Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. А. Гальт, В. Н. Тютянов, О существовании наследственно G-перестановочных подгрупп в исключительных группах лиева типа,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 5, 935–944

https://www.mathnet.ru/smj7806

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.84
17 апреля 2025 г., 18:50:25

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5

УДК 512.542

О СУЩЕСТВОВАНИИ НАСЛЕДСТВЕННО G–ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУППАХ ЛИЕВА ТИПА

А. А. Гальт, В. Н. Тютянов

Аннотация. Подгруппа A группы G называется *G-перестановочной в G*, если для любой подгруппы $B \le G$ найдется элемент $x \in G$ такой, что $AB^x = B^xA$. Подгруппа A называется *наследственно G-перестановочной в G*, если A является E-перестановочной в каждой подгруппе $E \le G$, содержащей A. В «Коуровской тетради» под номером 17.112(б) была записана следующая проблема: какие конечные неабелевы простые группы G обладают собственной наследственно G-перестановочной подгруппой? В данной работе получен ответ на поставленный вопрос в случае исключительных групп лиева типа. Более того, в случае группы Сузуки $G \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$ доказано, что собственная подгруппа группы G будет G-перестановочной тогда и только тогда, когда ее порядок равен 2. В частности, получена бесконечная серия групп с G-перестановочными подгруппами.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.504

Ключевые слова: исключительная группа лиева типа, G-перестановочная подгруппа, наследственно G-перестановочная подгруппа.

Введение

Изучение квазинормальных подгрупп восходит к работам Оре [1], где им было доказано, что любая перестановочная подгруппа конечной группы является субнормальной. Напомним, что подгруппа A группы G называется *квазинормальной* [1] или *перестановочной* [2] в G, если $AB = BA$ для любой подгруппы B из G. Результат Оре был обобщен в различных направлениях (см. [3, 4; 5, теорема 2.8]).

В группе G нередко возникает ситуация, когда две подгруппы A и B не перестановочны, однако найдется элемент $x \in G$ такой, что $AB^x = B^xA$. Различные примеры таких ситуаций, приведенные в [6, 7], привели к следующим понятиям.

Определение. Пусть A, B — подгруппы группы G и $\varnothing \ne X \subseteq G$. Тогда

(1) A называется *X-перестановочной* с B, если существует некоторый элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$;

(2) A называется *наследственно X-перестановочной* с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X \cap \langle A, B\rangle$;

(3) A называется (*наследственно*) *X-перестановочной в G*, если A является (наследственно) X-перестановочной с любой подгруппой группы G.

Исследования выполнены при финансовой поддержке совместного гранта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23РНФ-237) и Российского научного фонда № 23-41-10003, https://rscf.ru/project/23-41-10003/.

© **2023 Гальт А. А., Тютянов В. Н.**

Концепция X-перестановочных подгрупп получила широкое развитие в работах различных авторов. Для ознакомления с результатами в этом направлении рекомендуется монография [8]. Тем не менее дальнейшее применение данного понятия при решении различных задач теории групп осложняется отсутствием информации о G-перестановочных и наследственно G-перестановочных подгруппах, находящихся в композиционных факторах групп. В связи с этим в «Коуровской тетради» была записана следующая проблема.

Проблема (А. Н. Скиба, В. Н. Тютянов [9, 17.112]). *Какие конечные неабелевы простые группы G обладают*

(a) *нетривиальной G-перестановочной подгруппой?*

(б) *нетривиальной наследственно G-перестановочной подгруппой?*

Проблема (б) была решена для знакопеременных и спорадических групп в [10] и [11] соответственно. А именно, доказано, что конечная простая знакопеременная или спорадическая группа G не содержит собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.

Основным результатом данной работы является ответ на вопрос (б) в случае исключительных групп лиева типа.

Теорема 1. *Пусть G — конечная простая исключительная группа лиева типа. Тогда G не содержит собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.*

Основываясь на полученных результатах, естественно выдвинуть следующее предположение.

Гипотеза. *Конечная группа G является простой тогда и только тогда, когда G не содержит собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.*

В отличие от наследственно G-перестановочных подгрупп, G-перестановочные подгруппы уже содержатся в минимальной неабелевой простой группе A_5. Проблема (а) решена для спорадических групп в [12]. А именно, доказано, что если спорадическая группа или группа Титса G содержит собственную G-перестановочную подгруппу S, то $G = \mathrm{J}_1$ и S — подгруппа порядка 2. До настоящего времени были только отдельные примеры простых групп, содержащих собственную G-перестановочную подгруппу.

Следующая теорема показывает существование бесконечной серии конечных простых групп G, содержащих G-перестановочные подгруппы.

Теорема 2. *Пусть $G \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$ — простая группа Сузуки. Тогда собственная подгруппа S группы G является G-перестановочной, если и только если порядок S равен* 2.

1. Обозначения и предварительные результаты

Наши обозначения стандартны и в основном следуют [13]. В частности, через $A{:}B$, $A{}^{\cdot}B$ и $A.B$ обозначаются некоторые расщепляемое, нерасщепляемое и произвольное расширения группы A с помощью группы B соответственно. Циклическая группа порядка n обозначается через n или C_n. Симметрическая и знакопеременная группы степени k обозначаются через S_k и A_k соответственно. Наибольший общий делитель чисел $n_1, \dots, n_k$ обознается через $(n_1, \dots, n_k)$.

