Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. А. Давыдов, О границах неопределенности при суммировании ряда методами Чезаро и Пуассона–Абеля,
УМН, 1957, том 12, выпуск 4, 167–174

https://www.mathnet.ru/rm7669

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
15 августа 2025 г., 13:11:42

1957 г. июль — август *т. XII, вып. 4 (76)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ И ЗАДАЧИ

О ГРАНИЦАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ СУММИРОВАНИИ РЯДА МЕТОДАМИ ЧЕЗАРО И ПУАССОНА — АБЕЛЯ

Н. А. Давыдов

§ 1. О границах неопределенности при суммировании ряда методом Чезаро

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с комплексными членами a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k;$$

E_1, $E_1(n_k)$, E_2 — множества всех частичных пределов соответственно последовательностей $\{S_n\}$, $\{S_{n_k}\}$, $\{\sigma_n\}$, где $\{n_k\}$ — заданная возрастающая последовательность натуральных чисел; $\overline{G}$ — замкнутое выпуклое множество в расширенной комплексной плоскости (это может быть: а) замкнутая выпуклая область, которая, если она не ограничена, содержит бесконечно удаленную точку, б) замкнутая прямая, в) замкнутый луч, г) отрезок, д) точка, конечная или бесконечно удаленная); $\overline{G}_\varepsilon$ — замкнутая выпуклая область в расширенной комплексной плоскости, которая содержит в себе множество $\overline{G}$ и каждая точка границы которой отстоит от множества $\overline{G}$ на расстояние, меньшее или равное ε, $\varepsilon > 0$ (здесь $\overline{G}$ отлично от бесконечно удаленной точки).

Если множество E_2 состоит из одной конечной точки S, то говорят, что ряд (1) суммируется к S методом Чезаро. Пусть $\varphi(t)$ — действительная функция, определенная в интервале $(0; +\infty)$, положительная и монотонная в этом интервале, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$.

Определение 1. Множество $\overline{G}$, отличное от бесконечно удаленной точки, мы назовем $(\varphi(t))$-*множеством* последовательности $\{S_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ $(k=1, 2, \ldots)$ чисел

натурального ряда, что

$$S_n \in \bar{G}_\varepsilon \text{ для } n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1} \quad (k=1, 2, \ldots), \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{\varphi(n_k)} = +\infty. \tag{2}$$

В частности, если $(\varphi(t))$-множеством последовательности $\{S_n\}$ является точка, то эту точку будем называть $(\varphi(t))$-*точкой* этой последовательности.

Определение 2. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назовем $(\varphi(t))$-*точкой* последовательности $\{S_n\}$, если можно указать последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ $(k=1, 2, \ldots)$ чисел натурального ряда и последовательность выпуклых замкнутых множеств $\bar{G}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, стягивающихся[1]) к бесконечно удаленной точке, таких, что

$$S_n \in \bar{G}_k \text{ для } n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1} \ (k=1, 2, \ldots), \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{\varphi(n_k)} = \infty. \tag{3}$$

В случае, когда последовательность $\{S_n\}$ ограничена, условие (2) в определении (t)-точки этой последовательности мы несколько ослабим, заменив его условием

$$\left.\begin{aligned} &S_{\nu_i}(k) \in \bar{G}_\varepsilon \text{ для } n_k \leqslant \nu_i^{(k)} \leqslant m_k < n_{k+1}, \ i=1, 2, \ldots, j_k \quad (k=1, 2, \ldots), \\ &\lim_{k\to\infty} \frac{j_k}{m_k - n_k} = 1, \ \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} = \infty. \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Справедливо следующее предложение.

Теорема 1. *Если* $|S_n| \leqslant Cn^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, *и если множество* G *является* $(t^{1+\alpha})$-*множеством последовательности* $\{S_n\}$, *то пересечение* $E_2 \cap \bar{G}$ *содержит, по крайней мере, одну точку, конечную или бесконечно удаленную.*

Доказательство. Случай 1. Множество $\bar{G}$ отлично от бесконечно удаленной точки. Пусть $\bar{G}$ является $(t^{1+\alpha})$-множеством последовательности $\{S_n\}$, $\alpha > 0$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ $(k=1, 2, \ldots)$ чисел натурального ряда, что

$$S_n \in \bar{G}_\varepsilon \text{ для } n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1} \ (k=1, 2, \ldots), \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}} = \infty. \tag{4}$$

