta + t) + \\ + \{\omega_2(-t) - 1/2 \Delta_{-t}^2 \omega_2(\eta)\} + 1/2 \Delta_{\eta-t-h/2}^2 \omega_2(h/2) = \\ = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = \omega_2(-t) - 1/2 \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t - \eta + \\ + h)\} - 1/2 \omega_2(h/2) \leq \omega_2(-t) \leq \omega_2(\eta);$$

$$(вг) \quad -\omega_2(\eta) \leq -\omega_2(h/2) \leq -\{\omega_2(h/2) - \\ - \omega_2(-t)\} + 1/2 \omega_2(\eta - t + h) = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) \leq \\ \leq 1/2 \omega_2(\eta - t + h) \leq 1/2 \omega_2(\eta) \leq \omega_2(\eta);$$

$$(гг) \quad 0 \leq 1/2 \omega_2(\eta - t - h) \leq 1/2 \omega_2(\eta - t - h) + \\ + \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t + h)\} = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = \\ = 1/2 \omega_2(\eta - t - h) + 1/2 \omega_2(-t) - 1/2 \omega_2(t + h) - \\ - 1/2 \Delta_{-t-h/2}^2 \omega_2(h/2) \leq 1/2 \omega_2(\eta - t - h) + 1/2 \omega_2(-t) \leq \\ \leq 1/2 \omega_2(\eta) + 1/2 \omega_2(\eta) = \omega_2(\eta);$$

$$(гд) \quad 0 \leq \{\omega_2(h/2) - \omega_2(t + h)\} + 1/2 \{\omega_2(h/2) - \\ - \omega_2(t - \eta + 2h)\} + 1/2 \omega_2(h/2) = \Delta_{\eta}^2 \varphi_0(t) = \\ = -1/2 \omega_2(t - \eta + 2h) - \Delta_{-t-h/2}^2 \omega_2(h/2) + \omega_2(-t) \leq \\ \leq \omega_2(-t) \leq \omega_2(\eta).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5 [7, стр. 435]. Если мажоранта $\omega_2(\delta)$ полудитивна, т. е. удовлетворяет условию

$$\Delta_\eta \omega_2(\delta) \leq \omega_2(\eta) \quad (\delta, \eta \geq 0), \quad (18)$$

то функция $\psi(t)$, определенная по формуле

$$\psi(t) = \frac{1}{2} \omega_2(|t - 2kh|), \quad t \in [(2k-1)h, (2k+1)h], \\ k = 0, \pm 1, \dots,$$

принадлежит классу $H_{\omega_2}^2(-\infty, \infty)$.

З а м е ч а н и е. Накладываемое в [7] на мажоранту $\omega_2(\delta)$ дополнительное условие

$$|\Delta_\eta^2 \omega_2(\delta)| \leq 2\omega_2(\eta) \quad (0 < \eta \leq \delta),$$

на самом деле излишне, так как очевидным образом следует из (18).

ЛЕММА 6. Если $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (18), то функция $\psi_0(t)$, определенная на $(-\infty, \infty)$ по формулам: $\psi_0(t) = \psi(t)$ ($0 \leq t \leq h$), $\psi_0(t) = \psi(h)$ ($h < t < 2h$), $\psi_0(t) = \psi(t-h)$ ($2h \leq t < 2\pi$), $\psi_0(t \pm 2\pi) = \psi_0(t)$, принадлежит классу $H_{\omega_2}^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любых t и η $|\Delta_\eta^2 \psi_0(t)| \leq \omega_2(|\eta|)$. Так как $\Delta_\eta^2 \psi_0(t) = \Delta_\eta^2 \psi(t)$ и при $|\eta| \geq h$ имеем

$$|\Delta_\eta^2 \psi_0(t)| = \left| \Delta_\eta^2 \left(\psi_0(t) - \frac{1}{4} \omega_2(h) \right) \right| \leq \\ \leq 4 \left\| \psi_0(t) - \frac{1}{4} \omega_2(h) \right\| = \omega_2(h) \leq \omega_2(|\eta|),$$

то достаточно рассмотреть случай $0 < \eta < h$.

