ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 159 (2019). С. 111–132

УДК 512.541

E-ГРУППЫ И E-КОЛЬЦА

© 2019 г. **П. А. КРЫЛОВ, А. А. ТУГАНБАЕВ, А. В. ЦАРЕВ**

Аннотация. Ассоциативное кольцо R называется E-кольцом, если имеет место канонический изоморфизм $R \cong \mathsf{E}(R^+)$. Аддитивные группы E-колец называются E-группами. Другими словами, абелева группа A является E-группой в том и только в том случае, когда $A \cong \operatorname{End} A$ и кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(A)$ коммутативное. В работе приводится обзор основных результатов о E-группах и E-кольцах, а также рассматриваются некоторые их обобщения: $\mathcal{E}$-замкнутые группы, T-кольца, A-кольца, группы, допускающие только коммутативные умножения и др.

Ключевые слова: абелева группа, $\mathcal{E}$-замкнутая группа, E-группа, E-кольцо, T-кольцо, факторно делимая группа, A-кольцо, кольцо эндоморфизмов.

E-GROUPS AND E-RINGS

© 2019 **P. A. KRYLOV, A. A. TUGANBAEV, A. V. TSAREV**

Abstract. An associative ring R is called an *E-ring* if the canonical homomorphism $R \cong \mathsf{E}(R^+)$ is an isomorphism. Additive groups of E-rings are called *E-groups*. In other words, an Abelian group A is an E-group if and only if $A \cong \operatorname{End} A$ and the endomorphism ring $\mathsf{E}(A)$ is commutative. In this paper, we give a survey of the main results on E-groups and E-rings and also consider some of their generalizations: $\mathcal{E}$-closed groups, T-rings, A-rings, the groups admitting only commutative multiplications, etc.

Keywords and phrases: Abelian group, $\mathcal{E}$-closed group, E-group, E-ring, T-ring, quotient divisible group, A-ring, endomorphism ring.

AMS Subject Classification: 20Kxx

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

При решении ряда задач теории абелевых групп естественным образом возникают группы, изоморфные своим группам эндоморфизмов. Такие группы (ниже мы будем называть их $\mathcal{E}$-замкнутыми) в силу задания определяются своими кольцами эндоморфизмов (и даже группами

Работа А. А. Туганбаева выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

ISSN 0233–6723

эндоморфизмов) внутри своего класса. Еще в 1973 г. П. Шультц обратил внимание на то, что изучение $\mathcal{E}$-замкнутых групп разбивается на два принципиально разных случая, в зависимости от того, коммутативны их кольца эндоморфизмов или нет. $\mathcal{E}$-Замкнутые группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов он назвал E-группами, а ассоциативные кольца с единицей, аддитивные группы которых являются E-группами, он назвал E-кольцами.

Начальную историю изучения E-групп и E-колец проследить одновременно и легко, и сложно. С одной стороны, хорошо известно, что E-группы и E-кольца были введены П. Шультцем в [33]). С другой стороны, еще Коши в начале XIX в. знал, что кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются E-кольцами. Он использовал этот факт при исследовании действительных функций, являющихся решениями функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$, которое в настоящее время известно как уравнение Коши. Кроме того, Коши умел доказывать, что над полем $\mathbb{R}$ всякое непрерывное решение уравнения Коши также имеет вид $f(x) = f(1) \cdot x$.

E-Группы и E-кольца не попали в знаковую монографию Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы» (второй том которой вышел в 1973 г.), однако, почти во всех более поздних книгах по теории абелевых групп (в том числе и в последней редакции 2015 г. книги Фукса) E-группам и E-кольцам посвящены разделы и даже статьи. Кроме того, в 2002 г. Ч. Винсонхалер опубликовал солидный обзор [35] по E-кольцам и близким к ним алгебраическим структурам.

В этой статье мы познакомимся с уже ставшими классическими результатами о E-группах и E-кольцах и с современным развитием данной тематики. Мы почти целиком оставим вне поля нашего внимания модульное направление, ограничившись лишь определениями E-модулей и T-модулей и кратким литературным обзором (это направление достаточно обширно и заслуживает отдельного внимания).

В первом разделе статьи вводятся основные понятия и раскрывается соотношение между $\mathcal{E}$-замкнутыми группами и E-группами. В следующих двух разделах в основном приводятся классические результаты Р. Боушелла и П. Шультца о E-кольцах без кручения конечного ранга и о T-кольцах, дополненные некоторыми новыми результатами. Четвертый раздел посвящен обобщениям E-колец, введенным М. Дугасом и С. Фейгельштоком, — A-кольцам и AA-кольцам. В последнем разделе статьи применяется подход к изучению E-групп, основанный на рассмотрении свойств умножений, задаваемых на группе. При этом исследуется обобщение E-групп — группы, допускающие только коммутативные умножения.

Как правило, мы используем стандартные обозначения и термины. Буква p обозначает некоторое простое число, а буква P — множество всех простых чисел. Символы $\mathbb{Z}_{p^k}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ обозначают циклическую группу порядка p^k и кольцо целых p-адических чисел соответственно, а $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — квазициклическую группу (группу типа p^∞).

Слово «группа» всегда означает «абелева группа», под «кольцом» мы всегда понимаем «ассоциативное кольцо». Групповая терминология, применяемая к кольцам, относится к их аддитивным группам.

Пусть A — группа. Тогда $t(A)$ — ее периодическая часть, т.е. подгруппа, образованная всеми элементами конечного порядка, $t_p(A)$ — p-примарная компонента группы A, т.е. $t_p(A)$ — наибольшая подгруппа в A, являющаяся p-группой. Имеет место равенство

$$t(A) = \bigoplus_{p \in P} t_p(A).$$

Наконец, $\mathrm{End}(A)$ и $\mathrm{Hom}(A, B)$ — это группа эндоморфизмов группы A и группа гомоморфизмов из группы A в группу B соответственно, $\mathsf{E}(A)$ — кольцо эндоморфизмов группы A.

1. $\mathcal{E}$-Замкнутые группы

В известной монографии [25] Л. Фукса «Абелевы группы» сформулирована проблема 45 о характеризации колец R, удовлетворяющих условию $R \cong \mathsf{E}(R^+)$. Аналогом данной проблемы, сформулированной на языке абелевых групп, является следующая задача: описать абелевы группы A, для которых имеет место изоморфизм $A \cong \operatorname{End} A$. Группы, удовлетворяющие данному условию, называются *$\mathcal{E}$-замкнутыми*; такие группы также называются *обобщенными E-группами*, *слабыми E-группами* и *E^+-группами*. Первой работой, посвященной систематическому исследованию $\mathcal{E}$-замкнутых групп, была статья П. Шультца [34].

Изоморфизм $A \cong \operatorname{End} A$ индуцирует на $\mathcal{E}$-замкнутой группе A структуру ассоциативного кольца с единицей $(A, \cdot)$. В связи с этим мы можем рассмотреть эндоморфизмы левого и правого умножения:

$$\lambda_a : A \to A, \quad x \mapsto ax; \qquad \rho_a : A \to A, \quad x \mapsto xa,$$

с помощью которых возможно получить некоторую информацию о строении группы $\operatorname{End} A$. Рассмотрим группы $A_\ell = \{\lambda_a \mid a \in A\}$ и $A_r = \{\rho_a \mid a \in A\}$.

Лемма 1.1. *Отображения $\theta_\ell : A \to A_\ell$, $a \mapsto \lambda_a$, и $\theta_r : A \to A_r$, $a \mapsto \rho_a$, являются изоморфизмами групп.*

Доказательство. Тот факт, что θ_ℓ и θ_r — сюръективные гомоморфизмы, очевиден. Инъективность следует из наличия единицы в кольце $(A, \cdot)$: $\theta_\ell(a) = 0$ влечет $a \cdot 1 = a = 0$; $\theta_r(a) = 0$ влечет $1 \cdot a = a = 0$. □

Лемма 1.2. *Для группы A (аддитивной группы ассоциативного кольца с единицей) имеют место прямые разложения*:

$$\operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1 = A_r \oplus U_1,$$

где $U_1 = \{\varphi \in \operatorname{End} A \mid \varphi(1) = 0\}$.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1$. Пусть ψ — произвольный эндоморфизм группы A; тогда $\psi - \lambda_{\psi(1)} \in U_1$, а значит, $\operatorname{End} A = A_\ell + U_1$. Учитывая, что $A_\ell \cap U_1 = 0$, получаем, что $\operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1$. Аналогично показывается, что $\operatorname{End} A = A_r \oplus U_1$. □

Изучение $\mathcal{E}$-замкнутых групп разбивается на два принципиально различных случая, в зависимости от того равно нулю множество $U_1 = \{\varphi \in \operatorname{End} A \mid \varphi(1) = 0\}$, или нет.

Лемма 1.3. *Для $\mathcal{E}$-замкнутой группы A следующие утверждения равносильны*:

(1) *$\mathsf{E}(A)$ — коммутативное кольцо*;
(2) *отображение $a \mapsto \lambda_a$ задает изоморфизм групп A и $\operatorname{End} A$*;
(3) *если φ — произвольный эндоморфизм группы A и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Пусть $\psi \in U_1$, тогда для любого $a \in A$ имеем

$$\psi(a) = \psi(\lambda_a(1)) = \lambda_a(\psi(1)) = \lambda_a(0) = 0,$$

т.е. $U_1 = 0$ и $\operatorname{End} A = A_\ell$.

Импликация (2)⇒(3) проверяется непосредственно.

(3)⇒(1). Поскольку $U_1 = 0$, то $\operatorname{End} A = A_\ell = A_r$. Тогда для любого a из A найдется такой b из A, что $\lambda_a = \rho_b$. Так как $a = \lambda_a(1) = \rho_b(1) = b$, то $\lambda_a = \rho_a$. Следовательно, кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативное. □

Замечание. Нетрудно видеть, что в лемме 1.3 условие «A — $\mathcal{E}$-замкнутая группа» можно заменить на более слабое условие «A — аддитивная группа ассоциативного кольца с единицей».

Группы, удовлетворяющие равносильным условиям леммы 1.3, называются *E-группами.*

Теорема 1.4. *Пусть A — произвольная E-группа.*

1. *Если $(A, \cdot)$ — ассоциативное кольцо с единицей, то для всякого умножения $* \in \operatorname{Mult} A$ найдется такой элемент $a \in A$, что $x * y = a \cdot x \cdot y$ для всех $x, y \in A$.*
2. *На группе A существует единственное (с точностью до изоморфизма) ассоциативное кольцо с единицей.*

Доказательство. 1. Пусть 1 — единица кольца $(A,\cdot)$ и $1*1=a$; тогда

$$x*y=\lambda^*_x(\rho_y(1))=\rho_y(\lambda^*_x(1))=(x*1)y=(\rho^*_1(\rho_x(1)))y=(\rho_x(\rho^*_1(1)))y=(1*1)xy=axy.$$

2. Пусть изоморфизм $A\cong \operatorname{End}A$ индуцирует на группе A структуру ассоциативного кольца с единицей $(A,\cdot)$. Тогда из леммы 1.3 следует, что $(A,\cdot)$ — коммутативное кольцо. Рассмотрим на группе A произвольную мультипликативную операцию $*$ такую, что $(A,*)$ — ассоциативное кольцо с единицей. В соответствии с п. 1 найдется элемент $a\in A$, такой что $x*y=a\cdot x\cdot y$ для всех $x,y\in A$. Обозначим через 1 и $1'$ единицы колец $(A,\cdot)$ и $(A,*)$ соответственно. Тогда из равенства $1'*1=1$ вытекает равенство $a\cdot 1'\cdot 1=a\cdot 1'=1$, а значит, элемент a обратим в кольце $(A,\cdot)$. Покажем, что отображение $f:(A,\cdot)\to(A,*)$, действующее по закону $f(x)=a^{-1}\cdot x$, является изоморфизмом колец:

$$f(x+y)=a^{-1}(x+y)=a^{-1}x+a^{-1}y=f(x)+f(y),$$
$$f(x)*f(y)=(a^{-1}x)*(a^{-1}y)=a\cdot a^{-1}\cdot x\cdot a^{-1}\cdot y=a^{-1}(x\cdot y)=f(x\cdot y).$$

Наконец, поскольку $a^{-1}*x=a\cdot a^{-1}\cdot x=x$ для любого $x\in A$, то $a^{-1}=1'$, и следовательно, $f(1)=a^{-1}=1'$. □

Ассоциативные кольца с единицей, аддитивные группы которых являются E-группами, называются *E-кольцами.*

Из предыдущего определения и теоремы 1.4 следует, что для E-кольца R имеет место изоморфизм $R\cong \mathsf{E}(R^+)$, а значит, по лемме 1.3 все E-кольца коммутативны.