Максимальная подгруппа M группы G обозначается через $M \lessdot G$. Будем говорить, что группа G *не имеет факторизаций*, если не существует двух собственных подгрупп $A, B \leq G$ таких, что $G = AB$. Через $\pi(G)$ будем обозначать множество простых делителей порядка группы G.

В дальнейшем нам потребуется следующее очевидное утверждение, упоминающееся в [6, лемма 2.1].

Лемма 1. *Пусть G — группа, $A, B \leq G$ и $K \trianglelefteq G$. Если A наследственно G-перестановочна с B, то AK/K наследственно G/K-перестановочна с BK/K. В частности, если подгруппа A наследственно G-перестановочна в G, то подгруппа AK/K наследственно G/K-перестановочна в G/K.*

Лемма 2 [12, лемма 1]. *Пусть $T < G$ — максимальная подгруппа в группе G и $G \neq TR$ для любой подгруппы $R < G$. Тогда если F — G-перестановочная подгруппа в G, то $F^g \leq T$ для некоторого $g \in G$. В частности, $|F|$ делит $|T|$.*

Лемма 3 [12, лемма 2]. *Пусть G — конечная группа, не имеющая факторизаций, и F — G-перестановочная подгруппа в G. Тогда $|F|$ делит $(|M_1|, \dots, |M_k|)$, где M_i являются представителями всех классов максимальных подгрупп группы G.*

Предложение 1. *Пусть $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Тогда группа G не содержит собственных наследственно G-перестановочных подгрупп.*

Доказательство. Предположим, что предложение неверно, т. е. группа G содержит собственную наследственно G-перестановочную подгруппу F. Рассмотрим последовательно случай четной и нечетной характеристик.

(1) $G \cong \mathrm{PSL}_2(2^n) = \mathrm{PSL}_2(q)$.

Группа G содержит диэдральную подгруппу $L \cong D_{2(q-1)}$, которая максимальна в G. Кроме того, согласно [14] L не является сомножителем ни в одной факторизации группы G. Поэтому ввиду леммы 2 имеем $|F|$ делит $|L|$.

Группа G содержит максимальную диэдральную подгруппу $S \cong D_{2(q+1)}$. Так как подгруппа F наследственно G-перестановочна в G, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что G содержит подгруппу FS. Согласно [14] $FS \neq G$. В силу леммы 2 получаем, что $|F|$ делит $|S|$. Следовательно, $|F|$ делит $(2(q-1), 2(q+1)) = 2$, т. е. $|F| = 2$.

Отметим, что в G все инволюции сопряжены. Поэтому можно считать, что подгруппа F содержится в подгруппе Бореля $B \cong q:(q-1)$ группы G. Подгруппа B является группой Фробениуса, и ее циклическое дополнение D порядка $q-1$ самоцентрализуемо. С другой стороны, в группе B имеется подгруппа F^xD для некоторого $x \in B$. Очевидно, что $F^xD = F^x \times D$, т. е. $F^x \leq C_B(D)$. Последнее невозможно.

(2) $G \cong \mathrm{PSL}_2(p^n) = \mathrm{PSL}_2(q)$, где p — нечетное простое число.

Пусть сначала $q > 11$. В этом случае мономиальная подгруппа $L \cong D_{q-1}$ максимальна в G. Согласно [14] L не является сомножителем ни в одной факторизации группы G и по лемме 2 получаем, что $|F|$ делит $|L|$.

Кроме того, группа G содержит максимальную подгруппу $S \cong D_{q+1}$. Так как подгруппа F наследственно G-перестановочна в G, можно считать, что группа G содержит подгруппу FS. Согласно [14] $FS \neq G$ и по лемме 2 получаем, что $|F|$ делит $|S|$. Следовательно, $|F|$ делит $(q-1, q+1) = 2$, т. е. $|F| = 2$.

Так как группа G содержит подгруппу $H \cong \mathrm{A}_4$ и все инволюции в G сопряжены, можно считать, что $F \leq H$. В этом случае группа H должна содержать подгруппу порядка 6, что невозможно.

Рассмотрим последовательно оставшиеся случаи для q.

(а) $G \cong \mathrm{PSL}_2(7)$. Подгруппа H порядка 7 не является наследственно G-перестановочной, поскольку в группе G нет подгрупп порядка 14. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что G содержит подгруппу HF. Предположим, что $HF \neq G$, тогда $HF \cong 7{:}3$. Если $HF > F$, то $|F| = 3$. Группа G содержит подгруппу $L \cong \mathrm{A}_4$. Поскольку силовские 3-подгруппы в группе G сопряжены, можно считать, что $F \leq L$. Но тогда L содержит подгруппу порядка 6, что невозможно. Следовательно, $HF = F$ и $|F| = 21$. В этом случае группа G должна содержать подгруппу порядка 42, что невозможно.

