А. А. Жукова, А. В. Шутов, О двух соотношениях, характеризующих золотое сечение, *Дальневост. матем. журн.*, 2021, том 21, номер 2, 194–202

DOI: 10.47910/FEMJ202116

Дальневосточный математический журнал. 2021. Т. 21. № 2. С. 194–202

УДК 511.31
MSC2020 11B39

© А. А. Жукова[1], А. В. Шутов[2]

О двух соотношениях, характеризующих золотое сечение

В. Г. Журавлев нашел два соотношения, связанных с золотым сечением: $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $[([i\tau]+1)\tau] = [i\tau^2]+1$ и $[[i\tau]\tau]+1 = [i\tau^2]$. Мы даем новое элементарное доказательство данных соотношений и показываем, что они характеризуют золотое сечение. Также мы рассматриваем выполнимость данных соотношений для конечных множеств i и устанавливаем некоторое свойство форсинга.

Ключевые слова: *золотое сечение, числа Фибоначчи.*

DOI: https://doi.org/10.47910/FEMJ202116

Введение

Пусть τ — золотое сечение, т.е. $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В. Г. Журавлев в работе [1] получил два интересных соотношения, связанных с золотым сечением.

Теорема 1. *Для любого целого i справедливо равенство*

$$[([i\tau]+1)\tau] = [i\tau^2]+1. \tag{1}$$

Кроме того, для любого целого $i \neq 0$ справедливо равенство

$$[[i\tau]\tau]+1 = [i\tau^2]. \tag{2}$$

Здесь $[\cdot]$ означает целую часть числа.

Доказательство соотношений (1) и (2) в работе [1] было основано на глубокой теории, связанной с иррациональным поворотом окружности $x \to x+\tau \bmod 1$. Некоторые аналоги данных соотношений для произвольных иррациональностей обсуждаются в [2].

[1] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», Владимирский филиал, 600017, г. Владимир, ул. Горького, 59 а.

[2] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых» (ВлГУ), 600000, г. Владимир, ул. Горького, 87.

Электронная почта: `georg967@mail.ru` (А. А. Жукова), `a1981@mail.ru` (А. В. Шутов).

В настоящей работе мы даем существенно более простое доказательство теоремы 1, а также рассматриваем обратную задачу, то есть описываем, в какой степени данные соотношения характеризуют золотое сечение.

Рассмотрим аналоги соотношений (1) и (2) с заменой τ на произвольное α:

$$[([i\alpha]+1)\alpha] = [i\alpha^2]+1; \tag{3}$$

$$[[i\alpha]\alpha]+1 = [i\alpha^2]. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть для некоторого α соотношение* (3) *выполняется при всех целых i, а соотношение* (4) *выполняется при всех целых $i \neq 0$. Тогда $\alpha = \tau$.*

Таким образом, данные соотношения однозначно характеризуют золотое сечение.

Далее мы рассматриваем выполнимость соотношений (3) и (4) для конечных множеств чисел. Оказывается, что эти соотношения обладают свойством форсинга: выполнимость соотношений для некоторых множеств i обеспечивает их выполнимость для больших значений i. Количественно явление описывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть для некоторого α соотношение* (3) *выполняется при $i = 0, 1, 2, \ldots, F_n$ и соотношение* (4) *выполняется при $i = 1, 2, \ldots, F_n$. Тогда соотношения* (3) *и* (4) *также выполняются для $i = F_n + 1, \ldots, F_{n+1} - 1$.*

Здесь F_n означает n-ое число Фибоначчи: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n > 1$.

1. Доказательство теоремы 1

Во-первых, заметим, что соотношение (1) выполняется для $i = 0$. Далее, при $i \neq 0$ подстановка $i \to -i$ переводит соотношения (1) и (2) друг в друга. Поэтому достаточно ограничиться случаем $i > 0$.