Имеем

$$\sigma_{m_k} = \frac{1}{m_k+1} \sum_{\nu=0}^{m_k} S_\nu = \sigma_{n_k} \frac{n_k+1}{m_k+1} + \frac{S_{n_k+1} + S_{n_k+2} + \ldots + S_{m_k}}{m_k+1} =$$

$$= z_k - \frac{n_k+1}{m_k+1} S_{n_k+1} + \frac{n_k+1}{m_k+1} \sigma_{n_k}, \tag{5}$$

где $z_k = \dfrac{(n_k+2) S_{n_k+1} + S_{n_k+2} + \ldots + S_{m_k}}{m_k+1}$. Так как $|S_n| \leqslant Cn^\alpha$, то отсюда и из (4) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k+1}{m_k+1} S_{n_k+1} = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{n_k+1}{m_k+1} \sigma_{n_k} = 0,$$

---

[1]) Мы говорим, что множества $\bar{G}_k$ стягиваются к бесконечно удаленной точке, если расстояние точки $z=0$ до множества $\bar{G}_k$ стремится к бесконечности при $k \to +\infty$.

и, следовательно,

$$\sigma_{m_k} = z_k + o(1). \tag{6}$$

Точка z_k, в силу (4), принадлежит области $\overline{G}_\varepsilon$, а σ_{m_k}, в силу (6), будет принадлежать области $\overline{G}_{2\varepsilon}$ для достаточно больших k. Таким образом, пересечение $E_2 \cap \overline{G}_{2\varepsilon}$ содержит, по крайней мере, одну точку. Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и замкнутости множеств E_2 и $\overline{G}$, следует справедливость утверждения теоремы. Доказательство теоремы для случая $\alpha = 0$ проводится аналогично.

Случай 2. $\overline{G}$ есть бесконечно удаленная точка. Пусть бесконечно удаленная точка является $(t^{1+\alpha})$-точкой последовательности $\{S_n\}$. Тогда

$$S_n \in \overline{G}_k \text{ для } n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \ \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}} = \infty. \tag{7}$$

Как и в случае 1, имеем равенства (5) и (6). Число z_k, в силу (7), принадлежит $\overline{G}_k$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{m_k} = \infty$, т. е. пересечение $E_2 \cap \overline{G}$ содержит бесконечно удаленную точку.

Теорема 1 является точной в следующем смысле: какова бы ни была последовательность $\{\alpha_n\}$, стремящаяся к $+\infty$, всегда можно построить ряд (1) такой, что 1) $0 \leqslant S_n \leqslant n^\alpha \alpha_n$, $\alpha \geqslant 0$; 2) $S_n = 0$ для $n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}} = \infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Действительно, положим

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1}, \\ n^\alpha \alpha_n & \text{для} \quad m_{k-1} < n < n_k \ (k = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

где последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ определены так, что

$$\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}} = \gamma_k \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty, \ \gamma_k \leqslant \sqrt[4]{\min_{m_{k-1} < n \leqslant n_k} \alpha_n},$$

$$\frac{n_{k+1}}{m_k} = \gamma'_k \to +\infty \text{ при } k \to \infty, \ \gamma'_k \leqslant \sqrt[4]{\min_{m_{k-1} < n \leqslant n_k} \alpha_n}.$$

Имеем

$$\sigma_{n_k} > \sigma_{n_k+1} > \ldots > \sigma_{m_k} > \frac{S_{m_{k-1}} + \ldots + S_{n_k}}{m_k + 1} > \frac{1}{\alpha+1} \min_{m_{k-1} < n \leqslant n_k} \alpha_n \frac{n_k^{\alpha+1} - m_{k-1}^{\alpha+1}}{m_k + 1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1} \min_{m_{k-1} < n \leqslant n_k} \alpha_n \cdot \frac{1 - \left(\frac{m_{k-1}}{n_k}\right)^{\alpha+1}}{\frac{m_{k+1}}{n_k^{\alpha+1}}} = \frac{\min\limits_{m_{k-1} < n \leqslant n_k} \alpha_n}{(\alpha+1)\gamma_k} + o(1) \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Если $m_{k-1} < n < n_k$, то $\sigma_n \geqslant \frac{S_{m_{k-2}} + \ldots + S_{n_{k-1}}}{n_k} \geqslant$