Таким образом, $HF = G$ и $F \cong \mathrm{S}_4$. Группа G содержит два класса сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных S_4. Поэтому группа G допускает факторизацию $G = RS$, где $R \cong S \cong \mathrm{S}_4$. Последнее невозможно.

(б) $G \cong \mathrm{PSL}_2(9)$. Подгруппа H порядка 5 не является наследственно G-перестановочной, поскольку в группе G нет подгрупп порядка 15. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что G содержит подгруппу HF. Если $HF \neq G$, то возможны следующие случаи.

$HF \cong 5{:}2$. Пусть сначала $|F| = 2$. В группе G все инволюции сопряжены и G содержит подгруппу A_4, что приводит к противоречию. Следовательно, $HF = F$. Тогда группа G содержит подгруппу порядка 30, что невозможно.

$HF \cong \mathrm{A}_5$. Пусть сначала $F \cong \mathrm{A}_4$. Группа G содержит максимальную подгруппу $L \cong 3^2{:}4$. Тогда $LF = G$, что невозможно. Следовательно, $HF = F$. Группа G содержит два класса сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных A_5. Поэтому группа G допускает факторизацию $G = RS$, где $R \cong S \cong \mathrm{A}_5$. Последнее невозможно.

Остается случай $HF = G$. Однако G не имеет подгрупп индекса 5.

(в) $G \cong \mathrm{PSL}_2(11)$. Подгруппа H порядка 11 не является наследственно G-перестановочной, поскольку в группе G нет подгрупп порядка 33. Можно считать, что G содержит подгруппу HF. Если $HF \neq G$, то $HF \cong 11 : 5$. Поскольку в группе G нет подгрупп порядка 15, то $|F| \neq 5$. Следовательно, $HF = F$ и $|F| = 55$. Тогда в G имеется подгруппа порядка 110, что невозможно.

Остается случай $HF = G$. Ясно, что $F \cong \mathrm{A}_5$. Группа G содержит два класса сопряженных максимальных подгрупп, изоморфных A_5. Поэтому группа G допускает факторизацию $G = RS$, где $R \cong S \cong \mathrm{A}_5$. Последнее невозможно. □

2. Доказательство основных результатов

Всюду далее предполагаем, что G — конечная простая исключительная группа лиева типа и F — собственная наследственно G-перестановочная подгруппа группы G. Наша цель — прийти к противоречию.

Последовательно разберем все исключительные группы лиева типа.

I. $G \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

Согласно [13, теорема 4.1] группа G содержит максимальные подгруппы $M_1 \cong D_{2(q-1)}$ и $M_2 \cong C_{q+\sqrt{2q}+1} : 4$. Поскольку $(2(q-1), q+\sqrt{2q}+1) = 1$, то $(|M_1|, |M_2|) = 2$. Так как группа G не имеет факторизаций [15, табл. 5], в силу леммы 3 имеем $|F| = 2$.

Более того, группа G содержит максимальную подгруппу M, являющуюся группой Фробениуса порядка $q^2(q-1)$. Пусть $M = R : Q$, где R — ядро группы Фробениуса, а Q — циклическое дополнение. Так как R — силовская 2-подгруппа группы G, не нарушая общности, можно считать, что $F \leq R$.

Таким образом, F — наследственно M-перестановочная подгруппа в M. По условию найдется элемент $y \in M$ такой, что $F^y Q = QF^y$. Следовательно, в M существует подгруппа $L = F^y : Q$. Ясно, что $L = F^y \times Q$ и $C_R(Q) \neq 1$. Отсюда следует, что M не является группой Фробениуса; противоречие.

Теперь докажем теорему 2.

Предположим, что группа G содержит G-перестановочную подгруппу S. Рассуждения выше показывают, что $|S| = 2$. Так как в G все инволюции сопряжены, достаточно показать, что для любой подгруппы R нечетного порядка выполняется равенство $SR^g = R^g S$ для некоторого $g \in G$. Группа G содержит три тора $T_1 = \langle t_1 \rangle$, $T_2 = \langle t_2 \rangle$, $T_3 = \langle t_3 \rangle$ попарно взаимно простых порядков $q-1$, $q - \sqrt{2q} + 1$, $q + \sqrt{2q} + 1$ соответственно [13, теорема 4.1]. При этом $\pi(G) \setminus \{2\} = \pi(T_1) \cup \pi(T_2) \cup \pi(T_3)$. Любая подгруппа группы G нечетного порядка содержится в одном из указанных торов. Пусть подгруппа $M \leq T_1$. Тогда $M = \langle t_1^k \rangle$ для некоторого $k \geq 1$. Группа G содержит диэдральную подгруппу порядка $2(q-1)$. Без ограничения общности можно считать, что группа G содержит диэдральную подгруппу $\langle t_1 \rangle : S$. Отсюда следует, что существует подгруппа MS. Случаи, когда M содержится в T_2 или T_3, рассматриваются аналогично.

II. $G \cong {}^2\mathrm{G}_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$ и $2n+1 \geq 3$.

Согласно [13, теорема 4.2] группа G содержит максимальные подгруппы $M_1 \cong C_{q+\sqrt{3q}+1} : 6$ и $M_2 \cong C_{q-\sqrt{3q}+1} : 6$. Поскольку $(q+\sqrt{3q}+1, q-\sqrt{3q}+1) = 1$, то $(|M_1|, |M_2|) = 6$. Так как G не имеет факторизаций [15, табл. 5], ввиду леммы 3 получаем, что $|F|$ делит 6.