Приведем некоторые примеры $\mathcal{E}$-замкнутых групп, естественно возникающие в теории абелевых групп.

Пример 1.5 (см. [34])**.** Периодическая группа $\mathcal{E}$-замкнута в точности тогда, когда она циклическая.

Пример 1.6 (см. [34])**.** Группа с ненулевой делимой частью $\mathcal{E}$-замкнута в точности тогда, когда она имеет вид $\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_m$.

Пример 1.7. Пусть A — группа без кручения ранга 1. Хорошо известно (см., например, [12, § 1] или [27, § 85]), что условие $A\cong\operatorname{End}A$ выполняется в точности тогда, когда группа A имеет идемпотентный тип, т.е. в точности тогда, когда факторгруппа $A/\langle a\rangle$ при некотором (произвольном) $a\neq 0$ является прямой суммой делимой периодической группы и конечной группы.

Пример 1.8. Пусть $\chi=(m_p)$ — произвольная характеристика (т.е. последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная простыми индексами). Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi=\prod\limits_{p\in P}R_p$, где $R_p=\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} при $m_p<\infty$ и $R_p=\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел при $m_p=\infty$. Тогда для каждого сервантного подкольца R (содержащего единицу) кольца $\mathbb{Z}_\chi$ справедливо $\mathsf{E}(R^+)\cong R$, т.е. R^+ является $\mathcal{E}$-замкнутой группой.

Во всех приведенных выше примерах $\mathcal{E}$-замкнутые группы являются E-группами. Более того, проблема существования $\mathcal{E}$-замкнутых групп с некоммутативными кольцами эндоморфизмов (т.е. не являющихся E-группами) долгое время оставалась открытой, пока не была положительно решена Р. Гёбелем, С. Шелахом и Л. Штрюнгманном в 2003 г. В частности, они получили следующий результат.

Теорема 1.9 (см. [28])**.** *Пусть λ — бесконечное кардинальное число, удовлетворяющее условию $\lambda^{\aleph_0}=\lambda$. Тогда существует такое некоммутативное кольцо R мощности λ, что $\mathsf{E}(R^+)\cong R$.*

Вопрос соотношения $\mathcal{E}$-замкнутых групп и E-групп является одним из центральных при изучении $\mathcal{E}$-замкнутых групп. Во многих хороших классах групп эти понятия совпадают. Например, С. Фейгельшток, Дж. Хаусен и Р. Рафаэль доказали, что любая $\mathcal{E}$-замкнутая группа без кручения конечного ранга является E-группой (см. [23]). Рассмотрим обобщение этого результата.

Предложение 1.10. *Если для $\mathcal{E}$-замкнутой группы A выполняется хотя бы одно из следующих условий, то $\mathsf{E}(A)$ — коммутативное кольцо (т.е. A — E-группа).*

1. *A — неразложимая группа.*
2. *$r_p(A) < \infty$ для любого простого p.*

Доказательство. 1. Так как A — неразложимая группа, то из

$$A \cong \operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1 = A_r \oplus U_1$$

следует, что $U_1 = 0$ и $\operatorname{End} A = A_\ell = A_r$, а значит, кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативно.

2. Так как $A \cong \operatorname{End} A = A_\ell \oplus U_1$, где $A_\ell \cong A$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место прямое разложение

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n \oplus A_n, \quad \text{где} \quad A_n = B_{n+1} \oplus A_{n+1},$$

причем $B_i \cong U_1$ и $A_i \cong A$ при всех i. Тогда из условия $r_p(A) < \infty$ при любом простом p вытекает, что $r_p(U_1) = 0$ при любом простом p. Следовательно, $U_1 = 0$ или U_1 — ненулевая делимая группа. В первом случае получаем, что $\operatorname{End} A = A_\ell = A_r$, а значит, кольцо $\mathsf{E}(A)$ коммутативно. Во втором же случае (если он возможен) получаем, что A — нередуцированная $\mathcal{E}$-замкнутая группа, следовательно, $A \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$ (см. пример 1.6). Очевидно, что тогда кольцо $\mathsf{E}(A)$ снова коммутативно. $\square$

С $\mathcal{E}$-замкнутыми группами непосредственно связана проблема 18.3 из книги Л. Фукса [?].

Проблема. Для группы A определим последовательность групп (A_n) по следующему правилу: $A_0 = A$ и $A_{n+1} = \operatorname{End} A_n$. На каком шаге может стабилизироваться эта последовательность?

Используя лемму 1.2, для групп без кручения конечного ранга легко показать, что последовательность (A_n) из проблемы Фукса стабилизируется не позднее A_1, т.е. в случае стабилизации рассматриваемой последовательности всегда имеет место изоморфизм $\operatorname{End} A_1 \cong A_1$. Отметим без доказательства, что аналогичное утверждение будет справедливо и для более широкого класса групп, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.11 (см. [1]). *Пусть A — группа, все p-ранги которой конечны. Тогда для последовательности (A_n) следующие утверждения равносильны*:

(1) $A_{i+1} \cong A_i$ *хотя бы для одного* i;
(2) A_i — *E-группа хотя бы для одного* i;
(3) $\mathsf{E}(A_i)$ — *коммутативное кольцо хотя бы для одного* i;
(4) $A_1 \cong A_2 \cong \ldots \cong A_i \cong \ldots$.

$\mathcal{E}$-Замкнутые группы с некоммутативными кольцами эндоморфизмов в настоящее время слабо изучены. Нам известны только некоторые сложно устроенные примеры таких групп и ряд их свойств довольно общего характера. Продвижение в данной области может быть достигнуто привлечением теории ID-групп и использованием конечной топологии.

Напомним, что группа, содержащая собственное прямое слагаемое изоморфное самой группе, называется ID-группой. Р. Бьюмонт и Р. Пирс показали в [15], что A является ID-группой в точности тогда, когда существуют $\varphi, \psi \in \mathsf{E}(A)$, такие что $\psi\varphi = 1$ и $\varphi\psi \neq 1$. В силу этого для изучения ID-групп возможно использовать теорию модулей над кольцом $\mathbb{Z}\{x, y\}/(xy - 1)$, где $\mathbb{Z}\{x, y\}$ — кольцо целочисленных многочленов от двух неперестановочных переменных.

С другой стороны, на $\mathcal{E}$-замкнутой группе A с некоммутативным кольцом эндоморфизмов задается структура кольца, полного в недискретной топологии, индуцированной конечной топологией на кольце $\mathsf{E}(A)$.

В отличие от E-групп, классу $\mathcal{E}$-замкнутых групп в целом посвящено сравнительно мало работ. Отметим, прежде всего, статью Шультца [34], в которой отмечается принципиальное различие коммутативного и некоммутативного случаев. Имеется еще ряд работ, посвященных изучению EE-групп (используется также термин $\mathbb{E}$-группы), обобщающих $\mathcal{E}$-замкнутые группы. Группа A

называется *EE-группой*, если существует эпиморфизм из A на $\operatorname{End} A$. С. Фейгельшток, Дж. Хаусен и Р. Рафаэль в [23] показали, что в классе групп без кручения конечного ранга понятия EE-группа, $\mathcal{E}$-замкнутая группа и E-группа равнозначны. В [28] Р. Гёбель, С. Шелах и Л. Штрюнгманн показали существование EE-групп, не являющихся $\mathcal{E}$-замкнутыми группами.

2. E-Кольца

В соответствии с теоремой 1.4 на E-группе существует и притом единственная структура ассоциативного кольца с единицей, называемая E-кольцом. Верно и обратное: аддитивная группа E-кольца всегда является E-группой. В связи с этим теории E-групп и E-колец тесно переплетены. Например, нетрудно видеть, что любое прямое слагаемое E-группы A вполне инвариантно, а значит, является прямым слагаемым E-кольца $(A, \cdot)$.

Лемма 2.1. *Ассоциативное кольцо с единицей R является E-кольцом в точности тогда, когда любой эндоморфизм группы R^+ является R-модульным.*

Доказательство. Пусть R — E-кольцо и пусть $\varphi \in \operatorname{End} R^+$, $k, s \in R$. Тогда в силу коммутативности кольца $\mathsf{E}(R^+)$ имеем

$$\varphi(k \cdot s) = \varphi(\lambda_k(s)) = \lambda_k(\varphi(s)) = k \cdot \varphi(s).$$

Обратно, пусть $\operatorname{End} R^+ = \operatorname{End}_R R^+$. Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\varphi \in \operatorname{End} R^+$. Для него справедливо

$$\varphi(k) = \varphi(k \cdot 1) = k \cdot \varphi(1)$$

при любом $k \in R$. Тогда из $\varphi(1) = 0$ следует, что $\varphi = 0$, а значит, R^+ — E-группа (согласно леммам 1.2 и 1.3), т.е. R — E-кольцо. □

В классе колец без кручения конечного ранга задача характеризации E-колец допускает приемлемое решение, основанное на структурных теоремах Бьюмонта—Пирса (см. [14]), которые можно сформулировать следующим образом:

(i) *если R — ассоциативное кольцо без кручения конечного ранга, то в R существует такое полупервичное подкольцо S, что $R \doteq S \oplus \mathrm{N}(R)$, где $\mathrm{N}(R)$ — нильрадикал кольца R;*

(ii) *полупервичное кольцо S квазиравно прямому произведению первичных колец $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$;*

(iii) *первичное кольцо S_i квазиизоморфно полному матричному кольцу $M_{n_i}(D_i)$, где D_i — некоторая область.*

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Эндоморфный образ E-группы является E-группой; в частности, прямое слагаемое E-группы является E-группой.*
2. *Если R и S — квазиизоморфные ассоциативные кольца без кручения с единицей и R — E-кольцо, то S — тоже E-кольцо.*
3. *Нильрадикал E-кольца без кручения конечного ранга равен нулю.*

Доказательство. 1. Пусть A — E-группа и $(A, \cdot)$ — E-кольцо. Тогда эндоморфный образ группы A имеет вид aA. Определим умножение $*$ на группе aA по закону $ax * ay = axy$. Тогда $(aA, *)$ — коммутативное кольцо с единицей a. Если $\varphi \in \mathsf{E}(aA)$, то $\lambda_a\varphi \in \mathsf{E}(A)$, и значит, для любого $ax \in aA$ имеем

$$\varphi(ax) = (\lambda_a\varphi)(x) = \lambda_{(\lambda_a\varphi)(1)}(x) = \varphi(a)x = ayx,$$

где $ay = \varphi(a) \in aA$. Следовательно, $\varphi(ax) = ay * ax$, т.е. φ является умножением на элемент ay. Таким образом, по лемме 1.3 группа aA является E-группой.