$$\geqslant \min_{m_{k-2} < n \leqslant n_{k-1}} \alpha_n \cdot \frac{n_{k-1}^{\alpha+1} - m_{k-2}^{\alpha+1}}{(\alpha+1) n_k} = \min_{m_{k-2} < n \leqslant n_{k-1}} \alpha_n \frac{1}{(\alpha+1)\gamma'_{k-1} \frac{m_{k-1}}{n_{k-1}^{\alpha+1}}} \left[1 - \left(\frac{1}{\gamma'_{k-2}}\right)^{\alpha+1}\right] \geqslant$$

$$\geqslant \gamma_{k-1}^2 \gamma_{k-1}'^2 \frac{1}{(\alpha+1)\gamma'_{k-1}\gamma_{k-1}} \left[1 - \left(\frac{1}{\gamma'_{k-2}}\right)^{\alpha+1}\right] \to +\infty \text{ при } k \to \infty,$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=+\infty$. Таким образом, точка $A=0$ является $(t^{1+\alpha})$-точкой последовательности $\{S_n\}$ и, однако, она не принадлежит множеству E_2, которое в нашем примере состоит из одной бесконечно удаленной точки.

Следствие 1. *$E_1\subseteq E_2$, если последовательность частных сумм ряда (1) ограничена, а его члены удовлетворяют одному из следующих условий:* 1) $a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$; 2) $a_n>o\left(\frac{1}{n}\right)$; 3) $a_n=0$ *для* $n\neq n_k$, $a_{n_k}=o(1)$, $\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda>1$ $(k=1,2,\ldots)$; 4) $a_n=0$ *для* $n\neq n_k$, $a_{n_k}=o\left(\frac{n_k-n_{k-1}}{n_k}\right)$ $(k=1,2,\ldots)$, *$\{n_k\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел;* 5) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k^{\alpha-1}|a_k|^\alpha<+\infty$, $\alpha\geqslant1$; 6) $\sum\limits_{k=n}^{m}k^{\alpha-1}|a_k|^\alpha\to0$ *при* $n\to\infty$, $1<\frac{m}{n}\to\infty$, $\alpha>1$; 7) $a_n=0$ *для* $n\neq n_k$, a_{n_k} *— произвольные числа,* $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k}=\infty$.

В самом деле, при выполнении одного из условий 1) — 7) каждая точка множества E_1 будет (t)-точкой последовательности $\{S_n\}$ и, следовательно, по теореме 1 она принадлежит множеству E_2. Это следствие для различных случаев 1) — 7) отмечалось различными авторами.

Следствие 2. *Если $|S_n|\leqslant Cn^\alpha$, $\alpha\geqslant0$, и если каждая точка множества $E_1(n_k)$ является $(t^{1+\alpha})$-точкой последовательности $\{S_n\}$, то $E_1(n_k)\subseteq E_2$. Если, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=\infty$. В частности, если $|S_n|\leqslant Cn^\alpha$, $\alpha\geqslant0$, и если $a_n=0$ для $n_k<n\leqslant m_k<n_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}}=\infty$, то $E_1(n_k)\subseteq E_2$. Если, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=\infty$.*

Следствие 3. *Если $|S_n|\leqslant Cn^\alpha$, $\alpha>0$, $a_n=O\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$ для $n_k<n\leqslant m_k<n_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}}=\infty$, и если $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=\infty$.*

Теорема 2. *Если $|S_n|\geqslant Cn^\alpha$, $\alpha\geqslant0$, $\{n_k\}$ — заданная возрастающая последовательность натуральных чисел и если $\lim\limits_{k\to\infty}(S_{m_k}-S_{n_k})=0$ для всякой последовательности $\{m_k\}$, для которой $m_k>n_k$, а*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}}<+\infty, \tag{8}$$

то $E_1(n_k)\subseteq E_2$. Если, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=\infty$.

