СОВМЕСТНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В СИСТЕМЕ GI$/M/n/\infty$ С ОБОБЩЕННЫМ ОБНОВЛЕНИЕМ*

***Т. А. Милованова*[1], *И. С. Зарядов*[2], *Л. А. Мейханаджян*[3]**

Аннотация: Рассматривается многолинейная система массового обслуживания (СМО) с конечным числом идентичных приборов и одной очередью неограниченной емкости. Заявки поступают в систему по одной в соответствии с рекуррентным потоком. Времена обслуживания заявок на приборах имеют экспоненциальное распределение с одним и тем же параметром. В системе реализован механизм обобщенного обновления: заявка, обслуживание которой было закончено, в момент ухода из системы удаляет из очереди случайное число заявок в соответствии с заранее заданным вероятностным распределением. Предложен метод нахождения совместного стационарного распределения общего числа заявок в системе и времени, прошедшего с момента последнего поступления заявки в систему. Представлены формулы в терминах преобразований для вычисления совместного распределения в нестационарном режиме.

Ключевые слова: система массового обслуживания; обобщенное обновление; управление очередью

DOI: 10.14357/08696527210301

1 Описание системы

Рассмотрим систему, состоящую из n идентичных приборов и одной очереди неограниченной емкости. Из очереди заявки обслуживаются по одной по правилу FIFO (first in, first out), LIFO (last in, first out) или RANDOM. Входящий поток заявок — рекуррентный, причем время между соседними поступлениями заявок имеет произвольную функцию распределения $A(x)$. От функции $A(x)$ потребуем, чтобы существовала (непрерывная ограниченная) плотность $a(x) = A'(x)$. Положим

$$\lambda(x) = \frac{a(x)}{1 - A(x)}\,, \quad x \geq 0\,.$$

Времена обслуживания заявок на приборах являются независимыми случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону с параметром μ.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-07-00739 и 20-07-00804).

[1]Российский университет дружбы народов, milovanova-ta@rudn.ru

[2]Российский университет дружбы народов; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, zaryadov-is@rudn.ru

[3]Финансовый университет при Правительстве РФ, lamejkhanadzhyan@fa.ru

В системе реализован механизм обобщенного обновления [1–4], работающий следующим образом. Находящаяся на приборе заявка в момент окончания обслуживания одновременно со своим уходом из системы либо с вероятностью $q_l \geq 0$, $l = 0, 1, \ldots$, удаляет из очереди l заявок, если в ней находится более l заявок, либо с вероятностью $Q_l = \sum_{k=l}^{\infty} q_k$ полностью опустошает очередь, если в ней было ровно l заявок. Отметим, что

$$Q_0 = \sum_{l=0}^{\infty} q_l = 1\,.$$

Следуя [2], вероятности q_l будем называть вероятностями обновления.

Интерес к механизму обновления связан, в частности, с потенциальными возможностями его применения в качестве алгоритма активного управления очередями (см., например, [5]). Несмотря на то что он и позволяет вывести систему на (по крайней мере тот же) уровень производительности, что достигается классическими RED-подобными (RED — random early detection, произвольное раннее обнаружение) алгоритмами [6], реализация в узлах сетей связи этого механизма в том виде, как это описано выше, трудноосуществима. Связано это с предписанием осуществлять управление после каждого момента окончания обслуживания. Как показывают вычислительные эксперименты, есть способы отказаться от этой установки без существенной потери в качестве управления. К примеру, можно «обновлять» очередь периодически (например, через заранее фиксированное число окончаний обслуживания[1]). Варьируя значения нового параметра — периода обновления — и вероятностей обновления $\{q_l,\ l \geq 0\}$, можно добиться (в некоторых случаях) практически того же уровня производительности, что достигается с помощью классического варианта обновления. Другая, вполне естественная, но неизученная его модификация подразумевает, что вероятность обновления q_l при каждом l является не константой, а функцией какой-то (численной) характеристики системы в момент окончания обслуживания; при этом управление по-прежнему осуществляется в каждый момент окончания обслуживания. Для получения каких-либо аналитических результатов для СМО с подобной модификацией механизма обновления необходимо уметь вычислять совместные распределения ее основных характеристик.