Хорошо известно [4], что каждое натуральное i может быть единственным образом представлено в виде

$$i = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_r}, \tag{5}$$

где $k_r \geqslant 2$, $k_j \geqslant k_{j+1} + 2$ при всех $j = 1, 2, \ldots, r-1$.

Вычислим $[i\tau]$ и $[i\tau^2]$ в терминах этого представления.

Лемма 1. *Если натуральное i может быть представлено как* (5), *то*

$$[i\tau] = F_{k_1+1} + F_{k_2+1} + \ldots + F_{k_r+1} - \varepsilon(k_r),$$

где

$$\varepsilon(k_r) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k_r - \text{четное}, \\ 0, & \text{если} \quad k_r - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [3, с. 339].

Лемма 2. *Если натуральное i может быть представлено как* (5), *то*

$$[i\tau^2] = F_{k_1+2} + F_{k_2+2} + \ldots + F_{k_r+2} - \varepsilon(k_r).$$

Доказательство. Ясно, что

$$i\tau^2 = i(1+\tau) = F_{k_1} + \ldots + F_{k_r} + \tau F_{k_1} + \ldots + \tau F_{k_r}.$$

Из формулы Бине легко получить соотношение

$$\tau F_k = F_{k+1} - (-\,\tau)^{-k}.$$

Поэтому

$$i\tau^2 = F_{k_1+2} + \ldots + F_{k_r+2} - ((-\,\tau)^{-k_1} + \ldots + (-\,\tau)^{-k_r}). \tag{6}$$

При этом

$$|(-\,\tau)^{-k_1} + \ldots + (-\,\tau)^{-k_r}| < \tau^{-k_r} + \tau^{-k_r+2} + \tau^{-k_r+4} + \ldots = \frac{\tau^{-k_r}}{1-\tau^{-2}} < 1. \tag{7}$$

Аналогично,

$$|(-\,\tau)^{-k_1} + \ldots + (-\,\tau)^{-k_{r-1}}| < \tau^{-k_r}$$

и, следовательно, знак выражения $(-\tau)^{-k_1}+\ldots+(-\tau)^{-k_r}$ совпадает со знаком числа $(-\tau)^{k_r}$, то есть с $(-1)^{k_r}$. Объединяя это с (6) и (7), получаем утверждение леммы. □

Для доказательства соотношения (1) дважды применим лемму 1 к левой части соотношения.

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного k_r.

Если k_r — четное, то с учетом утверждения леммы 1 получаем, что $[i\tau]+1 = F_{k_1+1}+F_{k_2+1}+\ldots+F_{k_r+1}$, и, соответственно, $[([i\tau]+1)\tau] = F_{k_1+2}+F_{k_2+2}+\ldots+F_{k_r+2}$, так как k_r+1 нечетно.

Если же k_r — нечетно, то в силу леммы 1: $[i\tau]+1 = F_{k_1+1}+F_{k_2+1}+\ldots+F_{k_r+1}+1$, где k_r+1 — четное, большее или равное 4, а значит, последнее равенство можно переписать как $[i\tau]+1 = F_{k_1+1}+F_{k_2+1}+\ldots+F_{k_r+1}+F_2$.

Найдем $[([i\tau]+1)\tau]$, используя утверждение леммы 1:

$$[([i\tau]+1)\tau] = F_{k_1+2} + F_{k_2+2} + \ldots + F_{k_r+2} + F_3 - 1 = F_{k_1+2} + F_{k_2+2} + \ldots + F_{k_r+2} + 1.$$

Таким образом,

$$[([i\tau]+1)\tau] = F_{k_1+2} + F_{k_2+2} + \ldots + F_{k_r+2} + 1,$$

при k_r — нечетном и

$$[([i\tau]+1)\tau] = F_{k_1+2} + F_{k_2+2} + \ldots + F_{k_r+2},$$

при k_r — четном.

Применение леммы 2 к правой части соотношения (1) дает тот же результат, что и доказывает данное соотношение.