Доказательство. Допустим, что множество $E_1(n_k)$ содержит точку A, не принадлежащую E_2. Предполагая A конечной точкой, возьмем достаточно малую замкнутую окрестность $\overline{K}_\varepsilon$ $(|z-A|\leqslant\varepsilon)$ этой точки, не содержащую точек множества E_2. Можем считать, что $S_{n_{k_p}}\in\overline{K}_{\frac{\varepsilon}{2}}$ для $p=1,2,\ldots$ Обозначим $S_{n_{k_p}+\nu_p}$ первую после $S_{n_{k_p}}$ частную сумму, не принадлежащую $\overline{K}_\varepsilon$. Очевидно, имеем

$$\left|S_{n_{k_p}+\nu_p}-S_{n_{k_p}}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{для } p=1,2,\ldots \tag{9}$$

Легко видеть, что

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n_{k_p+\nu_p}}{n_{k_p}^{1+\alpha}} > +\infty, \tag{10}$$

так как в противном случае круг $\overline{K}_\varepsilon$ был бы $(t^{1+\alpha})$-множеством последовательности $\{S_n\}$ и, в силу теоремы 1, он должен был содержать, по крайней мере, одну точку множества E_2. А этого не может быть. Из (10), в силу условия теоремы, имеем $\lim\limits_{p\to\infty} (S_{n_{k_p}+\nu_p} - S_{n_{k_p}}) = 0$. Последнее равенство противоречит неравенству (9). Предположение, что точка A является бесконечно удаленной, также приводит к противоречию. Аналогично доказывается следующая

Теорема 3. *Если*: а) $|S_n| \leqslant Cn^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, S_n — *действительные числа*, $\{n_k\}$ — *заданная возрастающая последовательность натуральных чисел*; б) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} (S_{m_k} - S_{n_k}) \geqslant 0$ *для всякой последовательности* $\{m_k\}$, *для которой* $m_k > n_k$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}} < +\infty$; в) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} (S_{n_k} - S_{m'_k}) \geqslant 0$ *для всякой последовательности* $\{m'_k\}$, *для которой* $n_k > m'_k$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{n_k}{m_k'^{1+\alpha}} < +\infty$, *то из условий* а) *и* б) *следует, что* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma_n \geqslant \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} S_{n_k}$, *а из условий* а) *и* в) *следует, что* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sigma_n \leqslant \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} S_{n_k}$.

§ 2. О границах неопределенности при суммировании ряда методом Пуассона—Абеля

Пусть дан ряд (1) с комплексными членами a_n и пусть степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{11}$$

сходится в интервале (0; 1). Пусть далее S_n, E_1, $E_1(n_k)$ и $\overline{G}$ обозначают то же, что и в § 1. Обозначим через E_3 множество всех предельных значений суммы $f(x)$ ряда (11), когда точка x стремится к 1 слева вдоль вещественной оси.

Если множество E_3 состоит из одной конечной точки S, то говорят, что ряд (1) суммируется к числу S методом Пуассона-Абеля.

Теорема 4. *Если* $|S_n| \leqslant C$ *и если* $\overline{G}$ *является* (t)-*множеством последовательности* $\{S_n\}$, *то пересечение* $E_3 \cap \overline{G}$ *содержит, по крайней мере, одну точку.*

Доказательство. Пусть $\overline{G}$ является (t)-множеством последовательности $\{S_n\}$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ чисел натурального ряда, что будут выполнены условия (2′). Обозначим $\beta_k = \frac{m_k}{n_k}$, $\alpha_k = 1 - \frac{j_k}{m_k - n_k}$. Построим последовательность $\{\gamma_k\}$ $(\gamma_k > 0)$, удовлетворяющую условиям: а) $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = +\infty$, б) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\beta_k}{\gamma_k} = +\infty$, в) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\beta_k \alpha_k}{\gamma_k} = 0$.