В [2] для описанной в начале этого раздела СМО были получены математические соотношения для вычисления стационарных распределений основных характеристик — числа заявок в системе по вложенной цепи Маркова и по времени. В явном виде были получены распределения времен пребывания в очереди (при прямом порядке обслуживания) «убитой», обслуженной и произвольной заявок. Среди всевозможных вариантов зависимости вероятности обновления q_l от состояния системы в момент окончания обслуживания наиболее простой и со-

[1]Отметим, что счетчик числа завершений можно организовать по-разному: считать все окончания обслуживания либо начиная с момента начала функционирования системы, либо с момента последнего опустошения системы.

держательной представляется зависимость q_l от прошедшего времени обслуживания[1]. Однако получение совместного стационарного распределения числа заявок в системе и прошедшего времени обслуживания предложенными в [2] методами невозможно. В этой статье показано, что задача определения совместного стационарного распределения сводится к решению системы рекуррентных дифференциальных уравнений (для плотностей) с обычными граничными условиями, и предложен реализуемый в вычислительном плане алгоритм ее расчета.

2 Основная система уравнений

Пусть $\nu(t)$ — число заявок в системе в момент времени t, а $\xi(t)$ — время, прошедшее с момента поступления последней заявки в момент времени t. Аналогично тому, как это делается для классической системы $M/G/1/\infty$ [7, с. 289], показывается, что $\{(\nu(t), \xi(t)),\ t \geq 0\}$ — линейчатый марковский процесс.

Введем обозначения:

$$P_j(t,x) = \mathsf{P}\{\nu(t) = j,\, \xi(t) < x\};$$

$$p_j(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} P_j(t,x), \;\; x \geq 0\,, \;\; j = 0, 1, \ldots$$

Относительно плотностей $p_j(t,x)$ будем предполагать, что они существуют и являются непрерывными [7, гл. 5]. Рассматривая моменты t и $t + \Delta$ и рассуждая стандартным образом, получаем систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_j(t,x) = -(\lambda(x) + j\mu) p_j(t,x) + (j+1)\mu p_{j+1}(t,x), \qquad 0 \leq j \leq n-2\,; \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_{n-1}(t,x) = -(\lambda(x) + (n-1)\mu) p_{n-1}(t,x) + n\mu \sum_{m=n}^{\infty} p_m(t,x) Q_{m-n}\,; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) p_j(t,x) = -(\lambda(x) + n\mu) p_j(t,x) + n\mu \sum_{m=j+1}^{\infty} p_m(t,x) q_{m-j-1}, \qquad j \geq n\,. \quad (3)$$

Поскольку эргодичность линейчатого процесса эквивалентна эргодичности его вложенной цепи, то при выполнении условия $(\mu n \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q_k)^{-1} < \mathsf{E}A$ (полученном в [2]) существуют стационарные вероятности $P_j(x) = \lim_{t\to\infty} P_j(t,x)$ (и плотности $p_j(x) = P_j'(x)$).

[1] Отметим, что значение этой характеристики, в отличие от остаточного времени обслуживания, является наблюдаемым.

3 Совместное стационарное распределение

Введем функции $r_j(x) = p_j(x)/(1 - A(x))$. Система уравнений для r_j следует из (1)–(3) и имеет вид:

$$r'_j(x) = -j\mu r_j(x) + (j+1)\mu r_{j+1}(x), \ \ 0 \le j \le n-2\,; \tag{4}$$

$$r'_{n-1}(x) = -(n-1)\mu r_{n-1}(x) + n\mu \sum_{m=n}^{\infty} r_m(x) Q_{m-n}; \tag{5}$$

$$r'_j(x) = -n\mu r_j(x) + n\mu \sum_{m=j+1}^{\infty} q_{m-j-1} r_m(x), \ \ j \ge n\,. \tag{6}$$