2. Достаточно рассмотреть квазиравные кольца R и S, где R — E-кольцо, и показать, что S — тоже E-кольцо. Так как $R \doteq S$, то $mR \subseteq S$ и $nS \subseteq R$ при некоторых $m, n \in \mathbb{N}$. Пусть φ — произвольный эндоморфизм группы S^+; тогда по лемме 1.2 он имеет вид $\varphi = \lambda_{\varphi(1)} + \alpha$, где

$\alpha(1) = 0$. С другой стороны, $mn\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$. Следовательно, $mn\varphi = \lambda_k$, причем $k \in R \cap S$. Таким образом,

$$mn\varphi = \lambda_k = mn\lambda_{\varphi(1)} + mn\alpha.$$

Поскольку $\operatorname{End} S^+ = S_\ell \oplus U_1$, то из последнего равенства получаем, что $mn\alpha = 0$. Следовательно, $\alpha = 0$ и $\varphi = \lambda_{\varphi(1)}$. Учитывая лемму 1.3, получаем, что S^+ — E-группа, а значит, S — E-кольцо.

3. Пусть R — E-кольцо без кручения конечного ранга. Тогда по первой теореме Бьюмонта—Пирса $R \doteq S \oplus N$, где S — полупервичное кольцо, а N — нильрадикал кольца R. По доказанному выше, $T = S \oplus N$ тоже является E-кольцом. Предположим, что $N \neq 0$. Поскольку в E-группе всякое прямое слагаемое является вполне инвариантной подгруппой, то S является идеалом кольца T, а значит, T/S — кольцо с единицей. Получили противоречие. □

Теорема 2.3 (см. [17]). *Кольцо без кручения R конечного ранга является E-кольцом в точности тогда, когда $R \doteq R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$, где каждое R_i является сильно неразложимым подкольцом некоторого поля алгебраических чисел и $\operatorname{Hom}(R_i, R_j) = 0$ при всех $i \neq j$.*

Доказательство. В силу леммы 2.2 кольцо R полупервично. Тогда из теорем Бьюмонта—Пирса и коммутативности кольца R получаем, что

$$R \doteq R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n,$$

где каждое R_i — область, а значит, является целым подкольцом некоторого поля алгебраических чисел.

Кольцо $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ является E-кольцом (по лемме 2.2); следовательно, все R_i тоже являются E-кольцами. Тогда каждое кольцо квазиэндоморфизмов

$$\mathcal{E}(R_i^+) = \mathbb{Q} \otimes \mathsf{E}(R_i^+) \cong \mathbb{Q} \otimes R_i$$

является полем, поэтому все R_i сильно неразложимы.

Наконец, поскольку все прямые слагаемые E-колец вполне инвариантны, то $\operatorname{Hom}(R_i, R_j) = 0$ при $i \neq j$.

Обратно, пусть R — сильно неразложимое подкольцо поля алгебраических чисел $F = \mathbb{Q} \otimes R$. Тогда, в соответствии с [13, Theorem 4.1], алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(R^+)$ изоморфна полной матричной алгебре $M_m(S)$, где S — подполе поля F и $[F : S] = m$. Поскольку R^+ — сильно неразложимая группа, то кольцо $\mathcal{E}(R^+)$ не содержит нетривиальных идемпотентов, а значит, $m = 1$ и $\mathcal{E}(R^+) \cong S$. Из этого следует, что $\mathsf{E}(R^+)$ — коммутативное кольцо (так как оно вкладывается в поле $\mathcal{E}(R^+) \cong S$). Тогда, учитывая лемму 1.3 и замечание после нее получаем, что R — E-кольцо.

Далее, пусть $R \doteq R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$, где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — сильно неразложимые кольца, удовлетворяющие условиям доказываемой теоремы. Тогда для кольца $L = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$, очевидно, справедливо

$$\mathsf{E}(L^+) \cong \mathsf{E}(R_1^+) \times \mathsf{E}(R_2^+) \times \ldots \times \mathsf{E}(R_n^+),$$

причем по вышедоказанному все кольца $\mathsf{E}(R_i^+)$ коммутативны. Следовательно, L — E-кольцо, а значит, и R — E-кольцо (по лемме 2.2). □

Подкольца полей алгебраических чисел поддаются характеризации на языке простых идеалов колец целых алгебраических чисел (см. [13]). Пусть J — кольцо всех целых элементов поля алгебраических чисел F. Для простого идеала P кольца J рассмотрим локализацию $J_P = \{x/y \mid x, y \in J, y \notin P\}$. Далее, для некоторого множества Π простых идеалов кольца J определим кольцо $J_\Pi = \bigcap\limits_{P \in \Pi} J_P$. Тогда для всякого подкольца R поля алгебраических чисел F существует ровно одно такое множество простых идеалов Π кольца J, что R квазиравно J_Π. В связи с теоремой 2.3 заслуживает внимания вопрос об условиях на множество простых идеалов Π кольца J, при которых J_Π сильно неразложимо. Некоторые такие условия найдены в [13, 29].

Полезным обобщением E-колец являются E-модули, введенные Р. Боушеллом и П. Шультцем в [17, Sec. 2] под неприжившимся названием «R-группы». Модуль M над кольцом с единицей R называется *E-модулем* (или *$E(R)$-модулем*), если отображение $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R^+, M) \to M$, действующее по закону $\Phi(f) = f(1)$, является изоморфизмом. Начальные сведения о E-модулях можно найти в [30, Section 6]. Подробнее с теорией периодических E-модулей можно познакомиться по работе Р. Пирса [32], а с теорией E-модулей без кручения над кольцами без кручения конечного ранга — по работе А. Мадера и Ч. Винсонхалера [31].

Нетрудно проверить, что R-модуль M является $E(R)$-модулем в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}_R(R^+, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R^+, M)$. В связи с этим возникает еще более общая конструкция, введенная в работах П. А. Крылова и М. А. Приходовского. Пусть $e : S \to R$ — гомоморфизм колец, тогда R-модуль M называется *$E(e)$-модулем*, если $\mathrm{Hom}_R(R^+, M) = \mathrm{Hom}_S(R^+, M)$ (подробнее о $E(e)$-модулях см. [2, 6]).

3. T-Кольца и факторно делимые группы

Наряду с E-кольцами без кручения конечного ранга хорошему описанию поддаются и так называемые T-кольца, введенные Р. Боушеллом и П. Шультцем в [17].

Кольцо R называется *T-кольцом*, если отображение

$$m : R \otimes R \to R, \quad m(a \otimes b) = ab,$$

является изоморфизмом.

Рассмотрим другие эквивалентные формулировки для T-колец.

Теорема 3.1 (см. [17])**.** *Следующие утверждения равносильны*:

(1) *R — T-кольцо*;

(2) *отображение $d : R \to R \otimes R$, действующее по закону $d(a) = 1 \otimes a$, является изоморфизмом обратным к m*;

(3) *R — E-кольцо и $R \otimes R = R \otimes_R R$*;

(4) *$a \otimes b = b \otimes a$ для любых $a, b \in R$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Очевидно, что md — тождественное отображение множества R. Поскольку m — инъекция, то d — изоморфизм, обратный к отображению m.

(2)⇒(3). Рассмотрим такой эндоморфизм $\varphi \in \mathsf{E}(R^+)$, что $\varphi(1) = 0$. Определим аддитивный гомоморфизм $\Phi : R \otimes R \to R$, действующий по закону $\Phi(r \otimes s) = \varphi(r)s$. Тогда $\Phi d = 0$. Следовательно, $\Phi = 0$, и значит, $\varphi = 0$. Учитывая лемму 1.3, получаем, что R — E-кольцо.

Пусть a, b и c — произвольные элементы кольца R. Тогда $m(ab \otimes c) = m(a \otimes bc)$. Следовательно,

$$ab \otimes c = a \otimes bc, \quad R \otimes R = R \otimes_R R.$$

(3)⇒(4). Так как R — коммутативное кольцо, то

$$a \otimes b = 1 \otimes ab = 1 \otimes ba = b \otimes a.$$

(4)⇒(1). Для произвольных элементов $a, b \in R$ справедливо

$$a \otimes b = (a \otimes 1)(1 \otimes b) = (1 \otimes a)(1 \otimes b) = 1 \otimes ab = 1 \otimes m(a \otimes b).$$

Следовательно, $x = 1 \otimes m(x)$ для всех $x \in R \otimes R$. Таким образом, m — инъективное отображение, а значит, m — изоморфизм, т.е. R — T-кольцо. □

Лемма 3.2. *Если R и L — T-кольца, то $R \otimes L$ — тоже T-кольцо.*

Доказательство. Пусть $k_1 \otimes l_1$ и $k_2 \otimes l_2$ — произвольные элементы кольца $R \otimes L$; тогда

$$(k_1 \otimes l_1) \otimes (k_2 \otimes l_2) \overset{\varepsilon}{\mapsto} (k_1 \otimes k_2) \otimes (l_1 \otimes l_2) = (k_2 \otimes k_1) \otimes (l_2 \otimes l_1) \overset{\varepsilon}{\mapsto} (k_2 \otimes l_2) \otimes (k_1 \otimes l_1),$$

где $\varepsilon : (R \otimes L) \otimes (R \otimes L) \to (R \otimes R) \otimes (L \otimes L)$ — естественный изоморфизм. Так как $\varepsilon^2 = id$ — тождественное отображение, то

$$(k_1 \otimes l_1) \otimes (k_2 \otimes l_2) = (k_2 \otimes l_2) \otimes (k_1 \otimes l_1).$$

Учитывая теорему 3.1(4), получаем, что $R \otimes L$ — T-кольцо. □

Теорема 3.3 (см. [17]). *Следующие утверждения равносильны:*

(1) *R — T-кольцо;*

(2) *$R/t(R)$ изоморфно подкольцу поля $\mathbb{Q}$ и если $t_p(R) \neq 0$, то $t_p(R)$ — циклическая группа и $R/t(R)$ делится на p.*

Доказательство. (1)⇒(2). Так как R и $\mathbb{Q}$ — T-кольца, то $R \otimes \mathbb{Q}$ — T-кольцо, а значит, и E-кольцо по теореме 3.1(3). Таким образом, $R \otimes \mathbb{Q}$ — делимое E-кольцо без кручения. Следовательно,

$$R \otimes \mathbb{Q} \cong (R/t(R)) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}.$$

Значит, $R/t(R)$ изоморфно некоторому подкольцу поля $\mathbb{Q}$.

Учитывая, что $\mathsf{E}(R^+)$ — коммутативное кольцо, получаем, что $t_p(R)$ — циклическая группа и $R/t(R)$ делится на p при $t_p(R) \neq 0$ (см., например, [30, Sec. 19]).

(2)⇒(1). Пусть S — множество таких простых p, что $t_p(R) \neq 0$, и пусть U — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, изоморфное $R/t(R)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & t(R) \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & R \arrow[r] \arrow[d, "d"] & U \arrow[r] \arrow[d, "d^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \otimes t(R) \arrow[r] & R \otimes R \arrow[r] & R \otimes U \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где $d(a) = 1 \otimes a$ d', d^* индуцируются отображением d. Так как верхняя строка диаграммы сервантно точная, то и нижняя строка сервантно точная. Если $p \in S$, то $t_p(R)$ — циклическая группа, а $R/t_p(R)$ — p-делимая группа. Следовательно,

$$R \otimes t_p(R) \cong t_p(R) \otimes t_p(R) \cong t_p(R).$$

Таким образом, d' индуцирует изоморфизм $t_p(R) \to t_p(R) \otimes t_p(R)$ для каждого $p \in S$, и следовательно, d' — изоморфизм.