Доказательство соотношения (2) проводится полностью аналогично.

2. Вспомогательные леммы

Для доказательства теорем 2 и 3 нам потребуется ряд вспомогательных лемм.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \in \left[\frac{F_{2k}}{F_{2k-1}}; \frac{F_{2k+1}}{F_{2k}}\right)$ *и* $1 \leqslant x < F_{2k-1}$. *Тогда*

$$[F_{2k}\alpha] = F_{2k+1} - 1 \tag{8}$$

и

$$[(F_{2k} + x)\alpha] = [F_{2k}\alpha] + [x\alpha] + 1. \tag{9}$$

Доказательство. Для доказательства (8) оценим $F_{2k}\alpha$, используя левую и правую границы для α:

$$\frac{F_{2k}^2}{F_{2k-1}} \leqslant F_{2k}\alpha < F_{2k+1}.$$

Далее воспользуемся соотношением Кассини:

$$F_k^2 = F_{k-1}F_{k+1} + (-1)^{k+1}.$$

Получим

$$F_{2k+1} - \frac{1}{F_{2k-1}} \leqslant F_{2k}\alpha < F_{2k+1},$$

что дает нам (8), а также оценку

$$\{F_{2k}\alpha\} \geqslant 1 - \frac{1}{F_{2k-1}}, \tag{10}$$

где $\{\cdot\}$ — дробная доля числа.

Далее заметим, что разложение числа $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ в цепную дробь имеет вид $[1;\underbrace{1,\ldots,1}_{n-3},2]$. Поэтому для любого $\alpha \in \left(\frac{F_{2k}}{F_{2k-1}}; \frac{F_{2k+1}}{F_{2k}}\right)$ разложение α в цепную дробь начинается с $2k-2$ единиц. Следовательно, $F_2, F_3, \ldots, F_{2k-2}$ являются знаменателями подходящих дробей для α. Поэтому

$$\min_{1 \leqslant x < F_{2k-1}} \{x\alpha\} = \{F_{2k-3}\alpha\}$$

и

$$\max_{1 \leqslant x < F_{2k-1}} \{x\alpha\} = \{F_{2k-2}\alpha\}.$$

При этом если $\{Q_n\}$ – последовательность знаменателей подходящих дробей к α и $||\cdot||$ – расстояние до ближайшего целого, то, как известно,

$$\frac{1}{Q_n + Q_{n+1}} < ||Q_n\alpha|| < \frac{1}{Q_{n+1}}.$$

Применяя данную оценку для $||F_{2k-3}\alpha||$ находим, что

$$\{x\alpha\} > \frac{1}{F_{2k-1}}.$$

Учитывая (10), получаем
$$\{F_{2k}\alpha\} + \{x\alpha\} > 1,$$
и, следовательно,
$$\{(F_{2k} + x)\alpha\} = \{F_{2k}\alpha\} + \{x\alpha\} - 1.$$
При этом очевидно, что
$$(F_{2k} + x)\alpha = F_{2k}\alpha + x\alpha.$$
Вычитая из последнего равенства предпоследнее, получаем (9). □

Лемма 4. *Пусть* $\alpha \in \left[\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}}; \frac{F_{2k}}{F_{2k-1}}\right)$ *и* $1 \leqslant x < F_{2k}$. *Тогда*
$$[F_{2k+1}\alpha] = F_{2k+2} \tag{11}$$
и
$$[(F_{2k+1} + x)\alpha] = [F_{2k+1}\alpha] + [x\alpha]. \tag{12}$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4 с той разницей, что используются верхние, а не нижние оценки для $\{F_{2k+1}\alpha\}$ и $\{x\alpha\}$. □

Лемма 5. *Пусть* $\alpha \in \left[\sqrt{\frac{F_{2k+1}}{F_{2k-1}}}; \sqrt{\frac{F_{2k+2}}{F_{2k}}}\right)$ *и* $1 \leqslant x < F_{2k-1}$. *Тогда*
$$[F_{2k}\alpha^2] = F_{2k+2} - 1 \tag{13}$$
и
$$[(F_{2k} + x)\alpha^2] = [F_{2k}\alpha^2] + [x\alpha^2] + 1. \tag{14}$$