В этих условиях при $t \leq 0$ или $t + \eta \leq h$ имеем $\Delta_\eta^2 \psi_0(t) = \Delta_\eta^2 \psi(t)$ и доказываемое неравенство вытекает из леммы 5. Наконец, $\psi_0(3h/2 + t) = \psi_0(3h/2 - t)$, поэтому, не нарушая общности, можно считать $t \leq 3h/2$. Итак, остается рассмотреть случай $0 < \eta < h$, $0 < t \leq 3h/2$, $t + \eta > h$. Возможны три варианта взаимного расположения точек t , $t + \eta$: а) $t \in (0, h]$, $t + \eta \in (h, 2h]$; б) $t \in (h, 3h/2]$, $t + \eta \in (h, 2h]$; в) $t \in (h, 3h/2]$, $t + \eta \in (2h, 3h]$. В свою очередь, точка $t - \eta$ может занимать одно из трех положений: а) $t - \eta \in (-h, 0]$; б) $t - \eta \in (0, h]$; в) $t - \eta \in (h, 3h/2]$.

Нетрудно видеть, что ситуации (ав), (ба), (ва), (вв) невозможны. Остальные пять случаев исследованы ниже. Приводимые выкладки основаны на использовании леммы 5, неравенства (18) и свойств монотонности и неотрицательности функции $\omega_2(\delta)$. Выражения в фигурных скобках неотрицательны.

$$\begin{aligned}
 (\text{аа}) \quad & -\omega_2(\eta) \leq \Delta_{\eta}^2 \psi(t) = \\
 & = 1/2 [\omega_2(2h - t - \eta) - 2\omega_2(t) + \omega_2(\eta - t)] \leq \\
 & \leq 1/2 [\omega_2(h) - 2\omega_2(t) + \omega_2(\eta - t)] = \\
 & = \Delta_{\eta}^2 \psi_0(t) = 1/2 \Delta_t^2 \omega_2(\eta) - 1/2 \{\omega_2(t + \eta) - \\
 & - \omega_2(h)\} + \omega_2(\eta) - \omega_2(t) \leq \omega_2(t) + \omega_2(\eta) - \omega_2(t) = \\
 & = \omega_2(\eta);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{аб}) \quad & -\omega_2(\eta) \leq \Delta_{\eta}^2 \psi(t) = \\
 & = 1/2 [\omega_2(2h - t - \eta) - 2\omega_2(t) + \omega_2(t - \eta)] \leq \\
 & \leq 1/2 [\omega_2(h) - 2\omega_2(t) + \omega_2(t - \eta)] = \\
 & = 1/2 \Delta_{\eta}^2 \psi_0(t) = 1/2 \Delta_{\eta}^2 \omega_2(t) - 1/2 \{\omega_2(t + \eta) - \\
 & - \omega_2(h)\} \leq \omega_2(\eta);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{бб}) \quad & -\omega_2(\eta) \leq -1/2 \omega_2(\eta) \leq -1/2 \omega_2(h - t + \eta) \leq \\
 & \leq 1/2 [-\omega_2(h) + \omega_2(t - \eta)] = \Delta_{\eta}^2 \psi_0(t) \leq 0 \leq \omega_2(\eta);
 \end{aligned}$$

$$(\text{бв}) \quad |\Delta_{\eta}^2 \psi_0(t)| = 0 \leq \omega_2(\eta);$$

$$\begin{aligned}
 (\text{вб}) \quad & -\omega_2(\eta) \leq \\
 & \leq 1/2 \{\omega_2(3h - t) - \omega_2(h)\} + \\
 & + 1/2 \{\omega_2(t) - \omega_2(h)\} - \omega_2(\eta) \leq 1/2 [\omega_2(3h - t - \eta) + \\
 & + \omega_2(\eta)] + 1/2 [\omega_2(t - \eta) + \omega_2(\eta)] - \omega_2(h) - \omega_2(\eta) = \\
 & = \Delta_{\eta}^2 \psi_0(t) = -1/2 \{\omega_2(h) - \omega_2(3h - t - \eta)\} - \\
 & - 1/2 \{\omega_2(h) - \omega_2(t - \eta)\} \leq 0 \leq \omega_2(\eta).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Если мажоранта $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (18), то имеет место асимптотическая формула

$$\mathcal{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) = \frac{1}{4} \omega_2(h) \left[\left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right| \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]. \quad (19)$$

Если же $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (17), то справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) = \\
 = \frac{1}{2} \omega_2 \left(\frac{h}{2} \right) \left[\left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right| \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Если кроме того выполнено условие (10), то формула (20) допускает следующее уточнение:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) &= \\ &= \frac{1}{2} \omega_2\left(\frac{h}{2}\right) \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right| \left[\frac{2}{\pi} \ln n + O(A) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Если $f \in H_{\omega_2}^2$, то, как следует из (3) и (1),