Для ее решения необходимы дополнительные условия на $r_j(0)$, которые получаются из граничных условий для $p_j(0)$. Стандартные рассуждения (которые могут быть восстановлены, например, по [7, с. 291]) приводят к равенствам:

$$r_j(0) = \int_0^{\infty} r_{j-1}(u)\, dA(u), \ \ j \ge 1\,. \tag{7}$$

Введем обозначения:

$$\varrho_j(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} r_j(x)\, dx\,;$$
$$\vec{\varrho} = (\varrho_n(s), \varrho_{n+1}(s), \dots)\,;$$
$$\vec{r} = \left(\frac{r_n(0)}{s+n\mu}, \frac{r_{n+1}(0)}{s+n\mu}, \dots\right)$$

и перейдем в (4)–(6) к преобразованию Лапласа (ПЛ). Переписывая (6) с учетом только что введенных обозначений, получаем матричное уравнение $\vec{\varrho}\,\mathbb{T} = \vec{r}$, в котором $\mathbb{T}$ — полуциркулянтная матрица [8, с. 14] вида

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \\ -\dfrac{n\mu}{s+n\mu} q_0 & 1 & 0 & 0 \cdots \\ -\dfrac{n\mu}{s+n\mu} q_1 & -\dfrac{n\mu}{s+n\mu} q_0 & 1 & 0 \cdots \\ -\dfrac{n\mu}{s+n\mu} q_2 & -\dfrac{n\mu}{s+n\mu} q_1 & -\dfrac{n\mu}{s+n\mu} q_0 & 1 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots \end{pmatrix}.$$

Поскольку все диагональные элементы матрицы $\mathbb{T}$ отличны от нуля, она обратима (см., например, [8, теорема 1.3]). Обратная матрица $\mathbb{T}^{-1}$, так же как и $\mathbb{T}$, является полуциркулянтной и имеет следующую структуру:

$$\mathbb{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots \\ \tau_1(s) & 1 & 0 & 0 \cdots \\ \tau_2(s) & \tau_1(s) & 1 & 0 \cdots \\ \tau_3(s) & \tau_2(s) & \tau_1(s) & 1 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots \end{pmatrix},$$

где

$$\tau_i(s) = \frac{n\mu}{s+n\mu}\, q_{i-1} + \frac{n\mu}{s+n\mu} \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j(s) q_{i-1-j}, \;\; i \geq 1\,, \;\; s \geq 0\,. \qquad (8)$$

Функция τ_i есть ПЛ некоторой непрерывной и ограниченной функции, скажем $t_i(x)$, $x \geq 0$, которую нетрудно найти, обращая (8). В дальнейшем, однако, вместо явного вида $t_i(x)$ понадобятся лишь выражения для функций $\int_0^x t_i(u) e^{n\mu u}\, du$, $x \geq 0$, которые могут быть найдены из (8) следующим образом. Положим $\tau(z,s) = \sum_{i=1}^{\infty} z^i \tau_i(s)$, $z \in [0,1]$. Домножая обе части (8) на z^i и суммируя по всем i, получаем:

$$\tau(z,s) = \frac{n\mu z Q(z)}{s + n\mu - n\mu z Q(z)}\,,$$

где $Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i q_i$ — производящая функция (ПФ) числа заявок, удаляемых из системы при обновлении. Обратное по s преобразование $\tau(z,s)$ приводит к равенству

$$\sum_{i=1}^{\infty} z^i e^{n\mu u} t_i(u) = n\mu z Q(z) e^{n\mu z Q(z) u}, \;\; z \in [0,1], \;\; u \geq 0\,,$$

из которого, проинтегрировав по u в пределах от 0 до произвольного $x > 0$, имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} z^i \int_0^x e^{n\mu u} t_i(u)\, du = e^{n\mu z Q(z) x} - 1\,, \;\; z \in [0,1]\,, \; x \geq 0\,.$$