Лемма 6. *Пусть* $\alpha \in \left[\sqrt{\frac{F_{2k+3}}{F_{2k+1}}}; \sqrt{\frac{F_{2k+2}}{F_{2k}}}\right)$ *и* $1 \leqslant x < F_{2k}$. *Тогда*
$$[F_{2k+1}\alpha^2] = F_{2k+3} \tag{15}$$
и
$$[(F_{2k+1} + x)\alpha^2] = [F_{2k+1}\alpha^2] + [x\alpha^2]. \tag{16}$$

Доказательство. Доказательство лемм 5 и 6 проводится аналогично доказательству лемм 3 и 4, за исключением того, что нужно рассматривать разложение в цепную дробь для α^2, а не для α. □

3. Доказательство теоремы 2

Теорема 2 немедленно вытекает из следующего более сильного результата.

Теорема 4. *Пусть для некоторого* α *соотношения* (3) *и* (4) *выполняются в случае, когда* i *равно любому из чисел Фибоначчи, и, кроме того, соотношение* (3) *выполняется для* $i = 0$. *Тогда* $\alpha = \tau$.

Заметим, что из теорем 4 и 1 вытекает, что если соотношения (3) и (4) выполняются для всех чисел Фибоначчи, то они автоматически выполняются для всех i.

Доказательство. Обозначим через $\overline{X}_n$ множество таких α, для которых равенство (3) выполняется для $i = 0, F_2, F_3, \ldots, F_n$, и равенство (4) выполняется для $i = F_2, F_3, \ldots, F_n$.

Покажем, что

$$\overline{X}_{2k} = \left[\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}}; \sqrt{\frac{F_{2k+2}}{F_{2k}}}\right) \tag{17}$$

и

$$\overline{X}_{2k+1} = \left[\sqrt{\frac{F_{2k+3}}{F_{2k+1}}}; \frac{F_{2k+3}}{F_{2k+2}}\right) \tag{18}$$

Воспользуемся методом математической индукции. Для установления справедливости (17) и (18) при $k=1$ будем последовательно подставлять $i=0, F_2=1, F_3=2$ в (3) и (4) и решать полученные уравнения относительно α. При этом мы будем учитывать ограничения на α, получаемые на предыдущих шагах.

Подстановка $i=0$ в (3) дает уравнение $[\alpha]=1$, то есть $\alpha \in [1;2)$. Далее, подстановка $i=1$ в (4) с учетом условия $[\alpha]=1$ дает $[\alpha^2]=2$, то есть $\alpha \in [1;\sqrt{3})$. Подстановка $i=$ $=1$ в (3) с учетом уже полученных ограничений на α дает уравнение $[2\alpha]=3$. В итоге получаем, что $\alpha \in [\frac{3}{2};\sqrt{3})$, то есть (17) справедливо при $k=1$. Дальнейшая подстановка $i=2$ доказывает справедливость (18) при $k=1$.

Рассмотрим шаг индукции $k \to k+1$. Для вычисления $\overline{X}_{2k+2}$ подставим $i=F_{2k+2}$ в (3). При этом условие $\alpha \in \overline{X}_{2k+1} \subset \overline{X}_{2k}$ обеспечивает, что $\alpha \in \left[\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+1}}; \frac{F_{2k+3}}{F_{2k+2}}\right)$. Применяя лемму 4, находим

$$[F_{2k+2}\alpha] = F_{2k+3} - 1.$$

Поэтому (3) переписывается в виде

$$[(F_{2k+3} - 1)\alpha] = [F_{2k+2}\alpha^2].$$

Далее, из оценки $\alpha \geqslant \sqrt{\frac{F_{2k+3}}{F_{2k+1}}}$ находим

$$F_{2m+2}\alpha^2 \geqslant \frac{F_{2m+2}F_{2m+3}}{F_{2m+1}} = F_{2m+4} - \frac{1}{F_{2m+1}},$$