Так как U — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, и U делится на все простые $p \in S$, то

$$R \otimes U \cong (R/t(R)) \otimes U \cong U \otimes U \cong U.$$

Следовательно, d^* — изоморфизм. Таким образом, d — изоморфизм, т.е. R — T-кольцо. □

Из доказанной теоремы следует, что примерами T-колец служат подкольца (с единицей) поля $\mathbb{Q}$ и кольца классов вычетов. Кольцо целых p-адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ является E-кольцом, но не является T-кольцом (так как $r(\widehat{\mathbb{Z}}_p) > 1$).

Пусть R — T-кольцо, тогда учитывая теорему 3.3(2) получаем, что $r_p(R) \leqslant 1$ для любого простого p. Следовательно, $\mathbb{Z}$-адическое пополнение $\widehat{R}$ кольца R имеет следующий вид:

$$\widehat{R} \cong \mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} R_p, \quad \text{где} \quad R_p = \begin{cases} \mathbb{Z}_{p^{m_p}}, & \text{если } t_p(R) \cong \mathbb{Z}_{p^{m_p}}, \\ \widehat{\mathbb{Z}}_p, & \text{если } t_p(R) = 0 \text{ и } R \text{ — не } p\text{-делимая группа}, \\ 0, & \text{если } t_p(R) = 0 \text{ и } R \text{ — } p\text{-делимая группа}. \end{cases}$$

Поскольку все p-ранги T-кольца R конечны, то его первая ульмовская подгруппа $R^1 = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} nR$ — делимая группа без кручения. Таким образом, имеет место следующее предложение.

Предложение 3.4. *Всякое редуцированное T-кольцо плотно и сервантно вкладывается в некоторое кольцо $\mathbb{Z}_\chi$.*

В [11] было замечено, что для описания T-колец удобно использовать язык факторно делимых групп.

Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — периодическая делимая группа. *Базисом* факторно делимой группы A будем называть всякий базис свободной группы F.

В случае групп без кручения факторно делимые группы были введены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в [14]. Данная формулировка (включающая и смешанные группы) принадлежит А. А. Фомину и У.. Уиклессу [24].

В силу теоремы 3.3 нас прежде всего будут интересовать факторно делимые группы ранга 1.

Теорема 3.5. *Если R — бесконечное T-кольцо, то R^+ — факторно делимая группа ранга* 1.

Доказательство. Пусть R — бесконечное T-кольцо и пусть $\widehat{R} \cong \mathbb{Z}_\chi$. Нетрудно видеть, что если R^+ не является редуцированной группой, то $R \cong \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_m$ (см., например, [34]), т.е. R^+ — факторно делимая группа ранга 1.

Пусть R^+ — редуцированная группа, т.е. R — подкольцо кольца
$$\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p\in P} R_p.$$
Рассмотрим факторгруппу $R^+/\langle 1\rangle$, которая согласно теореме 3.3 является периодической. Покажем, что $R^+/\langle 1\rangle$ — делимая группа. Возьмем элемент $a = (\alpha_p) \in R^+$, где $\alpha_p \in R_p$. Для каждого простого числа $q \neq p$ элемент α_p делится на q. Если $0 \leqslant m_p < \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1 p + \ldots + a_{m_p-1}p^{m_p-1} \in \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$. Тогда $\alpha_p - a_0\varepsilon_p$ делится на p, где ε_p — единица кольца $\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$. Аналогично, если $m_p = \infty$, то $\alpha_p = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s + \ldots \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$, и тогда $\alpha_p - a_0\varepsilon_p$ делится на p. Получаем, что $a = pb + a_0 1$, причем, поскольку R^+ — плотная сервантная подгруппа в $\mathbb{Z}_\chi$, то $b \in R$. Следовательно, $a + \langle 1\rangle$ делится на любое простое число p в группе R^+, т.е. $R^+/\langle 1\rangle$ — делимая группа.

Так как $R \subset \prod\limits_{p\in P} R_p$, то R не содержит делимых периодических подгрупп. Следовательно, R^+ является факторно делимой группой ранга 1. □

Лемма 3.6. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные элементы группы A и $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$. Следующие утверждения равносильны*:

(1) *факторгруппа A/F делимая*;

(2) *для каждого $m \in \mathbb{N}$ группа A/mA порождается элементами*
$$\overline{a}_1 = a_1 + mA, \quad \overline{a}_2 = a_2 + mA, \quad \ldots, \quad \overline{a}_n = a_n + mA \in A/mA,$$
т.е. $A/mA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\rangle$;

(3) *для каждого простого p группа A/pA порождается элементами*
$$\overline{a}_1 = a_1 + pA, \quad \overline{a}_2 = a_2 + pA, \quad \ldots, \quad \overline{a}_n = a_n + pA \in A/pA,$$
т.е. $A/pA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n\rangle$.

Доказательство. (1)⇒(2). Так как A/F — делимая группа, то для любого $a \in A$ существует такой $b \in A$, что $a - mb \in F$, т.е. $a - mb = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$ при некоторых $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Тогда $a - (k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n) = mb \in mA$. Следовательно, $\overline{a} \in A/mA$ представи́м в виде $\overline{a} = k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \ldots + k_n\overline{a}_n$. Это означает, что $A/mA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\rangle$.

Импликация (2)⇒(3) проверяется непосредственно.

(3)⇒(1). Так как $A/pA = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\rangle$, то для каждого элемента $a \in A$ существуют такие целые коэффициенты $k_1, \ldots, k_n$, что $\overline{a} = k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \ldots + k_n\overline{a}_n$. Это равносильно тому, что $a - (k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n) = pc \in pA$ при некотором $c \in A$. Значит, $a - pc = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n \in F$. Таким образом, каждый элемент из группы A делится на p по модулю F, т.е. $A/F = p(A/F)$.

Получили, что A/F — p-делимая группа, причем это верно при любом простом p. Следовательно, A/F — делимая группа. □

Следствие 3.7. *Если A — факторно делимая группа ранга n, то $r_p(A) \leqslant n$ для всех простых p.*

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi$. Если χ — характеристика ненулевого типа, то положим $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$, т.е. R^χ — сервантная оболочка единицы в аддитивной группе кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Если же χ — характеристика нулевого типа, то определим $R^\chi = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_\chi$ — кольцо классов вычетов по модулю m.

Нетрудно видеть, что всякая группа R^χ является коммутативным кольцом относительно умножения, определенного в кольце $\mathbb{Z}_\chi$.

Предложение 3.8. *Каждая факторно делимая группа ранга 1 изоморфна группе R^χ при некоторой характеристике χ.*

Доказательство. Пусть A — факторно делимая группа ранга 1 и a — базисный элемент группы A. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-адическое пополнение $\mu : A \to \widehat{A}$. Так как $r_p(A) \leqslant 1$ для каждого простого p (согласно следствию 3.7), то $\widehat{A} \cong \mathbb{Z}_\chi$ для некоторой характеристики χ. Более того, согласно лемме 3.6 справедливо равенство $\widehat{A} = a^\circ \mathbb{Z}_\chi$, где $a^\circ = \mu(a)$. Если χ — характеристика ненулевого типа, то μ — инъективное отображение, а значит, задает изоморфизм между группой A и ее образом $\mu(A) \subset \widehat{A}$. В силу плотности и сервантности подгруппы $\mu(A)$ в группе $\widehat{A}$ имеет место равенство $\mu(A) = \langle a^\circ \rangle_* \subseteq a^\circ \mathbb{Z}_\chi$. Следовательно, группа $\mu(A)$ изоморфна группе $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi$. Таким образом, $A \cong R^\chi$.

Если характеристика χ принадлежит нулевому типу, то $\mathbb{Z}_\chi = \mathbb{Z}_m$ для некоторого натурального m. Тогда $t(A) \cong \mathbb{Z}_m$ и $A \cong \mathbb{Z}_m \oplus B$, где B — такая группа без кручения ранга 1, что $\widehat{B} = 0$. Следовательно, $B \cong \mathbb{Q}$, и значит, $A \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_\chi = R^\chi$. □

Учитывая, что кольца R^χ удовлетворяют условиям п. 2 теоремы 3.3, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.9. *На всякой факторно делимой группе ранга 1 существует (и единственная) структура T-кольца.*

Характеристика χ из предложения 3.8 называется *кохарактеристикой* факторно делимой группы ранга 1. Так как

$$R^\chi \cong R^\kappa \;\Leftrightarrow\; \chi = \kappa,$$

убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 3.10 (см. [4]). *Две факторно делимые группы ранга 1 изоморфны в точности тогда, когда равны их кохарактеристики. Каждая характеристика является кохарактеристикой некоторой факторно делимой группы ранга 1.*

Таким образом, мы показали (теорема 3.5 и следствие 3.9), что аддитивные группы бесконечных T-колец — это в точности факторно делимые группы ранга 1 (оставшиеся вне нашего внимания конечные T-кольца — это кольца классов вычетов). Иную характеризацию аддитивных групп T-колец получил в 1987 г. Дж. Вилсон (см. [36]). При этом он использовал широко применяемое при исследовании самомалых групп условие на проекции.

Отметим также, что, используя теорию T-колец, Р. Боушелл и П. Шультц в [17] доказали, что класс колец $\mathbb{Z}_\chi$ совпадает с классом редуцированных копериодических E-колец.

В работах П. А. Крылова и М. А. Приходовского понятие T-кольца было обобщенно на случай модулей. R-Модуль M называется *T-модулем* (или *$T(R)$-модулем*), если канонический эпиморфизм $R \otimes M \to M$ $(r \otimes m \mapsto rm)$ является изоморфизмом. Пусть $e : S \to R$ — гомоморфизм колец; тогда R-модуль M называется *$T(e)$-модулем*, если имеет место канонический изоморфизм $R \otimes_S M \cong R \otimes_R M$.

Отметим, что понятие T-модуля является частным случаем понятия $T(e)$-модуля, когда $S=\mathbb{Z}$ (при этом гомоморфизм $e:\mathbb{Z}\to R$ определяется единственным образом и имеет место канонический изоморфизм $R\otimes M\cong R\otimes_R M\cong M$). Более того, конструкция T-модуля является «абсолютной» в том смысле, что всякий T-модуль M является и $T(e)$-модулем для любого гомоморфизма $e:S\to R$.

Далее, пусть $e:S\to R$ — гомоморфизм колец, $R_0=R/e(S)$ (если $S=\mathbb{Z}$, то $R_0=R/\langle 1\rangle$) и M — произвольный R-модуль. Тогда имеет место канонический изоморфизм S-модулей

$$R\otimes_S M\cong (R\otimes_R M)\oplus(R_0\otimes_S M).$$

В связи с этим M является $T(e)$-модулем тогда и только тогда, когда $R_0\otimes_S M=0$.

Наиболее полно теория $T(e)$-модулей отражена в [2, 6, 7].

4. A-Кольца

Интересным обобщением E-колец являются A-кольца и AA-кольца, введенные и исследованные М. Дугасом и С. Фейгельштоком в [18, 19].

Ассоциативное кольцо с единицей R называется *A-кольцом*, если для всякого автоморфизма $\alpha\in\operatorname{Aut}R^+$ найдется такой элемент $a\in R$, что $\alpha=\lambda_a$, т.е. $\alpha(x)=ax$ для любого $x\in R$.

Нетрудно видеть, что кольцо R является A-кольцом в том и только в том случае, когда $\operatorname{Aut}R^+=\mathrm{U}(R_\ell)$, где $\mathrm{U}(R_\ell)$ — группа обратимых элементов кольца $R_\ell=\{\lambda_a\mid a\in R\}$. Из этого, в частности, следует, что всякое E-кольцо является A-кольцом.