В качестве последовательности $\{\gamma_k\}$ можно взять, например, последовательность $\gamma_k = \max\{\sqrt{\beta_k};\ \beta_k\sqrt{\alpha_k}\}$. Пусть $x_k = 1 - \frac{1}{n_k\gamma_k}$, тогда

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x_k^n = (1-x_k)\Big(\sum_{p=0}^{n_k-1} S_p x_k^p + \sum_{p=n_k}^{m_k} S_p x_k^p + \sum_{p=m_k+1}^{\infty} S_p x_k^p\Big),$$

где при $k \to \infty$ $(1-x_k)\sum\limits_{p=0}^{n_k-1} S_p x_k^p \to 0$ (в силу условия а)),

$$(1-x_k)\sum_{p=m_k+1}^{\infty} S_p x_k^p \to 0$$

(в силу условия б)) и, следовательно,

$$f(x_k) = (1-x_k)\sum_{p=n_k}^{m_k} S_p x_k^p + o(1).$$

Так как $(1-x_k)\sum\limits_{p\neq\nu_i^{(k)}} S_p x_k^p \to 0$ при $k \to \infty$ (в силу условия в)), то из последнего равенства имеем

$$f(x_k) = (1-x_k)\sum_{p=\nu_i^{(k)}} S_p x_k^p + o(1).$$

Отсюда и из (2′), в силу ограниченности последовательности $\{S_n\}$, следует, что $f(x_k) \in \overline{G}_{2\varepsilon}$ для всех достаточно больших k. Этим теорема 4 доказана.

Следствие. *Если последовательность частных сумм $\{S_n\}$ ряда* (1) *ограничена, а его члены a_n удовлетворяют одному из условий* 1) — 7) *следствия* 1 *теоремы* 1 § 1, *то* $E_1 \subseteq E_3$.

Это следствие для различных случаев 1) — 7) было отмечено в разное время различными авторами (Ингам [1], стр. 233; М. П. Щеглов [2], стр. 256; Н. А. Давыдов [3], стр. 9—12; и др.).

Теорема 5. *Если $\{S_n\} \leqslant Cn^{\alpha}$, $\alpha > 0$ и если множество $\overline{G}$ является $(t^{1+\alpha}\ln t)$-множеством последовательности $\{S_n\}$, то пересечение $E_3 \cap \overline{G}$ содержит, по крайней мере, одну точку, конечную или бесконечно удаленную.*

Доказательство. Случай 1. Множество $\overline{G}$ отлично от бесконечно удаленной точки.

Пусть множество $\overline{G}$ является $(t^{1+\alpha}\ln t)$-множеством последовательности $\{S_n\}$, тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность отрезков $[n_k;\ m_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ чисел натурального ряда, что

$$S_n \in \overline{G}_{\varepsilon} \text{ для } n_k \leqslant n \leqslant m_k < n_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots),\ \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}\ln n_k} = \infty. \tag{12}$$

Пусть $x_k = 1 - \frac{1}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}$, где $\gamma_k = \sqrt{\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}\ln n_k}}$ ($\gamma_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ в силу (12)). Имеем

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_k^n = (1-x_k)\Big(\sum_{p=0}^{n_k-1} S_p x_k^p + \sum_{p=n_k}^{m_k} S_p x_k^p + \sum_{p=m_k+1}^{\infty} S_p x_k^p\Big).$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{k\to\infty}[(1-x_k)\sum\limits_{p=0}^{n_k-1} S_p x_k^p = 0$ и

$$\left|(1-x_k)\sum_{p=m_k+1}^{\infty} S_p x_k^p\right| \leqslant \frac{C}{n_k^{\alpha+1}\gamma_k}\sum_{p=m_k+1}^{\infty} p^{\alpha}\left(1-\frac{1}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}\right)^p =$$

$$= \frac{C}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}\sum_{p=1}^{\infty} e^{\alpha\ln(m_k+p)}\left(1-\frac{1}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}\right)^{n_k^{1+\alpha}\gamma_k\frac{m_k+p}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}} <$$

$$< \frac{C}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_k\ln n_k+\frac{p}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}-2\alpha\ln\left(n_k^{1+\alpha}\gamma_k^2\ln n_k+p\right)} <$$

$$< \frac{C}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\left(\gamma_k\ln n_k+\frac{p}{n_k^{1+\alpha}\gamma_k}\right)} \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty,$$

и, следовательно,

$$f(x_k) = (1-x_k)\sum_{p=n_k}^{m_k} S_p x_k^p + o(1). \tag{13}$$

Так как $\varepsilon_k = 1-(1-x_k)\sum\limits_{p=n_k}^{m_k} x_k^p < \frac{4\ln 2}{n_k^{\alpha}\gamma_k}$, то $\varepsilon_k S_{n_k}\to 0$ при $k\to\infty$, и равенство (13) можно записать в следующем виде:

$$f(x_k) = z_k + o(1), \text{ где } z_k = (1-x_k)\sum_{p=n_k}^{m_k} S_p x_k^p + \varepsilon_k S_{n_k}. \tag{14}$$

Число z_k в силу (12) принадлежит множеству $\overline{G}_{\varepsilon}$, следовательно, $f(x_k)\in\overline{G}_{2\varepsilon}$ для всех достаточно больших k. Этим теорема 5 доказана для случая 1.