что дает нам неравенство $[F_{2k+2}\alpha^2] \geqslant F_{2k+4} - 1$. Аналогично из оценки $\alpha < \frac{F_{2k+3}}{F_{2k+2}}$ получается неравенство $[(F_{2k+3} - 1)\alpha] \leqslant F_{2k+4} - 1$. Следовательно,

$$[F_{2k+2}\alpha^2] = F_{2k+4} - 1, \tag{19}$$

то есть

$$\alpha < \sqrt{\frac{F_{2k+4}}{F_{2k+2}}}. \tag{20}$$

Далее подставим $i=F_{2k+2}$ в (4). При этом лемма 3 и (19) позволяют переписать (4) в виде

$$[F_{2k+3}\alpha] = F_{2k+4},$$

откуда находим
$$\alpha \geqslant \frac{F_{2k+4}}{F_{2k+3}}.$$

Объединяя это неравенство с (20), получаем требуемую формулу для $\overline{X}_{2k+2}$.

Вычисление $\overline{X}_{2k+3}$ проводится полностью аналогично.

Для завершения доказательства теоремы 4 остается заметить, что полуинтервалы $\overline{X}_k$ являются вложенными друг в друга и, следовательно, содержат единственную общую точку, определяемую как предел их левых/правых концов. Очевидно, что этот предел равен $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \tau$. □

4. Доказательство теоремы 3

Пусть X_n — множество α таких, что (3) выполняется при $i = 0,1,2\ldots,n$ и (4) выполняется при $i = 1,2\ldots,n$. Ясно, что $X_{n+1} \subseteq X_n$.

Теорема 3 означает, что при $F_m \leqslant n < F_{m+1}$ $X_n = X_{F_m}$.

Пусть Y_n — множество α таких, что (3) и (4) выполняются для $i = n$. Тогда $X_n = \bigcap_{k\leqslant n} Y_k$. Теорема 3 утверждает, что при $F_m \leqslant n < F_{m+1}$ выполняется равенство $X_n = X_{F_m}$. Легко видеть, что для ее доказательства достаточно показать, что для рассматриваемых значений n имеет место включение $Y_n \subseteq \overline{X}_m$. Другими словами, нужно показать, что при $\alpha \in \overline{X}_m$ равенства (3) и (4) выполняются для $F_m < n < F_{m+1}$ (случай $n = F_m$ уже рассмотрен при доказательстве теоремы 2).

Доказательство будем проводить индукцией по m. База индукции $m = 2,3$ (то есть $n < F_4 = 5$) проверяется непосредственной подстановкой соответствующих значений i в (3) и (4) с последующим решением получаемых уравнений относительно α аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе.

Рассмотрим шаг индукции $m-1 \to m$. Отдельно рассмотрим случай четного и нечетного m.

Пусть $m = 2k$. Представим n в виде $n = F_{2k} + x$, $1 \leqslant x < F_{2k-1}$. Подстановка в (3) дает
$$[([F_{2k} + x)\alpha] + 1)\alpha] = [(F_{2k} + x)\alpha^2] + 1. \tag{21}$$

Условие $\alpha \in \overline{X}_{2k}$ позволяет нам применить равенства (9) и (8) из леммы 3. Поэтому левая часть равенства (21) переписывается в виде
$$[([F_{2k} + x)\alpha] + 1)\alpha] = [(F_{2k+1} + [x\alpha] + 1)\alpha].$$

Далее из условий $x < F_{2k-1}$ и $\alpha \in \overline{X}_{2k}$ находим
$$x\alpha < (F_{2k-1} - 1)\frac{F_{2k+1}}{F_{2k}} = F_{2k} - 1 - \frac{F_{2k-1} - 1}{F_{2k}},$$