Если ослабить равенство $\operatorname{Aut}R^+=\mathrm{U}(R_\ell)$ до равенства $\operatorname{Aut}R^+=\operatorname{Rad}(\mathrm{U}(R_\ell))$, то получим определение AA-кольца. Таким образом, ассоциативное кольцо с единицей R называется *AA-кольцом*, если для всякого автоморфизма $\alpha\in\operatorname{Aut}R^+$ найдутся такие элемент $a\in R$ и натуральное число n, что $\alpha^n=\lambda_a$.

Из приведенных ниже примеров следует, что классы E-колец, A-колец и AA-колец попарно различны.

Пример 4.1. Любое конечное кольцо является AA-кольцом. Действительно, если R — конечное кольцо, то $\operatorname{Aut}R^+$ — конечная группа, а значит, для любого $\alpha\in\operatorname{Aut}R^+$ существует такое натуральное n, что $\alpha^n=id_R=\lambda_1$.

Пример 4.2. Кольцо $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ не является A-кольцом при любом простом p. Это вытекает из сравнения количества элементов в множествах $\mathrm{U}(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p)$ и $\mathrm{U}(M_2(\mathbb{Z}_p))$.

Пример 4.3 (см. [19]). На группе $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}$ зададим умножение по правилу

$$(\varepsilon,z)(\varepsilon',z')=((\varepsilon z'+\varepsilon' z)\bmod 2zz'),$$

где $\varepsilon,\varepsilon'\in\mathbb{Z}_2$, $z,z'\in\mathbb{Z}$ и $\mathrm{mod}2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_2$ — естественный эпиморфизм. Несложные выкладки (см. [19, пример 1.2]) показывают, что полученное таким образом кольцо является A-кольцом, но не является E-кольцом.

Предложение 4.4. *Пусть R — AA-кольцо. Для каждого $u\in\mathrm{U}(R)$ найдется такое натуральное число n, что $u^n\in\mathrm{C}(R)$, где $\mathrm{C}(R)$ — центр кольца R. Кроме того, если R^+ — группа без кручения и v — нильпотентный элемент кольца R, то $v\in\mathrm{C}(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим правое умножение ρ_u на элемент $u\in\mathrm{U}(R)$. Так как $\rho_u\in\operatorname{Aut}R^+$, то найдется такое $n\in\mathbb{N}$, что $\rho_u^n=\rho_{u^n}=\lambda_v$ для некоторого $v\in\mathrm{U}(R)$. Тогда $xu^n=vx$ при любом $x\in R$, а значит, взяв $x=1$, получим $u^n=v\in\mathrm{C}(R)$.

Чтобы доказать второе утверждение, воспользуемся математической индукцией по индексу нильпотентности. Если $v^1=0$, то $v=0\in\mathrm{C}(R)$. Предположим, что все нильпотентные элементы индекса $\leqslant k$ лежат в центре кольца R. Рассмотрим произвольный элемент $v\in R$, для которого $v^{k+1}=0$.

Поскольку v — нильпотентный элемент, то $1+v \in \mathrm{U}(R)$ и $(1+v)^m \in \mathrm{C}(R)$ при некотором натуральном m, т.е.

$$\sum_{j=0}^{m} C_j^m v^j \in \mathrm{C}(R).$$

Так как $jk \geqslant k+1$ при $j \geqslant 2$, то $(v^j)^k = v^{jk} = 0$ и, учитывая предположение индукции, получаем, что $v^2, v^3, \ldots, v^m \in \mathrm{C}(R)$. Тогда $C_1^m v \in \mathrm{C}(R)$, т.е. $xC_1^m v = C_1^m vx$ для любого элемента $x \in R$. Поскольку R^+ — группа без кручения, то из последнего равенства получаем, что $v \in \mathrm{C}(R)$. $\square$

Для A-колец предложение 4.4 может быть усилено, а именно, если R — произвольное A-кольцо, то $\mathrm{U}(R) \subseteq \mathrm{C}(R)$ и $\mathrm{N}(R) \subseteq \mathrm{C}(R)$.

Предложение 4.5. *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга. Тогда его нильрадикал $N = \mathrm{N}(R)$ состоит из всех нильпотентных элементов кольца R и $N^2 = 0$.*

Доказательство. В силу предложения 4.4 нильрадикал $N = \mathrm{N}(R)$ является множеством всех нильпотентных элементов кольца R.

Далее, в соответствии с первой теоремой Бьюмонта—Пирса в R найдется такое подкольцо S, что $mR \subseteq S \oplus N \subseteq R$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Пусть $u \in N$; построим отображение $\varphi : R \to R$ как композицию умножения на m, проекции с $S \oplus N$ на N и умножения на u:

$$R \xrightarrow{\lambda_m} S \oplus N \xrightarrow{\pi_N} N \xrightarrow{\lambda_u} N.$$

Так как φ — нильпотентное отображение (как и λ_u), то $\alpha = id_R + \varphi \in \operatorname{Aut} R^+$ и, следовательно, $\alpha^n = \lambda_v$ при некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $v \in R$. Тогда

$$v = v1 = \alpha^n(1) = \sum_{j=0}^{n} C_j^n \varphi^j(1) = id_R(1) = 1,$$

поскольку $1 \in S \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Из этого следует, что $\alpha^n = id_R$ и

$$\sum_{j=1}^{n} C_j^n \varphi^j = 0 \quad \Rightarrow \quad n\varphi = -\sum_{j=2}^{n} C_j^n \varphi^j.$$

Если $\varphi \neq 0$, то найдется такое натуральное k, что $\varphi^{k+1} = 0 \neq \varphi^k$. Тогда

$$(n\varphi)^k = \Big(-\sum_{j=2}^{n} C_j^n \varphi^j\Big)^k = 0,$$

а значит, $\varphi^k = 0$; получили противоречие. Таким образом, $\varphi = 0$ и $0 = \varphi(N) = muN$. Поскольку R^+ — группа без кручения, то $uN = 0$ при любом $u \in N$, т.е. $N^2 = 0$. $\square$

Пусть A и B — квазиравные группы без кручения конечного ранга. Тогда найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $mA \subseteq B \subseteq A$. Если $\alpha \in \operatorname{Aut} A$, то он индуцирует автоморфизм $\bar{\alpha}$ конечной группы A/mA. Следовательно, $\bar{\alpha}^k = id_{A/mA}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, а значит, найдутся такие $\varphi, \psi : A \to mA$, что $\alpha^k = id_A + \varphi$ и $\alpha^{-k} = id_A + \psi$. Пусть $\beta = id_B + \varphi \restriction_B$ и $\beta' = id_B + \psi \restriction_B$; тогда $\beta\beta' = id_B = \beta'\beta$. Таким образом, некоторая степень автоморфизма группы A индуцирует автоморфизм на квазиравной ей группе B.

Лемма 4.6. *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга.*

1. *Если S — такое кольцо с единицей, что $S \doteq R$, то S — AA-кольцо.*
2. *Если A, B — такие кольца с единицей, что $R \doteq A \times B$, то A, B — AA-кольца и* $\operatorname{Hom}(A^+, B^+) = 0 = \operatorname{Hom}(B^+, A^+)$.

Доказательство. 1. Пусть $nS \subseteq R \subseteq S$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \operatorname{Aut} S^+$. Тогда найдутся такие $k, m \in \mathbb{N}$, что $\alpha^k \restriction_R \in \operatorname{Aut} R^+$ и $\alpha^{km} \restriction_R = \lambda_r \in R_\ell$. Если $s \in S$, то $n\alpha^{km}(s) = \alpha^{km}(ns) = \alpha^{km} \restriction_R$

$(ns) = \lambda_r(ns) = nrs$, следовательно, $\alpha^{km}(s) = rs$. Таким образом, $\alpha^{km} = \lambda_r \in S_\ell$, т.е. S — AA-кольцо.

2. Из п. 1 следует, что $A \times B$ — AA-кольцо. Пусть $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}(A^+, B^+)$; тогда рассмотрим отображение $\psi : A \times B \to A \times B$, действующее по закону $\psi(a, b) = (a, b + \varphi(a))$. Отображение ψ является автоморфизмом аддитивной группы кольца $A \times B$, причем $\psi^{-1}(a, b) = (a, b - \varphi(a))$. Заметим, что $\psi^k(a, b) = (a, b + k\varphi(a))$, а значит, $\psi^k \notin (A \times B)_\ell$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathrm{Hom}(A^+, B^+) = 0 = \mathrm{Hom}(B^+, A^+)$.

Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}\, A^+$l тогда $\gamma = \alpha \oplus id_B \in \mathrm{Aut}(A \times B)^+$. Следовательно, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\gamma^m = \lambda_a \oplus \lambda_b \in (A \times B)_\ell$. Таким образом, $\alpha^m = \lambda_a \in A_\ell$, и значит, A — AA-кольцо. □

Предложение 4.7. *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга, $N = \mathrm{N}(R)$ — нильрадикал кольца R и S — такое подкольцо кольца R, что $1 \in S$ и $R \doteq S \oplus N$.*

1. $\mathrm{Hom}(N^+, S^+) = 0$.
2. *Пусть* $\mathrm{Ann}_S(N) = \{x \in S \mid xN = 0\}$. *Если* $\mathrm{Ann}_S(N) = 0$, *то* $\mathrm{Aut}\, S^+$ *— периодическая группа.*
3. *Если* $\mathrm{Aut}\, S^+$ *— периодическая группа, то* $S \cong \mathbb{Z}$ *и* $R \cong \mathbb{Z} \oplus N$.

Доказательство. 1. Пусть γ — произвольный гомоморфизм из $\mathrm{Hom}(N^+, S^+)$. Построим такой эндоморфизм $\delta \in \mathrm{End}(S \oplus N)^+$, что $\delta\restriction_N = \gamma$ и $\delta\restriction_S = 0$. Тогда $\delta^2 = 0$ и $\alpha = id_{S\oplus N} + \delta \in \mathrm{Aut}(S \oplus N)^+$. Поскольку $R \doteq S \oplus N$, то по лемме 4.6 $S \oplus N$ является AA-кольцом. Следовательно, $\alpha^k = \lambda_v$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ и $v \in S \oplus N$, а тогда

$$\lambda_v = \alpha^k = \sum_{j=0}^{k} C_j^k \delta^j = id_{S\oplus N} + k\delta \quad \Rightarrow \quad k\delta = \lambda_{v-1}.$$

Учитывая, что N — идеал кольца R, получаем $k\delta(N) \subseteq S \cap (v-1)N \subseteq S \cap N = 0$, а значит, $\delta = 0$.

2. Ввиду предложений 4.4 и 4.5 имеет место включение $N \subset \mathrm{C}(R)$, N состоит из всех нильпотентных элементов кольца R и $N^2 = 0$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}\, S^+$; тогда $\gamma = \alpha \oplus id_N \in \mathrm{Aut}(S \oplus N)^+$. Так как $S \oplus N$ — AA-кольцо, то $\gamma^k = \lambda_v$, где $v = s + n$, $s \in S$ и $n \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$. Пусть $t + x \in S \oplus N$; тогда

$$\gamma^k(t + x) = \alpha^k(t) + x = v(t + x) = (s + n)(t + x) = st + (sx + nt).$$

Из данного равенства следует, что $x = sx + nt$ при любых $x \in N$ и $t \in S$. В частности, при $t = 0$ получаем $x = sx$ и, поскольку $\mathrm{Ann}_S(N) = 0$, то $s = 1 \in S$. Таким образом, $\alpha^k = id_S$ и $\mathrm{Aut}\, S^+$ — периодическая группа.