Группа G содержит максимальную подгруппу $M = R \times S \cong 2 \times \mathrm{PSL}_2(q)$. Без ограничения общности можно считать, что $F \leq M$. Рассмотрим $M/R \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Согласно предложению 1 группа $\mathrm{PSL}_2(q)$ не имеет собственных наследственно $\mathrm{PSL}_2(q)$-перестановочных подгрупп. Из леммы 1 следует, что $|F| = 2$. В группе G все инволюции сопряжены, и группа G содержит подгруппу $H \cong \mathrm{A}_4$. Отсюда следует, что в H имеется подгруппа порядка 6. Последнее невозможно.

III. $G \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 8$.

Согласно [13, теорема 4.5] группа G содержит максимальные подгруппы $M_1 \cong \mathrm{Sz}(q) \wr 2$ и $M_2 \cong (q+1)^2 : \mathrm{GL}_2(3)$. Имеем

$$|M_1| = 2|\,\mathrm{Sz}(q)|^2 = 2q^4(q^2+1)(q-1)^2, \quad |M_2| = 2^4 \cdot 3(q+1)^2.$$

Так как $(q^2+1, q+1) = (2, q+1) = 1$, то $(|M_1|, |M_2|) = 2^4$.

Согласно [13, теорема 4.5] группа G содержит максимальную подгруппу

$$M_3 \cong (q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q+1)) : 12.$$

Так как число $(q^2 + q + 1 \pm \sqrt{2q}(q+1))$ нечетное, то $(|M_1|, |M_2|, |M_3|) = 4$. Поскольку группа G не имеет факторизаций [15, табл. 5], ввиду леммы 3 получаем, что $|F|$ делит 4 и F — циклическая группа.

Подгруппа F содержится в $M_1 = (A \times A^\tau) : \langle \tau \rangle = N : \langle \tau \rangle = L$, где $A \cong \mathrm{Sz}(q)$ и τ — инволюция. Предположим, что F содержится в N. Из п. I следует, что F не содержится в A. Теперь достаточно рассмотреть фактор-группу $N/A \cong \mathrm{Sz}(q)$ и применить лемму 1. Следовательно, F не содержится в N. По условию существует группа AF^l, где F^l не содержится в N для некоторого $l \in L$. Поскольку $A \lhd N$, для любого $y \in F^l \setminus N$ выполняется $A^y = A^\tau$ и $A^\tau \leq AF^l$; противоречие с $|AF^l| \leq 4|A|$.

IV. $G \cong \mathrm{G}_2(q)$, где $q = p^m$.

В случае $p = 2$ группа G содержит максимальную подгруппу $M_1 \cong \mathrm{PSL}_2(q) \times \mathrm{PSL}_2(q)$ [13, табл. 4.1]. Так как M_1 не является сомножителем ни в одной факторизации группы G [15, табл. 5], то $F \le M_1$. При $p \ge 3$ группа G содержит максимальную подгруппу $M_2 \cong 2^{\cdot}(\mathrm{PSL}_2(q) \times \mathrm{PSL}_2(q)){:}2$ [13, табл. 4.1]. Так как M_2 не является сомножителем ни в одной факторизации группы G [15, табл. 5], то $F \le M_2$. В обоих случаях $|F|$ делит $4q^2(q^2-1)^2$.

Группа $\mathrm{G}_2(q)$ содержит максимальную подгруппу $M_3 \cong \mathrm{SU}_3(q) : 2$ [13, табл. 4.1]. Если F не содержится в M_3, то $G = M_3F$. Так как $|F|$ делит $4q^2(q^2-1)^2$, $|M_3| = 2q^3(q^2-1)(q^3+1)$ и $|G| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$, то равенство $G = M_3F$ возможно только при $q = 4$ (группа $\mathrm{G}_2(2)$ не является простой).

Рассмотрим данный случай. Согласно [15, табл. 5] в этом случае имеют место две факторизации $\mathrm{G}_2(4) = \mathrm{J}_2 \cdot \mathrm{SU}_3(4) = \mathrm{J}_2 \cdot (\mathrm{SU}_3(4).2)$. Из [16, с. 97] следует, что $\mathrm{PSL}_2(13) \lessdot \mathrm{G}_2(4)$. Поэтому F является подгруппой в группе $\mathrm{PSL}_2(13)$. По предложению 1 группа F не является собственной подгруппой в $\mathrm{PSL}_2(13)$, поэтому $F \cong \mathrm{PSL}_2(13)$. Согласно [16, с. 97] группа $\mathrm{G}_2(4)$ содержит максимальную подгруппу $\mathrm{A}_5 \times \mathrm{A}_5$. Следовательно, F является подгруппой данной группы, что невозможно. Значит, $q \ne 4$ и $F \le M_3$.

Рассмотрим отдельно случаи $q = 3$ и $q = 5$.