Вводя для сокращения записи обозначение $f_n(z) = n\mu z Q(z)$ и дифференцируя левую и правую части предыдущего соотношения k раз по z в точке $z = 0$, находим

$$\int_0^x e^{n\mu u} t_k(u)\, du = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} B_{k,j} \left(f_n'(0), f_n''(0), \ldots, f_n^{(k-j+1)}(0) \right) x^j, \;\; k \geq 1\,, \quad (9)$$

где через $B_{k,j}$ обозначены частичные полиномы Белла[1] [9, с. 46] и [10]. Таким образом, $\int_0^x e^{n\mu u} t_k(u)\,du$ есть не что иное, как многочлен степени k от переменной x без свободного члена. Отметим, что коэффициенты $B_{k,j}$ в (9) зависят только от производных функции f_n в нуле (причем $f_n^{(k)}(0) = k! n\mu q_{k-1}$) и для их расчета можно действовать стандартным образом [9, с. 61] или использовать специальные методы (см., например, [11, 12]).

Вернемся к уравнению $\vec{\varrho}\mathbb{T} = \vec{r}$. Записывая его решение в скалярной форме и проводя обратное преобразование (с учетом (9)), получаем явный вид функций r_j при $j \geq n$:

$$r_j(x) = e^{-n\mu x} \sum_{m=j}^{\infty} \frac{r_m(0)}{(m-j)!} \sum_{k=0}^{m-j} x^k B_{m-j,k}, \tag{10}$$

в котором, однако, коэффициенты $r_j(0)$ остаются неизвестными. Для их нахождения воспользуемся граничными условиями (7). Обозначим через $\alpha(s)$ ПЛ $a(x)$, а через $\alpha^{(k)}(s)$ — k-ю производную $\alpha(s)$ по s. Подставляя $r_j(x)$ в приведенном выше виде в (7), приводя подобные слагаемые, с учетом обозначений $\beta_{n,j}(x) = (1/j!) \sum_{k=1}^{j} (-1)^k \alpha^{(k)}(nx) B_{jk}$ и $\beta_{n,0}(x) = \alpha(nx)$, $x > 0$, получаем

$$r_j(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{n,k}(\mu) r_{j+k-1}(0) \quad j \geq n+1\,. \tag{11}$$

Отметим, что эта система уравнений (с точностью до обозначений) совпадает с системой уравнений равновесия для стационарных вероятностей по вложенной цепи Маркова для классической системы $G/M/1/\infty$. Аналогичным образом, но из (5) и (7) сначала находится уравнение для $r_{n-1}(x)$, а затем и для $r_n(0)$:

$$r_{n-1}(x) = e^{-(n-1)\mu x} r_{n-1}(0) + \sum_{k=n}^{\infty} g_{n,k}(x;\mu) r_k(0); \tag{12}$$

$$r_n(0) = \alpha((n-1)\mu) r_{n-1}(0) + \sum_{k=n}^{\infty} \gamma_{n,k}(\mu) r_k(0), \tag{13}$$

где $\gamma_{n,m}(y) = \int_0^\infty g_{n,m}(u;y) a(u)\,du$, а значения функции $g_{n,m}$ в точке $(x;y)$ вычисляются по формуле

$$g_{n,m}(x;y) = n e^{xy} \sum_{j=n}^{m} Q_{j-n} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{k! B_{m-j,k}}{(m-j)! \mu^k} \left(e^{-n\mu x} - \sum_{i=0}^{k} \frac{(xy)^i}{i!} e^{-(n+1)\mu x} \right), \quad x \geq 0\,,\ \ y > 0\,.$$

[1]Отметим, что $B_{0,0} = 1$, $B_{0,m} = 0$ и $B_{m,0} = 0$, $m \geq 1$,

Для решения системы (11), (13) недостает только уравнения для $r_{n-1}(0)$ и (уравнений) для входящих в него слагаемых, содержащих неизвестные значения $r_{n-2}(0), \ldots, r_1(0)$. Их вывод начнем с уравнения (4), решение которого (методом вариации постоянной) имеет вид:

$$r_j(x) = e^{-j\mu x} r_j(0) + (j+1)\mu e^{-j\mu x} \int\limits_0^x e^{j\mu u} r_{j+1}(u)\, du, \ \ 0 \le j \le n-2\,. \qquad (14)$$