3. Так как S не содержит нильпотентных элементов, то в соответствии с теоремами Бьюмонта—Пирса $S \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m$, где все S_i — области, причем можно считать, что все S_i — целозамкнутые подкольца полей алгебраических чисел (подробнее см. [14]). Из леммы 4.6 следует, что кольца S_i являются AA-кольцами, причем из периодичности группы $\mathrm{Aut}\, S^+$ следует периодичность всех групп $\mathrm{Aut}\, S_i^+$.

В соответствии с результатами Бьюмонта—Пирса (см. [13]) целозамкнутое кольцо S_i изоморфно локализации J_Π некоторого кольца целых алгебраических чисел J относительно множества простых идеалов Π. Так как $\mathrm{Aut}\, S_i^+$ — периодическая группа, то группа обратимых элементов $\mathrm{U}(J_\Pi)$ тоже периодическая. Предположим, что существует простой идеал P кольца J, не принадлежащий множеству Π. Тогда всякий ненулевой элемент $a \in P$ обратим в J_Π, причем a имеет бесконечный мультипликативный порядок (в противном случае $a^m = 1$ и $1 \in P$). Таким образом, группа $\mathrm{U}(J_\Pi)$ не является периодической; получили противоречие. Следовательно, Π — множество всех простых идеалов кольца J, а значит, $J_\Pi = J$ — свободная группа. Таким образом, получили, что S^+ — свободная группа. Но $\mathrm{Aut}\, \mathbb{Z}^m$ — периодическая группа в точности тогда, когда $m = 1$, следовательно, $S \cong \mathbb{Z}$.

Наконец, заметим, что N — сервантная подгруппа в R^+; следовательно, R/N — группа без кручения, квазиизоморфная группе $\mathbb{Z}$. Таким образом, $R \cong \mathbb{Z} \oplus N$. □

Лемма 4.8. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, R^+ — группа без кручения конечного ранга и $R \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, где все $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — тела. Если I — такой собственный идеал кольца R, что I^+ — сервантная подгруппа в R^+, то существует такое разбиение $E \cup E' = \{1, 2, \ldots, k\}$, что*

$$I \doteq \prod_{i \in E}^{\times} S_i.$$

Кроме того, существует такое сервантное подкольцо S кольца R, что

$$S \doteq \prod_{i \in E'}^{\times} S_i$$

и $R \doteq I \times S$. Более того, оба кольца I и S содержат единичные элементы.

Доказательство. Пусть $nR \subseteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k \subseteq R$ и пусть E — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, состоящее из всех таких i, что естественная проекция из I на $\mathbb{Q} \otimes S_i$ отлична от нуля. Возьмем некоторый индекс $i \in E$ и такой элемент $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in I$, что $a_i \neq 0$. Тогда $0 \neq na_i \in S_i$. Пусть e_i — единица кольца S_i. Так как $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — тело, то $ma_i^{-1} \in S_i$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Тогда $nae_ima_i^{-1} = nme_i \in I$ и $e_i \in I$ (учитывая сервантность подгруппы I^+ в группе R^+). В силу произвольности выбора $i \in E$ получаем, что

$$nI \subseteq \prod_{i \in E}^{\times} S_i \subseteq I$$

и $e = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ — единица кольца I.

Пусть

$$S = \Big\langle \prod_{i \in E'}^{\times} S_i \Big\rangle_* \subseteq R$$

— сервантное подкольцо в кольце R, порожденное подкольцом $\prod_{i \in E'}^{\times} S_i$. Тогда, очевидно, S — кольцо с единицей и

$$nS \subseteq \prod_{i \in E'}^{\times} S_i \subseteq S,$$

а значит, $nR \subseteq I \times S \subseteq R$. □

Теорема 4.9 (см. [18]). *Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга.*

1. *Если $N = \mathrm{N}(R) \neq 0$, то $R = \mathbb{Z} \oplus N$ и R не является A-кольцом.*
2. *Если $\mathrm{N}(R) = 0$, то R — E-кольцо.*
3. *Если R — A-кольцо, то R — E-кольцо.*

Доказательство. 1. В соответствии с первой теоремой Бьюмонта—Пирса существует такое подкольцо S кольца R, содержащее единицу из R, что $nR \subseteq S \oplus N \subseteq R$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда (по лемме 4.6) $S \oplus N$ является AA-кольцом. Нетрудно видеть, что S тоже является AA-кольцом. Предположим, что $N \neq 0$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $I = \mathrm{Ann}_S(N) \neq 0$. В соответствии со второй теоремой Бьюмонта—Пирса $S \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, где все $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — простые $\mathbb{Q}$-алгебры без нильпотентных элементов, т.е. все S_i — области. Заметим, что I — сервантный идеал кольца S. Тогда по лемме 4.8 найдется такое подкольцо S' кольца S, что $1 \in S'$ и $S \doteq I \times S'$. Из леммы 4.6(2) следует, что S' — AA-кольцо, а значит, и $T = S' \oplus N$ — AA-кольцо, причем $\mathrm{Ann}_{S'}(N) = 0$. Тогда в соответствии с предложением 4.7 имеет место изоморфизм $S' \cong \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\mathrm{Hom}(S'^+, I^+) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, I^+) \cong I^+ = \mathrm{Ann}_S(N) \neq 0,$$

что противоречит лемме 4.6(2). Таким образом, данный случай невозможен.

Случай 2. Пусть $I = \mathrm{Ann}_S(N) = 0$; тогда из предложения 4.7 вытекает равенство $R = \mathbb{Z} \oplus N$. Далее рассмотрим автоморфизм $\alpha = id_{\mathbb{Z}} \oplus (-id_N) \in \mathrm{Aut}\, R^+$. Очевидно, что $\alpha \notin \mathrm{U}(R_\ell)$, а значит, R не является A-кольцом.

2. Так как $\mathrm{N}(R) = 0$, то $R \doteq S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, где все $\mathbb{Q} \otimes S_i$ — простые $\mathbb{Q}$-алгебры без нильпотентных элементов, т.е. все S_i — области. Из леммы 4.6 следует, что $\mathrm{Hom}(S_i, S_j) = 0$ при всех $i \neq j$. Далее покажем, что каждая группа S_i^+ сильно неразложима. Предположим, что $n(A \oplus B) \subseteq S_i \subseteq A \oplus B$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Тогда

$$\alpha = id_A \oplus (id_B + \varphi) \in \mathrm{Aut}(A \oplus B),$$

а значит, некоторая натуральная степень α индуцирует автоморфизм на группе S_i^+, $\beta = \alpha^m \restriction_{S_i} \in \mathrm{Aut}\, S_i^+$. Так как S_i — AA-кольцо (по лемме 4.6), то $\beta^t = \lambda_s \in (S_i)_\ell$ при некотором $t \in \mathbb{N}$. Пусть $s = a + b \in S_i \subseteq A \oplus B$; тогда для любых $x \in A, y \in B$

$$\beta^t(nx + ny) = nx + (ny + tm\varphi(nx)) = (a + b)(nx + ny) = anx + any + bnx + bny.$$

При $x = 0$ получаем $ny = nay + nby = (na + nb)y$ при всех $y \in B$, т.е. $s = a + b = 1$. Следовательно, $\varphi(x) = 0$ при любом $x \in A$ и $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$. Аналогично проверяется, что $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$. Из этого вытекает, что $nA \cdot nB = 0$. Но S_i не содержит делителей нуля; следовательно, $A = 0$ или $B = 0$, т.е. S_i^+ — сильно неразложимая группа. Таким образом, в соответствии с теоремой 2.3 получаем, что R — E-кольцо. Справедливость последнего утверждения теоремы очевидным образом вытекает из пп. 1 и 2. $\square$

Следствие 4.10 (см. [18]). *Пусть R — кольцо без кручения конечного ранга с ненулевым нильрадикалом N. R является AA-кольцом в том и только том случае, когда $R = \mathbb{Z} \oplus N$, где N^+ — абелева группа без кручения конечного ранга без свободных слагаемых, такая что $N \neq 0 = NN$ и $\mathrm{Aut}\, N^+$ — периодическая группа.*

Доказательство. Пусть R — AA-кольцо без кручения конечного ранга с ненулевым нильрадикалом, $\mathrm{N}(R) = N \neq 0$. Тогда по теореме 4.9 имеет место разложение $R = \mathbb{Z} \oplus N$, причем $N^2 = 0$ и $\mathrm{Hom}(N^+, \mathbb{Z}) = 0$ (согласно предложениям 4.5 и 4.7). Далее, $\mathrm{U}(R_\ell) \restriction_N = \{id_N, -id_N\}$, следовательно, $\mathrm{Aut}\, N^+$ — периодическая группа. Несложная проверка показывает, что справедливо и обратное утверждение. $\square$

Помимо A-колец и AA-колец известны и другие обобщения E-колец. Например, двусторонние E-кольца (кольцо R называется *двусторонним E-кольцом*, если $\mathsf{E}(R^+)$ порождается как кольцо множеством $R_\ell \cup R_r$). Этим кольцам посвящена работа М. Дугаса и Ч. Винсонхалера [20]. Двусторонние E-кольца могут быть некоммутативными (например, полные матричные кольца над E-кольцами являются двусторонними E-кольцами). Более того, из определения следует, что коммутативные двусторонние E-кольца — это в точности E-кольца. Наиболее близки к E-кольцам введенные С. Фейгельштоком TE-кольца (см. [21]). Кольцо R называется TE-кольцом, если имеет место квазиравенство $R_\ell \doteq \mathsf{E}(R^+)$. TE-Кольца и E-кольца очень похожи; фактически их отличает только наличие единичного элемента (TE-кольцо с единицей является E-кольцом).

5. Умножения на группах

В силу определения E-групп ясно, что для их задания и исследования возможно использовать язык умножений на группах.

Пусть на группе A задано такое умножение μ, что (A, μ) — ассоциативное кольцо с единицей. Умножение ν, действующее на группе A по закону

$$\nu(x, y) = \mu(a, \mu(x, y))$$

для некоторого $a \in A$, будем называть *каноническим относительно умножения* μ и обозначать μ_a.

Введем для группы A следующие обозначения:

$$A_\mu = \{\mu_a \mid a \in A\}, \quad A_\mu^\perp = \{\nu \in \mathrm{Mult}\ A \mid \nu(1,1) = 0\},$$

где 1 — единица кольца (A, μ). Нетрудно видеть, что множества A_μ и $A_\mu^\perp$ являются подгруппами группы $\mathrm{Mult}\, A$.

Лемма 5.1. $\mathrm{Mult}\, A = A_\mu \oplus A_\mu^\perp$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathrm{Mult}\, A$ — произвольное умножение. Рассмотрим умножение

$$\nu(x, y) = \lambda(x, y) - \mu(\lambda(1, 1), \mu(x, y)).$$

Для него имеем

$$\nu(1, 1) = \lambda(1, 1) - \mu(\lambda(1, 1), 1) = \lambda(1, 1) - \lambda(1, 1) = 0.$$

Следовательно, $\nu \in A_\mu^\perp$ и

$$\lambda(x, y) = \mu(\lambda(1, 1), \mu(x, y)) + \nu(x, y),$$

т.е. $\lambda \in A_\mu + A_\mu^\perp$. Наконец, поскольку $A_\mu \cap A_\mu^\perp = 0$, то $\mathrm{Mult}\ A = A_\mu \oplus A_\mu^\perp$. □

Лемма 5.2. *Пусть A — группа, допускающая структуру ассоциативного кольца с единицей. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *A — E-группа*;

(2) *если $\nu \in \mathrm{Mult}\, A$ и $\nu(1, 1) = 0$, то $\nu = 0$.*

Доказательство. (1)⇒(2). Предположим, что существует такое умножение $\nu \in \mathrm{Mult}\, A$, что $\nu(1, 1) = 0$, и такие элементы $a, b \in A$, что $\nu(a, b) \neq 0$. Если для любого $y \in A$ имеет место равенство $\nu(1, y) = 0$, то рассмотрим эндоморфизм $\alpha \in \mathsf{E}(A)$, действующий по правилу $\alpha(x) = \nu(x, b)$. Заметим, что $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(a) \neq 0$, а значит, по лемме 1.3 группа A не является E-группой.