Пусть $q = 3$. Группа $\mathrm{G}_2(3)$ содержит максимальную подгруппу $\mathrm{PSL}_2(13)$ [16, с. 61]. Факторизации группы $\mathrm{G}_2(3)$ приведены в [15, табл. 5]. Отсюда легко заключить, что максимальная подгруппа $\mathrm{PSL}_2(13)$ не является сомножителем ни в одной факторизации. Таким образом, $F \le S \cong \mathrm{PSL}_2(13)$. Из предложения 1 следует, что $F \cong \mathrm{PSL}_2(13)$. Группа G содержит максимальную подгруппу $M_4 \cong \mathrm{PSL}_2(8) : 3$ [16, с. 61]. Ясно, что подгруппа F не содержится в M_4 и, следовательно, $G = M_4F$. Последнее невозможно [15, табл. 5].

Пусть $q = 5$. Согласно [16, с. 114] имеем $F \le M_5 = A.B \cong 2^3.\,\mathrm{PSL}_3(2) \lessdot \mathrm{G}_2(5)$. Рассмотрим $\overline{M_5} = M_5/A \cong \mathrm{PSL}_3(2)$. Если $\overline{F} \ne 1$, то по предложению 1 имеем $\overline{F} \cong \mathrm{PSL}_3(2)$ и 7 делит $|F|$. С другой стороны, в силу [16, с. 114] группа F содержится в максимальной подгруппе $M_2 \cong 2^{\cdot}(\mathrm{PSL}_2(5) \times \mathrm{PSL}_2(5)){:}2$, у которой порядок взаимно прост с 7. Поэтому $\overline{F} = 1$ и $|F|$ делит 8.

Рассмотрим максимальную подгруппу $M_2 = \langle\tau\rangle^{\cdot}(P \times L){:}\langle\mu\rangle \cong 2^{\cdot}(\mathrm{PSL}_2(5) \times \mathrm{PSL}_2(5)){:}2$. Определим $\overline{M_2} = M_2/\langle\tau\rangle = (\overline{P} \times \overline{L}){:}\langle\overline{\mu}\rangle$, $\overline{N} = \overline{P} \times \overline{L}$. Пусть $\overline{F} \ne 1$. Предположим, что $\overline{F} \le \overline{N}$. По предложению 1 группа $\overline{F}$ не содержится в $\overline{P}$ и $\overline{PF} < \overline{N}$. Теперь достаточно рассмотреть фактор-группу $(\overline{P} \times \overline{L})/\overline{P} \cong \mathrm{PSL}_2(5)$ и снова воспользоваться предложением 1. Следовательно, $\overline{F}$ не содержится в $\overline{N}$. По условию существует подгруппа $\overline{PF}^{\overline{m}}$ для некоторого $\overline{m} \in \overline{M}_2$, причем $\overline{F}^{\overline{m}}$ не содержится в $\overline{N}$. Поскольку $\overline{P} \lhd \overline{N}$, для любого $\overline{y} \in \overline{F}^{\overline{m}} \setminus \overline{N}$ выполняется $\overline{P}^{\overline{y}} = \overline{P}^{\overline{\mu}}$ и $\overline{P}^{\overline{\mu}} \le \overline{PF}^{\overline{m}}$; противоречие с $|\overline{PF}^{\overline{m}}| \le 8|\overline{P}|$. Таким образом, $F = \langle\tau\rangle$ и $|F| = 2$.

Согласно [16, с. 114] имеем $F \le T = K : R \cong \mathrm{PSL}_3(5) : 2 \lessdot \mathrm{G}_2(5)$. Если $F \le K$, то в K существует подгруппа порядка $2 \cdot 3 \cdot 31$, что невозможно [16, с. 38]. Следовательно, F не содержится в K. Группа K содержит два класса сопряженности параболических подгрупп, изоморфных $5^2{:}\mathrm{GL}_2(5)$. По условию группа T должна содержать подгруппу, изоморфную $5^2 : \mathrm{GL}_2(5).2$. Однако таких подгрупп в группе T нет [16, с. 38].

Таким образом, можно считать, что $q > 5$. Согласно [13, табл. 4.1] имеем $F \le M_3 = Q : E \cong \mathrm{SU}_3(q) : 2 \lessdot \mathrm{G}_2(q)$. Группа M_3 содержит максимальную подгруппу $U \cong ((q^2-q+1) : 3) : 2$ [17, табл. 8.5]. Если F не содержится в U, то $M_3 = FU$. Так как $q > 5$, из [15, табл. 1, 3] следует, что это невозможно. Поэтому $F \leq U$. При этом $|F|$ делит $4q^2(q^2-1)^2$ и $|U| = 6(q^2-q+1)$. Легко показать, что $(q^2-q+1, q-1) = 1$ и $(q^2-q+1, q+1) \in \{1, 3\}$. Отсюда следует, что $|F|$ делит $2 \cdot 3^2$.

Пусть $p = 2$. Как отмечалось ранее, группа F содержится в максимальной подгруппе $M_1 = P \times L \cong \mathrm{PSL}_2(q) \times \mathrm{PSL}_2(q)$. В силу предложения 1 имеем $F \nleq P$. Теперь достаточно рассмотреть фактор-группу $(P \times L)/P$ и применить лемму 1.