Использование в граничных условиях (7) этого представления для функций r_j затруднительно ввиду наличия интеграла во втором слагаемом в правой части (14). Преодолеть эту трудность можно, например, путем следующих построений. Пусть последовательность положительных при $x \ge 0$ функций $\{d_k(x),\ k \ge 1\}$ такова, что

$$d_1(x) = \frac{1}{\mu}\left(1 - e^{-\mu x}\right);\ \ d_k(x) = \int\limits_0^x \mu e^{-\mu u} d_{k-1}(u)\, du, \ \ k \ge 2\,.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что общий член этой последовательности равен[1]

$$d_k(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{k-i-1}}{(k-i)!}\, d_i(x) + \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\, \frac{1-e^{-k\mu x}}{\mu}\,, \ \ k \ge 1\,.$$

Положим $d_0(x) \equiv 1$. Тогда при $1 \le j \le n-2$ для интеграла $\int_0^x e^{j\mu u} r_{j+1}(u)\, du$, с учетом найденного в (10) и (14) явного вида функций r_j, имеет место следующее представление:

$$\int\limits_0^x e^{j\mu u} r_{j+1}(u)\, du = \\ = e^{-(n-j)\mu x} \sum_{t=n}^{\infty} r_t(0) \sum_{i=n-j}^{\infty} x^i \Theta_{t,i}^{(j+1)} + \sum_{i=j+1}^{n-1} \frac{i!}{(j+1)!}\, d_{i-j}(x) r_i(0)\,, \qquad (15)$$

где коэффициенты $\Theta_{t,i}^{(j+1)}$ вычисляются рекуррентным образом (начиная с $j = n-2$) по формуле

[1]Напомним, что всюду для сокращения записи используется соглашение $\sum_{i=0}^{-1} = 0$.

$$\Theta_{t,i}^{(j+1)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=n}^{t}\sum\limits_{k=1}^{i-1}\sum\limits_{s=0}^{\min(i-2,t-j)} Q_{j-n}\dfrac{s!n2^{i-k}\mu^{i-s-1}}{i!(t-j)!}\,B_{t-j,s}, & j=n-2\,;\\ \sum\limits_{k=n-j-1}^{i-1}\Theta_{t,k}^{(j+2)}\dfrac{k!(j+2)\mu((n-j)\mu)^{i-k-1}}{i!}\,, & 0\le j\le n-3\,. \end{cases}$$

Воспользуемся теперь граничными условиями (7) при $1 \le j \le n-1$. Подставляя в них выражение для $r_{j-1}(x)$ с учетом (15) и вводя обозначение[1]

$$\delta_{ij} = \int\limits_0^\infty e^{-j\mu x}\mu d_{i-j}(x)\,dA(x),$$

получаем дополнительные $n-1$ соотношений между $\{r_j(0),\ j\ge 0\}$:

$$r_j(0) = j\mu\sum_{t=n}^{\infty} r_t(0)\sum_{i=n-j+1}^{\infty}(-1)^i\alpha^{(i)}(n\mu)\Theta_{t,i}^{(j)} + \sum_{i=j-1}^{n-1}\frac{i!\delta_{i,j-1}}{(j-1)!}\,r_i(0),\\ 1\le j\le n-1\,. \quad (16)$$

Перейдем к решению системы уравнений (11), (13), (16). Для начала заметим, что поскольку $A(+0)=0$, то $r_j(0)/\sum_{j=1}^\infty r_j(0)$, $j\ge 1$, — суть стационарные вероятности[2] вложенной цепи Маркова по моментам (сразу после) поступления заявки в систему. Отсюда следует, что ряд $\sum_{j=1}^\infty r_j(0)$ сходится.