Если же найдется такой элемент $c \in A$, что $\nu(1, c) \neq 0$, то рассмотрим эндоморфизм $\alpha \in E(A)$, действующий по закону $\alpha(x) = \nu(1, x)$. Тогда $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(c) \neq 0$, т.е. A не является E-группой. В обоих случаях получаем противоречие с условием (1), а значит, из $\nu(1, 1) = 0$ всегда следует, что $\nu = 0$.

(2)⇒(1). Предположим, что A не является E-группой; тогда по лемме 1.3 найдутся такие эндоморфизм $\alpha \in \mathsf{E}(A)$ и элемент $a \in A$, что $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(a) \neq 0$. Рассмотрим умножение ν, заданное следующим образом:

$$\nu(x, y) = \mu(x, \alpha(y)).$$

Тогда $\nu(1, 1) = 0$ и $\nu(1, a) \neq 0$; противоречие. □

Теорема 5.3. *Пусть группа A допускает структуру ассоциативного кольца с единицей (A, μ). Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *A — E-группа*;

(2) *все умножения на A ассоциативны*;

(3) *все умножения на A коммутативны.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) следует из теоремы 1.4 и коммутативности E-кольца (A, μ).

(2)⇒(1). Пусть A не является E-группой. Тогда по лемме 1.3 существует такой ненулевой эндоморфизм α, что $\alpha(1) = 0$. Возможны два случая.

Случай 1: существует такой элемент $a \in A$, что $\alpha^2(a) \neq 0$. Рассмотрим умножение ν, действующее по правилу $\nu(x, y) = \mu(x, \alpha(y))$. Тогда

$$\nu(\nu(1, 1), a) = \nu(\mu(1, \alpha(1)), a) = \nu(0, a) = 0,$$
$$\nu(1, \nu(1, a)) = \nu(1, \mu(1, \alpha(a))) = \nu(1, \alpha(a)) = \mu(1, \alpha^2(a)) = \alpha^2(a) \neq 0,$$

т.е. умножение ν неассоциативно.

Случай 2: $\alpha^2(x) = 0$ для любого $x \in A$. Поскольку α — ненулевой эндоморфизм, существует такой элемент a, что $\alpha(a) \neq 0$. Рассмотрим эндоморфизм β, действующий по закону $\beta(x) = x+\alpha(x)$, и умножение ν, действующее по правилу $\nu(x,y) = \mu(x,\beta(y))$. Покажем, что ν — неассоциативное умножение:

$$\nu(\nu(1,1),a) = \nu(\mu(1,\beta(1)),a) = \nu(1+\alpha(1),a) = \nu(1,a) = \mu(1,\beta(a)) = \beta(a),$$
$$\nu(1,\nu(1,a)) = \nu(1,\mu(1,\beta(a))) = \nu(1,a+\alpha(a)) = \nu(1,a)+\nu(1,\alpha(a)) =$$
$$= \beta(a)+\beta(\alpha(a)) = \beta(a)+\alpha(a)+\alpha^2(a) = \beta(a)+\alpha(a) \neq \beta(a).$$

В обоих случаях получили противоречие с тем, что все умножения на A ассоциативны, а значит, A — E-группа.

Импликация (1)⇒(3) вытекает из теоремы 1.4.

(3)⇒(1) Предположим, что A не является E-группой. Тогда найдется такой эндоморфизм $\alpha \in \mathsf{E}(A)$, что $\alpha(1) = 0$ и $\alpha(a) \neq 0$ для некоторого $a \in A$. Рассмотрим умножение ν, действующее по правилу $\nu(x,y) = \mu(x,\alpha(y))$. Тогда $\nu(a,1) = \mu(a,\alpha(1)) = 0$ и $\nu(1,a) = \alpha(a) \neq 0$, а значит, умножение ν некоммутативно. □

В связи с теоремой 5.3 естественным обобщением E-групп (но не $\mathcal{E}$-замкнутых групп) являются группы, допускающие только коммутативные умножения.

Пример 5.4 (см. [5])**.** Делимая группа A допускает только коммутативные умножения в точности тогда, когда $r_0(A) \leqslant 1$.

Пример 5.5 (см. [22])**.** Периодическая группа A допускает только коммутативные умножения в точности тогда, когда $r_p(A) \leqslant 1$ для любого простого p.

Пример 5.6. Любая группа без кручения A ранга 1 допускает только коммутативные умножения, так как A является либо E-группой, либо нуль-группой.

Пример 5.7. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p\in P} \mathbb{Z}_{p^3}$. Возьмем элемент $x = (p\varepsilon_p)$, где ε_p — единица кольца $\mathbb{Z}_{p^3}$, и построим группу $A = \langle x, x^2\rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$. В силу [27, Theorem 119.3] всякое умножение на группе A единственным образом продолжается до умножения на группе $\mathbb{Z}_\chi^+$. Но $\mathbb{Z}_\chi$ — E-кольцо, следовательно, всякое умножение на $\mathbb{Z}_\chi$ и на A коммутативно.

Отметим некоторые свойства групп, допускающих только коммутативные умножения.

(a) Если группа допускает только коммутативные умножение, то для любого ее прямого слагаемого верно то же самое.
(b) Если A и B — квазиизоморфные группы без кручения, причем группа A допускает только коммутативные умножения, то B тоже допускает только коммутативные умножения.
(c) Если группа A допускает только коммутативные умножения, то для любого простого p
$$t_p(A) \cong \mathbb{Z}_{p^n} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{m}} \mathbb{Z}_{p^\infty},$$
где $n = n(p)$ — некоторое целое неотрицательное число, а $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(p)$ — некоторое кардинальное число.

Пример 5.8. Пусть A — TE-группа без кручения конечного ранга (т.е. для группы A имеет место квазиизоморфизм $A \dot{\cong} \operatorname{End} A$). Несложно показать, что $\mathsf{E}(A)$ является E-кольцом (см., например, [21]). Тогда группа A квазиизоморфна E-группе $\operatorname{End} A$, а значит, по свойству (b) группа A допускает только коммутативные умножения.

Заметим, что примеры TE-групп без кручения конечного ранга, не являющихся E-группами, приводятся в [16] (при рассмотрении жестких почти вполне разложимых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором) и в [8, 9] (при рассмотрении групп со свободными сервантными подгруппами и при рассмотрении групп со свободными подгруппами бесконечного индекса).

Теорема 5.9 (см. [22]). *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где все* A_i — *группы без кручения ранга* 1. *Тогда следующие утверждения равносильны*:

(1) *группа* A *допускает только коммутативные умножения*;

(2) $\mathrm{Hom}(A_i \otimes A_j, A_k) = 0$ *для всех* $i, j, k \in I$, *удовлетворяющих условию* $i \neq j$;

(3) $\mathrm{type}(A_i) + \mathrm{type}(A_j) \nleqslant \mathrm{type}(A_k)$ *для всех* $i, j, k \in I$, *удовлетворяющих условию* $i \neq j$.

Доказательство. (1)⇒(2). Предположим, что для некоторых $i, j, k \in I$, удовлетворяющих условию $i \neq j$, существует ненулевой гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}(A_i \otimes A_j, A_k)$. Для произвольных $a, b \in A$ определим произведение $a \cdot b = f(a_i \otimes b_j)$, где a_i, b_j — компоненты элементов a, b в группах A_i и A_j соответственно. Выберем такие $a_i \in A_i$ и $a_j \in A_j$, что $a_i \cdot a_j = f(a_i \otimes a_j) \neq 0$. Но тогда $a_j \cdot a_i = f(0 \otimes 0) = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$.

(2)⇒(3). Пусть $\mathrm{type}(A_i) + \mathrm{type}(A_j) \leqslant \mathrm{type}(A_k)$ для некоторых $i, j, k \in I$, удовлетворяющих условию $i \neq j$. Поскольку $A_i \otimes A_j$ — группа без кручения ранга 1 и $\mathrm{type}(A_i \otimes A_j) = \mathrm{type}(A_i) + \mathrm{type}(A_j)$, то $\mathrm{Hom}(A_i \otimes A_j, A_k) \neq 0$ — противоречие.

(3)⇒(1). Рассмотрим произвольное умножение $\cdot$ на группе A. Так как при $i \neq j$ имеем неравенство $\mathrm{type}(A_i) + \mathrm{type}(A_j) \nleqslant \mathrm{type}(A_k)$, то $\mathrm{type}(\pi_k(a_i \cdot a_j)) \neq \mathrm{type}(A_k)$ для любых $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ и проекции $\pi_k : A \to A_k$. Следовательно, $a_i \cdot a_j = 0$ при всех $i, j \in I$, удовлетворяющих условию $i \neq j$. Таким образом, умножение $\cdot$ задается умножениями $a_i \cdot b_i$, где $a_i, b_i \in A_i$ и $i \in I$. Выберем для каждого $i \in I$ произвольный ненулевой элемент $e_i \in A_i$. Так как A_i — группа без кручения ранга 1, то всякий элемент $a_i \in A_i$ представим в виде $q_i e_i$, где $q_i \in \mathbb{Q}$. Следовательно, умножение $\cdot$ на группе A вполне задается элементами e_i^2, $i \in I$, а значит, $(A, \cdot)$ — коммутативное кольцо. □

Пример 5.10 (см. [22]). Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ — вполне разложимая группа без кручения ранга 2, $\mathrm{type}(A_1) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ и $\mathrm{type}(A_2) = (\infty, 0, \infty, 0, \ldots)$. Нетрудно проверить, что любое ассоциативное умножение на группе A коммутативно. Однако, по теореме 5.9 группа A допускает и некоммутативные умножения.

Предложение 5.11. *Если группа* A *допускает только коммутативные умножения и имеет ненулевую делимую часть, то* $r_0(A) \leqslant 1$.

Доказательство. Так как A имеет ненулевую делимую часть, то $A = D \oplus B$, где $D \cong \mathbb{Q}$ или $D \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Предположим, что $r_0(A) \geqslant 2$ и рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $D \cong \mathbb{Q}$; тогда $r_0(B) \geqslant 1$. Следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $f : D \otimes B \to D$. Для произвольных элементов $a_1 = d_1 + b_1$ и $a_2 = d_2 + b_2$ ($d_1, d_2 \in D$ и $b_1, b_2 \in B$) определим произведение $a_1 \cdot a_2 = f(d_1 \otimes b_2)$. Так как f — ненулевой гомоморфизм, то $f(d \otimes b) \neq 0$ для некоторых $d \in D$, $b \in B$. Но тогда $d \cdot b = f(d \otimes b) \neq 0$, а $b \cdot d = f(0 \otimes 0) = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$.