Пусть $p \neq 2$. Поскольку $|F|$ делит $2 \cdot 3^2$, то, как в случае $\mathrm{G}_2(5)$, показывается, что $|F| = 2$. Группа G содержит максимальную подгруппу $M_6 = C:D \cong \mathrm{SL}_3(q):2$ [13, табл. 4.1] и $F \leq M_6$. Группа C содержит максимальную подгруппу $H \cong (q^2+q+1):3$ [17, табл. 8.3]. Если $F \leq C$, то в C существует подгруппа HF порядка $6(q^2+q+1)$. Последнее невозможно. Следовательно, F не содержится в C.

Группа M_6 является расширением группы $\mathrm{SL}_3(q)$ с помощью графового автоморфизма порядка 2. Поскольку $F = \langle f \rangle \nleq C$, автоморфизм f сопряжен либо с графовым, либо с графово-полевым автоморфизмом [18, §9]. Пусть P_1 — максимальная параболическая подгруппа в C. По условию существует подгруппа P_1F^h для некоторого $h \in H$. Последнее невозможно, так как автоморфизм f^h не нормализует максимальные параболические подгруппы [19, табл. 8.3].

V. $G \cong {}^3\mathrm{D}_4(q)$, где $q = p^m$.

Согласно [15, табл. 5] группа ${}^3\mathrm{D}_4(q)$ не имеет факторизаций. Следовательно, F содержится в любой максимальной подгруппе группы G. В частности, $F \leq M \cong \mathrm{G}_2(q) \lessdot G$ [13, теорема 4.3]. Так как группа G содержит максимальную подгруппу $K \cong (q^4-q^2+1):4$ [13, теорема 4.3], то $F < M$. Последнее невозможно в силу п. IV за исключением случая $q = 2$.

Пусть $G \cong {}^3\mathrm{D}_4(2)$. Поскольку $(|M|, |K|) = (2^6 \cdot 3^3 \cdot 7, 2^2 \cdot 13) = 4$, то $|F|$ делит 4. Согласно [16, с. 89] подгруппа F содержится в максимальной подгруппе N группы G, изоморфной $3^2 : 2\,\mathrm{A}_4$. Если $|F| = 4$, то достаточно рассмотреть фактор-группу $N/L \cong \mathrm{A}_4$, где $L \lhd N$ и $|L| = 18$. Следовательно, $|F| = 2$. Подгруппа F содержится в максимальной подгруппе $T = A : B \cong \mathrm{PSU}_3(3) : 2$ [16, с. 89]. Пусть $F \leq A$. Группа A содержит максимальную подгруппу N, изоморфную $\mathrm{PSL}_2(7)$ [16, с. 14]. Стало быть, $F \leq N$, что противоречит предложению 1. Таким образом, F не содержится в A. По условию существует подгруппа NF^a для некоторого $a \in A$. Тогда F^a нормализует подгруппу $R < N$, где $R \cong \mathrm{S}_4$. Последнее невозможно [16, с. 3].

VI. $G \cong \mathrm{F}_4(q)$, где $q = p^m$.

Предположим, что $q = q_0^r$ для некоторого простого r. Согласно [20, табл. 7.1] группа G содержит максимальную подгруппу $\mathrm{F}_4(q_0)$. Поскольку $\mathrm{F}_4(q)$ не имеет факторизаций [15, табл. 5], то $F \leq \mathrm{F}_4(q_0)$. Таким образом, можно считать, что $q = p$ — простое число.

Пусть $q > 3$. Тогда из [20, табл. 7.1] следует, что группа G содержит максимальную подгруппу $R = A \times B \cong \mathrm{PGL}_2(q) \times \mathrm{G}_2(q)$. Поскольку группа $\mathrm{F}_4(q)$ не имеет факторизаций [15, табл. 5], то $F \leq R$.

Рассмотрим образ $\overline{F}$ группы F в фактор-группе $R/A \cong \mathrm{G}_2(q)$. Если $\overline{F} = \mathrm{G}_2(q)$, то $|\,\mathrm{G}_2(q)|$ делит $|F|$. Из леммы 3 следует, что $|\,\mathrm{G}_2(q)|$ делит порядок максимальной подгруппы $[q^{20}]:(\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_3(q)).(q-1)$ [20, табл. 7.1]. Последнее, очевидно, невозможно. Согласно п. IV получаем, что $\overline{F}$ — единичная группа и, следовательно, $F \leq A$. Из предложения 1 следует, что группа F содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{PSL}_2(q)$. Группа $\mathrm{F}_4(q)$ содержит максимальную подгруппу ${}^3\mathrm{D}_4(q).3$ [20, табл. 7.1]. Так как $|\,\mathrm{PGL}_2(q):\mathrm{PSL}_2(q)|=2$, то F содержится в группе, изоморфной ${}^3\mathrm{D}_4(q)$. Группа $L\cong {}^3\mathrm{D}_4(q)$ содержит максимальную подгруппу $T\cong (q^4-q^2+1):4$ [13, теорема 4.3]. Отсюда следует, что $L=FT$. Однако группа ${}^3\mathrm{D}_4(q)$ не имеет факторизаций [15, табл. 5].