Пусть ρ — решение уравнения $\rho = \sum_{k=0}^\infty \beta_{n,k}(\mu)\rho^k$; такое ρ существует, единственно и $\rho\in(0,1)$. Положим $r_j(0) = r_n(0)\rho^{j-n}$. Тогда вместо бесконечной системы (11), (13), (16) для $\{r_j(0),\ j\ge 0\}$ имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений для $\{r_j(0),\ 0\le j\le n\}$:

$$r_j(0) = \alpha((j-1)\mu)r_{j-1}(0) + \sum_{i=j}^{n-1}\frac{i!\delta_{i,j-1}}{(j-1)!}\,r_i(0) + \gamma_j r_n(0),\ \ 1\le j\le n\,, \quad (17)$$

[1]Отметим, что константы δ_{ij} могут быть рассчитаны рекуррентно (при фиксированном j последовательно по i) по формуле:

$$\delta_{ij} = \sum_{m=1}^{i-j-1}\frac{(-1)^{i-j-m-1}}{(i-j-m)!}\,\delta_{m+j,j} + \frac{(-1)^{i-j-1}}{(i-j)!}\,(\alpha(j\mu)-\alpha(i\mu))\,.$$

[2]Которые существуют при выполнении условия, приведенного в конце разд. 2.

где

$$\gamma_j = \begin{cases} j\mu \sum\limits_{t=n}^{\infty} \rho^{t-n} \sum\limits_{i=n-j+1}^{\infty} (-1)^i \alpha^{(i)}(n\mu)\Theta_{t,i}^{(j)}, & 1 \le j \le n-1\,; \\ \sum\limits_{k=n}^{\infty} \gamma_{n,k}(\mu)\rho^{k-n}, & j = n\,. \end{cases}$$

Как обычно, к такой системе уравнений необходимо добавить условие нормировки, которое имеет вид:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} r_j(u)(1-A(u))\,du = 1\,.$$

После некоторых простых, но утомительных преобразований его можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} r_0(0)\mathsf{E}A &+ \sum_{i=1}^{n-1} r_i(0) \sum_{j=0}^{i} \frac{i!\mu}{j!} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-j\mu x}(1-A(x))d_{i-j}(x)\,dx + \\ &+ r_n(0) \sum_{l=n}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=n-j}^{\infty} \frac{k!(j+1)\mu\Theta_{l,k}^{(j+1)}\rho^{l-n}}{(n\mu)^{k+1}} \left(1 - \sum_{i=0}^{k} \frac{(-n\mu)^i}{i!}\alpha^{(i)}(n\mu) \right) + \right. \\ &\quad + \sum_{j=n}^{l} \sum_{k=0}^{l-j} \frac{k!B_{l-j,k}\rho^{l-n}}{(n\mu)^{k+1}(l-j)!} \left\{ 1 - \frac{n^{k+2}\alpha((n-1)\mu)-n}{n-1} Q_{j-n} + \right. \\ &\qquad \left. \left. + \sum_{i=0}^{k} \frac{(-n\mu)^i}{i!}\alpha^{(i)}(n\mu) \left(\frac{n^{k-i+2}-n}{n-1} Q_{j-n} - 1 \right) \right\} \right] = 1\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Решение системы (17), (18) уже не связано с принципиальными трудностями и может быть получено многими способами: например, хороший результат дает метод исключения состояний (см. [13, разд. 2] и [7, 14]). После расчета $\{r_j(0),\ 0 \le j \le n\}$ и определения остальных значений $\{r_j(0),\ j \ge n+1\}$ по формуле $r_j(0) = r_n(0)\rho^{j-n}$, вычисляются функции $r_j(x)$ по формулам (10), (12), (14), совпадающие со стационарными плотностями $p_j(x)$ с точностью до множителя $(1-A(x))$.

4 Заключение

В том случае, когда $A(x)$ является функцией распределения марковского типа, целесообразнее перейти (с заменой непрерывного аргумента на дискретный) к известным матричным методам анализа марковских систем обслуживания [15]. Если же емкость очереди ограничена, то вычисления несколько упрощаются: отпадает необходимость суммировать ряды с бесконечным числом слагаемых и плотности $p_j(x)$ могут быть вычислены рекуррентным образом.