Случай 2. Пусть $D \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$; тогда $r_0(B) \geqslant 2$, и в группе B можно выбрать линейно независимые элементы a, b. Следовательно, $a \otimes b$ и $b \otimes a$ — линейно независимые элементы группы $B \otimes B$. Построим такой гомоморфизм

$$f : \langle a \otimes b \rangle \oplus \langle b \otimes a \rangle \to \mathbb{Z}_{p^\infty},$$

что

$$f(a \otimes b) = d \neq 0, \quad f(b \otimes a) = 0.$$

Так как $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — инъективная группа, то гомоморфизм f можно расширить до гомоморфизма $f : B \otimes B \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Теперь для произвольных элементов $a_1 = d_1 + b_1$ и $a_2 = d_2 + b_2$ ($d_1, d_2 \in D$ и $b_1, b_2 \in B$) группы A определим произведение $a_1 \cdot a_2 = f(b_1 \otimes b_2)$. При этом $a \cdot b = d \neq 0$ и $b \cdot a = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$.

В обоих случаях мы получили противоречие, следовательно, $r_0(A) \leqslant 1$. □

В связи с доказанным утверждением интерес представляют группы без кручения ранга 1, допускающие только коммутативные умножения.

Теорема 5.12. *Пусть A — редуцированная нерасщепляющаяся смешанная группа без кручения ранга 1 и $S = s(A) = \{p \in P \mid t_p(A) \neq 0\}$. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *группа A допускает только коммутативные умножения;*

(2) *$t_p(A)$ — циклическая группа для каждого $p \in S$ и A вкладывается в группу $\prod\limits_{p\in S} t_p(A)$ в качестве S-сервантной подгруппы;*

(3) *$t_p(A)$ — циклическая группа для каждого $p \in S$ и A сервантно вкладывается в группу $\prod\limits_{p\in P} R_p$, где*

$$R_p = \begin{cases} t_p(A), & p \in S, \\ 0, & p \notin S \text{ и } A \text{ является } p\text{-делимой}, \\ \widehat{\mathbb{Z}}_p, & p \notin S \text{ и } A \text{ не является } p\text{-делимой}. \end{cases}$$

Доказательство. (1)⇒(2). Для произвольного простого числа $p \in S$ рассмотрим разложение $A = t_p(A) \oplus A_p$. Так как A — редуцированная группа, то $t_p(A)$ — циклическая группа. Покажем, что A_p — p-делимая группа. Предположим противное, $pA_p \neq A_p$. Пусть $t_p(A) = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^n}$; тогда $t_p(A) \otimes A_p \cong A_p/p^n A_p$ — нетривиальная прямая сумма циклических p-примарных групп порядка $\leqslant p^n$. Следовательно, существует ненулевой гомоморфизм $f : t_p(A) \otimes A_p \to t_p(A)$. Для элементов $a_1 = t_1 + b_1$ и $a_2 = t_2 + b_2$ ($t_1, t_2 \in t_p(A)$ и $b_1, b_2 \in A_p$) группы A определим произведение по закону $a_1 \cdot a_2 = f(t_1 \otimes b_2)$. Выберем произвольно такие элементы $t \in t_p(A)$ и $b \in A_p$, что $f(t \otimes b) \neq 0$. Тогда $t \cdot b = f(t \otimes b) \neq 0$ и $b \cdot t = f(0 \otimes 0) = 0$, что противоречит коммутативности кольца $(A, \cdot)$. Таким образом, A_p — p-делимая группа при любом $p \in S$.

Пусть a — произвольный элемент группы A; тогда для каждого $p \in S$ имеет место разложение $A = t_p(A) \oplus A_p$ и, следовательно, $a = a_p + b_p$, где $a_p \in t_p(A)$ и $b_p \in A_p$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi : A \to \prod_{p\in S} t_p(A), \quad \varphi : a \mapsto (a_p)_{p\in S}.$$

Очевидно, $\operatorname{Ker}\varphi = \bigcap\limits_{p\in S} A_p$ — группа без кручения ранга $\leqslant 1$. Если $r_0(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$, то $\varphi(A) = t(A)$, и значит, $t(A)$ выделяется в A прямым слагаемым, что противоречит нерасщепляемости группы A. Следовательно, $r_0(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$ и $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, т.е. φ — мономорфизм.

Так как все группы A_p ($p \in S$) p-делимые, то факторгруппа $A/t(A)$ является p-делимой при любом $p \in S$. Из этого следует, что $\varphi(A)$ — p-сервантная подгруппа в $\prod\limits_{p\in S} t_p(A)$ для любого $p \in S$.

(2)⇒(3). Рассмотрим короткую сервантно точную последовательность

$$0 \to t(A) \to A \to A/t(A) \to 0.$$

Она индуцирует короткую последовательность

$$0 \to \widehat{t(A)} \to \widehat{A} \to \widehat{A/t(A)} \to 0,$$

где $\widehat{\ }$ — функтор взятия $\mathbb{Z}$-адического пополнения. Хорошо известно (см., например, [27, Theorem 39.8]), что вторая последовательность точна и расщепляется, т.е. $\widehat{A} \cong \widehat{t(A)} \oplus \widehat{A/t(A)}$. При этом

$$\widehat{t(A)} \cong \prod_{p\in S} t_p(A),$$

а поскольку $A/t(A)$ — группа без кручения ранга 1, то

$$\widehat{A/t(A)} \cong \prod_{p\in T} \widehat{\mathbb{Z}}_p,$$

где $T = \{p \in P \mid p(A/t(A)) \neq A/t(A)\}$. Учитывая, что $A/t(A)$ — p-делимая группа при любом $p \in S$, получаем, что $S \cap T = \varnothing$, и значит, $\widehat{A} = \prod\limits_{p\in P} R_p$, где группы R_p удовлетворяют условиям п. (3).

Если $\mu : A \to \widehat{A}$ — естественный гомоморфизм, то $\mu(A)$ — сервантная подгруппа в $\widehat{A} = \prod\limits_{p\in P} R_p$, причем

$$\operatorname{Ker}\mu = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} nA \subseteq \bigcap_{p\in S} A_p = 0.$$

Следовательно, группа A сервантно вкладывается в группу $\prod\limits_{p\in P} R_p$.

(3)⇒(1). Пусть $(A,\cdot)$ — произвольное кольцо на группе A. Так как пополнение $\mu : A \to \widehat{A}$ является вложением и, очевидно,

$$\widehat{A} \cong \prod_{p\in P} R_p,$$

то кольцевая структура на $(A,\cdot)$ единственным образом продолжается до кольцевой структуры на $\prod\limits_{p\in P} R_p$ (см. [27, Sec. 119]). Но $\prod\limits_{p\in P} R_p$ — E-группа, а значит, всякое умножение на ней коммутативное. Таким образом, $(A,\cdot)$ — коммутативное кольцо. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гришин А. В., Тимошенко Е. А., Царев А. В.* Последовательности групп эндоморфизмов абелевых групп// Мат. заметки (в печати).
2. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Идемпотентные функторы и локализации в категориях модулей и абелевых групп// Фундам. прикл. мат., **16**, № 7. — 2010. — С. 75–159.
3. *Гришин А. В., Царев А. В.* $\mathcal{E}$-Замкнутые группы и модули// Фундам. прикл. мат., **17**, № 2. — 2012. — С. 97–106.
4. *Давыдова О. И.* Факторно делимые абелевы группы ранга 1// Фунд. прикл. мат., **13**, № 3. — 2007. — С. 25–33.
5. *Карпов О. А.* Абелевы группы, допускающие только коммутативные умножения// в печати.
6. *Приходовский М. А.* Изоморфизмы тензорных произведений модулей и T-модули/ Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. — Томск, 2002.
7. *Е. А. Тимошенко* T-Радикалы и E-радикалы в категории модулей// Сиб. мат. ж., **45**, № 1. — 2004. — С. 201–210.
8. *Фомин А. А.* Абелевы группы со свободными подгруппами бесконечного индекса и их кольца эндоморфизмов// Мат. заметки, **36**, № 2. — 1984. — С. 179–187.
9. *Фомин А. А.* Сервантно свободные группы// в сб.: Абелевы группы и модули. — Томск, 1986. — С. 145–164.
10. *Фригер М. Д.* О жестких кольцах без кручения// Сиб. мат. ж., **27**, № 3. — 1986. — С. 217–219.
11. *Царев А. В.* T-Кольца и факторно делимые группы ранга 1// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех., № 4. — С. 50–53.
12. *Arnold D. M.* Finite rank torsion free abelian groups and rings/ Lect. Notes Math., **931**. — New York: Springer, 1982.
13. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Subrings of algebraic number fields// Acta Sci. Math. Szeged., **22**. — 1961. — P. 202–216.
14. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Torsion free rings// Ill. J. Math., **5**, № 1. — 1961. — P. 61–98.
15. *Beaumont R. A., Pierce R. S.* Isomorphic direct summands of abelian groups// Math. Ann., **153**, № 1. — 1964. — P. 21–37.
16. *Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P.* The Baer–Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups// Contemp. Math., **273**. — 2001. — P. 85–93.
17. *Bowshell R. A., Schultz P.* Unital rings whose additive endomorphisms commute// Math. Ann., **228**, № 3. — 1977. — P. 197–214.
18. *Dugas M.* AA-Rings// Commun. Algebra, **32**, № 10. — 2004. — P. 3853–3860.
19. *Dugas M., Feigelstock S.* A-Rings// Colloq. Math., **96**, № 2. — 2003. — P. 277–292.
20. *Dugas M., Vinsonhaler C.* Two-side E-rings// J. Pure Appl. Algebra, **185**. — 2003. — P. 87–102.
21. *Feigelstock S.* Full subrings of E-rings// Bull. Austr. Math. Soc., **54**. — 1996. — P. 275–280.

22. *Feigelstock S.* Additive groups of commutative rings// Quaest. Math., **23**, № 2. — 2000. — P. 241–245.
23. *Feigelstock S., Hausen J., Raphael R.* Groups which map onto their endomorphism rings// in: Proc. Dublin Conf., 1998. — Basel, 1999. — P. 231–241.
24. *Fomin A. A., Wickless W.* Quotient divisible Abelian groups// Proc. Am. Math. Soc., **126**, № 1. — 1998. — P. 45–52.
25. *Fuchs L.* Abelian Groups. — New York–Oxford–London–Paris: Pergamon Press, 1960.
26. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. I. — New York: Academic Press, 1970.
27. *Fuchs L.* Infinite Abelian Groups. Vol. II. — New York: Academic Press, 1973.
28. *Göbel R., Shelah S., Strüngmann L.* Generalized E-Rings/ `arxiv.org/pdf/math/0404271` (2003).
29. *Grishin A. V.* Strongly indecomposable localizations of the ring of algebraic integers// Commun. Algebra, **43**, № 9. — 2015. — P. 3816-3822.
30. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht–Boston–London: Springer, 2003.
31. *Mader A., Vinsonhaler C.* Torsion-free E-modules// J. Algebra, **115**, № 2. — 1988. — P. 401–411.
32. *Pierce R. S.* E-Modules// in: Abelian Group Theory/ Contemp. Math., **87**. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1989. — P. 221–240.
33. *Schultz P.* Periodic homomorphism sequences of abelian groups// Arch. Math., **21**. — 1970. — P. 132–135.
34. *Schultz P.* The endomorphism ring of the additive group of a ring// J. Austr. Math. Soc., **15**. — 1973. — P. 60–69.
35. *Vinsonhaler C.* E-Rings and related structures// in: Non-Noetherian Commutative Ring Theory/ Math. Appl., **520**. — Dordrecht: Kluwer, 2002. — P. 387–402.
36. *Wilson G. V.* Additive groups of T-rings// Proc. Am. Math. Soc., **99**, № 2. — 1987. — P. 219–220.

Крылов Петр Андреевич
Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
E-mail: `krylov@math.tsu.ru`

Туганбаев Аскар Аканович
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: `tuganbaev@gmail.com`

Царев Андрей Валерьевич
Московский педагогический государственный университет, Москва
E-mail: `an-tsarev@yandex.ru`