Рассмотрим случай $G\cong \mathrm{F}_4(3)$. Группа $\mathrm{F}_4(3)$ содержит максимальную подгруппу ${}^3\mathrm{D}_4(2).3$ [20, табл. 1.1] порядка $2^{12}\cdot 3^5\cdot 7\cdot 13$ и максимальную подгруппу $\mathrm{PSL}_2(25).2$ [20, табл. 1.1] порядка $2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13$. Отсюда следует, что $|F|$ делит $2^4{\cdot}3{\cdot}13$. Группа $\mathrm{F}_4(3)$ содержит максимальную подгруппу $(\mathrm{SU}_3(3)\circ\mathrm{SU}_3(3)).2$ [20, табл. 7.1], порядок которой не делится на 13. Поэтому $|F|$ делит $2^4\cdot 3$. Группа G содержит максимальную подгруппу $K=C.D\cong 2.\Omega_9(3)$ [20, табл. 7.1]. Рассмотрим фактор-группу $\overline{K}=K/C\cong \Omega_9(3)$. Пусть $\overline{F}\neq 1$. Группа $\overline{K}$ содержит максимальную подгруппу $\overline{S}=\overline{M}:\overline{N}\cong 2^8:A_9$ [17, табл. 8.58]. Очевидно, что $\overline{F}\leq \overline{S}$. Если 3 делит $|F|$, то группа A_9 содержит собственную наследственно A_9-перестановочную подгруппу, что противоречит [10]. Следовательно, $|F|$ делит 2^4. В группе G существует максимальная подгруппа, изоморфная ${}^3\mathrm{D}_4(3).3$. Так как $|F|$ — степень числа 2, то F содержится в группе, изоморфной ${}^3\mathrm{D}_4(3)$. Последнее невозможно в силу п. V.

Наконец, рассмотрим случай $G\cong \mathrm{F}_4(2)$. Группа $\mathrm{F}_4(2)$ содержит максимальную подгруппу $3.(3^2:Q_8\times 3^2:Q_8).\mathrm{S}_3$ [16, с. 170] порядка $2^7\cdot 3^6$. Отсюда следует, что $|F|$ делит $2^7\cdot 3^6$. Кроме того, $\mathrm{F}_4(2)$ содержит максимальную подгруппу $Q=\mathrm{PSp}_8(2)$ [16, с. 170] и $F\leq Q$. Группа Q содержит максимальную подгруппу $\mathrm{PSL}_2(17)$ [16, с. 123] и F содержится в группе, изоморфной $\mathrm{PSL}_2(17)$. Последнее невозможно в силу предложения 1.

VII. $G\cong {}^2\mathrm{E}_6(q)$, $q=p^m$.

Группа ${}^2\mathrm{E}_6(q)$ содержит максимальную подгруппу $\mathrm{F}_4(q)$ [20, табл. 7.4]. Так как группа ${}^2\mathrm{E}_6(q)$ не имеет факторизаций [15, табл. 5], то F содержится в любой максимальной подгруппе группы G. В частности, F содержится в группе, изоморфной $\mathrm{F}_4(q)$. В силу п. VI имеем $F\cong \mathrm{F}_4(q)$. Противоречие с тем, что F содержится в любой максимальной подгруппе группы G.

VIII. $G\cong \mathrm{E}_6(q)$, $q=p^m$.

Группа G содержит максимальную подгруппу $\mathrm{F}_4(q)$ [20, табл. 7.3]. Так как группа G не имеет факторизаций [15, табл. 5], то F содержится в любой максимальной подгруппе группы G. В частности, F содержится в группе, изоморфной $\mathrm{F}_4(q)$. В силу п. VI имеем $F\cong \mathrm{F}_4(q)$; противоречие с тем, что F содержится в любой максимальной подгруппе группы G.

IX. $G\cong \mathrm{E}_7(q)$, $q=p^m$.

Пусть $q>2$. Согласно [21, табл. 4.1] группа $H=A\times B=\mathrm{PSL}_2(q)\times \mathrm{F}_4(q)$ максимальна в G. Так как G не имеет факторизаций [15, табл. 5], то $F\leq H$. Рассмотрим образ $\overline{F}$ группы F в фактор-группе $H/A\cong \mathrm{F}_4(q)$. Если $\overline{F}\neq 1$, то, применяя п. VI, получаем, что $\overline{F}\cong \mathrm{F}_4(q)$. Следовательно, $|F|$ делится на $|\,\mathrm{F}_4(q)|=q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$. С другой стороны, группа $M=\mathrm{PSL}_2(q^7).7$ максимальна в группе G [21, табл. 4.1] и $F\leq M$; противоречие с $|F|>|M|$. Таким образом, $\overline{F}=1$ и $F\leq \mathrm{PSL}_2(q)$. В силу предложения 1 получаем, что $F=\mathrm{PSL}_2(q)$.

Согласно [21, табл. 4.1] группа $K={}^3\mathrm{D}_4(q).3$ максимальна в G при $q>2$. Следовательно, $F\leq K$. Группа K содержит максимальную подгруппу $T=((q^4-q^2+1):4).3$ [13, теорема 4.3]. Поскольку K не имеет факторизаций, то

$F \leq T$. Группа T разрешима, поэтому вложение $F \leq T$ возможно только при $q = 3$.