откуда получаем $[x\alpha] + 1 \leqslant F_{2k} - 1$. Поэтому мы можем применить равенства (12) и (11) из леммы 4 и привести левую часть (21) к виду
$$[([F_{2k} + x)\alpha] + 1)\alpha] = F_{2k+2} + [([x\alpha] + 1)\alpha].$$

По предположению индукции равенство (3) справедливо для $i=x$. Поэтому

$$[([F_{2k}+x)\alpha]+1)\alpha] = F_{2k+2} + [x\alpha^2] + 1. \tag{22}$$

Преобразуем теперь правую часть (21). Условие $\alpha \in \overline{X}_{2k}$ обеспечивает возможность применения леммы 5. Поэтому, используя равенства (14) и (13), получаем

$$[(F_{2k}+x)\alpha^2] + 1 = F_{2k+2} + [x\alpha^2] + 1.$$

Сравнивая с (22), убеждаемся, что (3) справедливо для $i=n$.

Аналогично, подстановка $n=F_{2k}+x$ в (4) дает

$$[([F_{2k}+x)\alpha]\alpha] + 1 = [(F_{2k}+x)\alpha^2]. \tag{23}$$

Применяя лемму 3, а затем лемму 4, преобразуем левую часть (23) к виду

$$[[(F_{2k}+x)\alpha]\alpha] + 1 = [(F_{2k+1} + [x\alpha])\alpha] + 1 = F_{2k+2} + [[x\alpha]\alpha] + 1.$$

С другой стороны, в силу леммы 5, правая часть (23) преобразуется к виду

$$[(F_{2k}+x)\alpha^2] = F_{2k+2} + [x\alpha^2].$$

По предположению индукции, равенство (4) выполняется для $i=x$, то есть

$$[[x\alpha]\alpha] + 1 = [x\alpha^2].$$

Поэтому левая и правая часть (23) совпадают и (4) верно для $i=n$.

Случай $m=2k+1$ рассматривается полностью аналогично (с использованием леммы 6 вместо леммы 5).

Список литературы

[1] В. Г. Журавлев, “Одномерные разбиения Фибоначчи”, *Известия РАН. Серия математическая*, **71**:2 (2007), 89–122.

[2] А. В. Шутов, “Перенормировки вращений окружности”, *Чебышевский сборник*, **5**:4 (2004), 125–143.

[3] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2009.

[4] E. Zeckendorf, “Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas”, *Bulletin de la Société Royale des de Liège*, **41** (1972).

Поступила в редакцию
03 ноября 2021 г.

Zhukova A. A.[1], *Shutov A. V.*[2] On two relations characterizing the golden ratio. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2021. V. 21. No 2. P. 194–202.

[1] Federal State Educational Institution of Higher Education “Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation” Vladimir branch, Russia
[2] Federal State Educational Institution of Higher Education “Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs” (VlSU), Russia

ABSTRACT

V. G. Zhuravlev found two relations associated with the golden ratio: $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $[([i\tau]+1)\tau] = [i\tau^2]+1$ and $[[i\tau]\tau]+1 = [i\tau^2]$. We give a new elementary proof of these relations and show that they give a characterization of the golden ratio. Further we consider satisfability of our relations for finite sets of i-s and establish some forcing property for this situation.

Key words: *golden ratio, Fibonacci numbers.*

References

[1] V. G. Zhuravlev, “One-dimensional Fibonacci tilings”, *Izvestiya: Mathematics*, **71**:2 (2007), 307–340.

[2] A. V. Shutov, “Perenormirovki vrashcheniy okruzhnosti”, *Chebyshevskii sbornik*, **5**:4 (2004), 125–143.

[3] R. Graham, D. Knut, O. Patashnik, *Concrete Mathematics. Foundation of Informatics*, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[4] E. Zeckendorf, “Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas”, *Bulletin de la Société Royale des de Liège*, **41** (1972).