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{1}{4} \omega_2(h) \left[\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right| \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]$$

Переходя в левой части последнего неравенства к верхней грани по классу $H_{\omega_2}^2$, получим

$$\mathcal{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) \leq \frac{1}{4} \omega_2(h) \left[\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right| \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]$$

Пусть теперь $g_0(t) = \psi_0(t - x_{m-2}^{(n)}) - \frac{1}{4} \omega_2(h)$, где ψ_0 — функция, определенная в лемме 6. При выполнении условия (18) $g_0 \in H_{\omega_2}^2$. Производя несложный подсчет и применяя (1), находим

$$\begin{aligned} R_n(g_0, x) &= \frac{1}{4} \omega_2(h) \left\{ \sum_{k=m-1}^{m+2n-1} |l_k^{(n)}(x) - 1| \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \omega_2(h) \left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right| \left[\frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]. \end{aligned}$$

Тем самым (19) доказано.

С другой стороны, в силу леммы 2 и формулы (8)

$$\begin{aligned} |R_n(f, x)| &\leq |R_n^{(1)}(f, x)| + |R_n^{(2)}(f, x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{m+2n-1} |\Delta_{h/2}^2 f(x_k^{(n)})| |l_k^{(n)}(x)| + O(\omega_2(h)) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \omega_2\left(\frac{h}{2}\right) \sum_{k=m+1}^{m+2n-1} |l_k^{(n)}(x)| + O(\omega_2(h)) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_2\left(\frac{h}{2}\right) \left[\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right| \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right] \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \omega_2\left(\frac{h}{2}\right) \left[\left| \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right| \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right]. \end{aligned}$$

Ясно, что при выполнении условия (10) последнее неравенство может быть уточнено так, что

$$\mathcal{E}(L_n, H_{\omega_2}^2, x) \leq \leq \frac{1}{2} \omega_2 \left(\frac{h}{2} \right) \left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right| \left[\frac{2}{\pi} \ln n + O(A) \right].$$

Пусть, наконец, $f_0(t) = \varphi_0(t - x_{m-1}^{(n)})$, где φ_0 — функция из леммы 4. Тогда из (17) следует, что $f_0 \in H_{\omega_2}^2$ и после элементарного подсчета получим

$$\begin{aligned} R_n(f_0, x) &= \frac{1}{2} \omega_2 \left(\frac{h}{2} \right) \left\{ \sum_{k=m-1}^{m+2n-1} |l_k^{(n)}(x)| - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \omega_2 \left(\frac{h}{2} \right) \left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right| \left[\frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right], \end{aligned}$$

откуда вытекает справедливость (20) и (21). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что если $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условиям (17) и (18) одновременно, то $\omega_2(\delta) \equiv \omega_2(1) \delta$, а формулы (19) и (20) совпадают.

С л е д с т в и е.

$$\mathcal{E}(L_n, H_{\mu}^2, x) = c(\mu) h^{\mu} \left[\left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right| \frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right],$$

где $c(\mu) = 2^{-2}$ ($0 < \mu \leq 1$) и $c(\mu) = 2^{-1-\mu}$ ($1 \leq \mu \leq 2$).

Государственный проектно-изыскательский
и научно-исследовательский институт
морского транспорта

Поступило
28.IV.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА]

- [1] Н и к о л ь с к и й С. М., О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, Изв. АН СССР, Сер. матем., 4, № 6 (1940), 509—520.
- [2] З е е л ь Э., Двусторонняя оценка функции Лебега тригонометрического интерполирования по равноотстоящим узлам, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та., 423 (1969), 116—118.
- [3] Н и к о л ь с к и й С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 15 (1945), 45—58.
- [4] К о р н е й ч у к Н. П., Об асимптотической оценке остатка при приближении периодических функций, удовлетворяющих

- условию Липшица, интерполяционными многочленами с равноотстоящими узлами, Укр. матем. ж., 13, № 1 (1961), 100—106.
- [5] Н е в а Г. П., Об отклонении тригонометрических интерполяционных сумм, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 23, № 1—2 (1972), 203—205.
- [6] Т и м а н А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., Физматгиз, 1960.
- [7] Е ф и м о в А. В., Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье, Изв. АН СССР, Сер. матем., 24, № 2 (1960), 243—296.