Как отмечалось выше, группа $M = \mathrm{PSL}_2(q^7).7$ максимальна в G, поэтому $F \leq M$. Так как $|F| = |\mathrm{PSL}_2(3)| = 12$, то $F \leq \mathrm{PSL}_2(q^7)$; противоречие с предложением 1.

Пусть $q = 2$. Все максимальные подгруппы в $G = \mathrm{E}_7(2)$ описаны в [22]. Группа G содержит максимальную подгруппу $L = C : D = 2^{27} : \mathrm{E}_6(2)$. Так как G не имеет факторизаций, то $F \leq L$. Применяя п. VIII к группе $\overline{L} = L/C$, получаем, что либо $F \leq C$, либо $F \geq D$. В последнем случае $|F| \geq |\mathrm{E}_6(2)| > |M|$ для максимальной подгруппы $M = \mathrm{PSL}_2(2^7).7$; противоречие с леммой 2.

Таким образом, $F \leq C$ и $F \leq M$. Поскольку F — 2-группа, F является собственной подгруппой в $\mathrm{PSL}_2(2^7)$, что противоречит предложению 1.

X. $G \cong \mathrm{E}_8(q)$, $q = p^m$.

Согласно [23, табл. 3] группа $H = A \times B = \mathrm{G}_2(q) \times \mathrm{F}_4(q)$ максимальна в G. Так как G не имеет факторизаций, то $F \leq H$.

Рассмотрим фактор-группу $H/A \cong \mathrm{F}_4(q)$. Если образ группы F в H/A нетривиален, то, применяя п. VI, получаем, что $|F| \geq |\mathrm{F}_4(q)|$.

Аналогично рассмотрим фактор-группу $H/B \cong \mathrm{G}_2(q)$. Если образ группы F в H/B нетривиален, то, применяя п. IV, получаем, что $|F| \geq |\mathrm{G}_2(q)|$.

В обоих случаях $|F| \geq |\mathrm{G}_2(q)| = q^6(q^6 - 1)(q^2 - 1)$.

С другой стороны, согласно [24, табл. 5.2] группа G содержит максимальную подгруппу $M \cong (q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1).30$, соответствующую диаграмме Картана $\mathrm{E}_8(a_5)$. Получаем противоречие с $|F| > |M|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5, N 2. P. 431–460.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Stonehewer S. E.* Permutable subgroups of infinite groups // Math. Z. 1972. V. 125, N 1. P. 1–16.
4. *Ito N., Szep J.* Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Acta Sci. Math. 1962. V. 23, N 1–2. P. 168–170.
5. *Isaacs I. M.* Finite group theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008. (Grad. Stud. Math.; V. 92).
6. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
7. *Guo W., Skiba A. N., Shum K. P.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315. P. 31–41.
8. *Guo W.* Structure theory for canonical classes of finite groups. Heidelberg: Springer, 2015.
9. *Mazurov V. D., Khukhro E. I.* The Kourovka notebook: Unsolved problems in group theory. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2022. V. 20.
10. *Васильев А. Ф., Тютянов В. Н.* Знакопеременные группы с наследственно G-перестановочной подгруппой // Изв. Гомельск. ун-та. 2012. Т. 5, № 74. С. 148–150.
11. *Тютянов В. Н., Бычков П. В.* О наследственно G-перестановочных подгруппах спорадических групп // Вестн. Полоцкого ун-та. 2008. Т. 3. С. 23–29.
12. *Гальт А. А., Тютянов В. Н.* О существовании G-перестановочных подгрупп в простых спорадических группах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 831–841.
13. *Wilson R. A.* The finite simple groups. London: Springer-Verl., 2009. (Grad. Texts Math.; V. 251).
14. *Ito N.* On the factorizations of the linear fractional groups $LF(2, p^n)$ // Acta Sci. Math. 1953. V. 15. P. 79–84.
15. *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 432.

16. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* An atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
17. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 407).
18. *Gorenstein D., Lyons R.* The local structure of finite groups of characteristic 2 type // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. V. 276.
19. *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 129).
20. *Craven D. A.* The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q)$, $E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$ and related almost simple groups // Invent. Math. 2023. https://doi.org/10.1007/s00222-023-01208-2.
21. *Craven D. A.* On the maximal subgroups of $E_7(q)$ and related almost simple groups // https://arxiv.org/abs/2201.07081v1.
22. *Ballantyne J., Bates C., Rowley P.* The maximal subgroups of $E_7(2)$ // LMS J. Comput. Math. 2015. V. 18, N 1. P. 323–371.
23. *Liebeck M. W., Seitz G. M.* A survey of maximal subgroups of exceptional groups of Lie type // Groups, combinatorics and geometry. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2003. P. 139–146.
24. *Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M.* Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1992. V. 65, N 3. P. 297–325.

Поступила в редакцию 18 марта 2023 г.
После доработки 24 июля 2023 г.
Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Гальт Алексей Альбертович (ORCID 0000-0002-0788-5871)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
galt84@gmail.com

Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com