Случай 2. Множество $\overline{G}$ есть бесконечно удаленная точка. Пусть бесконечная точка является $(t^{1+\alpha}\ln t)$-точкой последовательности $\{S_n\}$. Тогда

$$S_n\in\overline{G}_k \text{ для } n_k\leqslant n\leqslant m_k<n_{k+1} \quad (k=1,2,\ldots),\ \lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}\ln n_k}=\infty. \tag{15}$$

Как и в случае 1, имеем равенства (13) и (14), где z_k в силу (15) принадлежит $\overline{G}_k$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k=\infty$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=\infty$. Таким образом, пересечение $E_3\cap\overline{G}$ содержит бесконечно удаленную точку. Теорема 5 доказана полностью.

Теорема 6. *Если* $|S_n|\leqslant Cn^{\alpha}$, $\alpha\geqslant 0$, $\{n_k\}$ — *заданная возрастающая последовательность натуральных чисел и если* $\lim\limits_{k\to\infty}(S_{m_k}-S_{n_k})=0$ *для всякой последовательности* $\{m_k\}$, *для которой* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{m_k}{n_k^{1+\alpha}\ln n_k}<+\infty$ *при* $\alpha>0$ *и* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{m_k}{n_k}<+\infty$ *при* $\alpha=0$, *то* $E_1(n_k)\subseteq E_3$. *Если, кроме того, ряд* (1)

суммируется методом Пуассона-Абеля к числу S, конечному или бесконечному, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$.

Следствие. *Если* $|S_n| \leqslant Cn^\alpha$, $\alpha > 0$, *и если* $a_n = 0$ *для* $n_k < n \leqslant m_k < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha} \ln n_k} = \infty$, *то* $E_1(n_k) \subseteq E_3$. *Если, кроме того, ряд* (1) *суммируется методом Пуассона-Абеля к числу S, конечному или бесконечному, то* $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$.

Теорема 7. *Пусть*: а) $|S_n| \leqslant Cn^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, S_n — *действительные числа*, $\{n_k\}$ — *заданная возрастающая последовательность натуральных чисел*; б) $\varliminf\limits_{k\to\infty} (S_{m_k} - S_{n_k}) \geqslant 0$ *для всякой последовательности* $\{m_k\}$, *для которой* $m_k > n_k$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k^{1+\alpha} \ln n_k} < +\infty$ *при* $\alpha > 0$ *и* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} < +\infty$ *при* $\alpha = 0$; в) $\varliminf\limits_{k\to\infty} (S_{n_k} - S_{m'_k}) \geqslant 0$ *для всякой последовательности* $\{m'_k\}$, *для которой* $n_k > m'_k$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{m_k'^{1+\alpha} \ln m'_k} < +\infty$ *при* $\alpha > 0$ и $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{m'_k} < +\infty$ *при* $\alpha = 0$. *Тогда из условий* а) *и* б) *следует, что* $\varlimsup\limits_{x\to 1-} f(x) \geqslant \varlimsup\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$, *из условий* а) *и* в) *следует, что* $\varliminf\limits_{x\to 1-} f(x) \leqslant \varliminf\limits_{k\to\infty} S_{n_k}$.

Если выполнены условия а), б) *и* в) *и если, сверх того, ряд* (1) *суммируется методом Пуассона-Абеля к числу S, конечному или бесконечному, то* $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$.

Доказательство теорем 6 и 7 проводится так же, как и доказательство теорем 2 и 3 § 1.

Поступило в редакцию 19 ноября 1955 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., ИЛ., 1951.
[2] М. П. Щеглов, К обобщению теорем Таубера, Матем. сб., 28 (70), № 2 (1951).
[3] Н. А. Давыдов, Сходимость лакунарных тригонометрических рядов, ДАН 65, № 1 (1949).