Скажем несколько слов и о расчете нестационарного распределения $p_j(t,x)$. Даже в простейшем случае, когда $n=1$, изложенные в статье результаты не позволяют продвинуться далеко. Будем считать, что в момент начала функционирования ($t=0$) система пуста. С учетом этого начальные условия для системы (1)—(3) выберем следующим образом:

$$p_0(0,x) = \frac{1-A(x)}{\mathsf{E}A}\,; \;\; p_j(0,x)=0\,, \;\; j \geq 1\,, \;\; x \geq 0\,.$$

Тогда, применяя к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (1)—(3) двойное ПЛ (по t и по x), с учетом обозначения

$$\varrho_j(v,x) = \int\limits_0^\infty e^{-vx} r_j(t,x)\,dt$$

приходим к системе уравнений, которую можно решить, следуя по изложенному в предыдущем разделе пути. Проделав это и произведя обратное по s преобразование, находим

$$\varrho_0(v,x) = \frac{1}{v\,\mathsf{E}A}\left(1-e^{-vx}\right) + e^{-vx}\varrho_0(v,0) + \mu e^{-vx}\sum_{m=1}^\infty Q_{m-1}\int\limits_0^x e^{vu}\varrho_m(v,u)\,du\,;$$

$$\varrho_j(v,x) = e^{-(v+\mu)x}\varrho_j(v,0) + e^{-(v+\mu)x}\sum_{m=j+1}^\infty \varrho_j(v,0)\sum_{i=1}^{m-j}\frac{B_{m-j,i}}{(m-j)!}\,x^i\,, \;\; j \geq 1\,.$$

Однако в этих соотношениях неизвестны значения функций ϱ_j в точке $(v,0)$; они (как выше значения $r_j(0)$) могут быть найдены путем решения системы уравнений:

$$\varrho_1(v,0) = \frac{1}{v\,\mathsf{E}A}(1-\alpha(v)) + \alpha(v)\varrho_0(v,0) + \sum_{m=1}^\infty \gamma_{1,m}(v+\mu)\varrho_m(v,0)\,;$$

$$\varrho_j(v,0) = \sum_{k=0}^\infty \beta_{1,k}(v+\mu)\varrho_{j+k-1}(v,0), \;\; j \geq 2\,,$$

с условием

$$\sum_{j=0}^\infty \int\limits_0^\infty \varrho_j(v,u)(1-A(u))\,du = v^{-1}.$$

Однако такой результат трудно использовать на практике. Действительно, например, для расчета среднего числа заявок в системе в некоторый один момент времени необходимо обратить (воспользовавшись известными методами, см., например, [16, 17]) выражение

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \int_{0}^{\infty} \varrho_j(v,u)(1-A(u))\,du\,,$$

что потребует[1] многократного решения приведенной выше системы уравнений.

Несомненный интерес в плане дальнейших исследований представляют два вопроса. Первый — это существование функциональной зависимости вероятностей q_l от прошедшего времени обслуживания, которая позволила бы решить систему (1)—(3) (хотя бы в стационарном случае), следуя либо по намеченному выше пути, либо по какому-то другому. Второй вопрос — это разработка эффективных методов расчета нестационарного распределения $p_j(t,x)$.

Литература

1. *Бочаров П. П., Зарядов И. С.* Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика, 2007. № 1-2. С. 14–23.
2. *Зарядов И. С.* Стационарные характеристики обслуживания в системе $G/M/n/r$ с обобщенным обновлением // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика, 2008. № 2. С. 3–9.
3. *Зарядов И. С.* Стационарные временные характеристики системы $G/M/n/r$ с некоторыми вариантами дисциплины обобщённого обновления // Информационные процессы, 2008. Т. 8. № 2. С. 108–124.
4. *Зарядов И. С.* Система массового обслуживания $GI/M/n/\infty$ с обобщенным обновлением // Автоматика и телемеханика, 2010. № 4. С. 130–139.
5. *Konovalov M., Razumchik R.* Comparison of two active queue management schemes through the $M/D/1/N$ queue // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 4. С. 9–15. doi: 10.14357/19922264180402.
6. *Chydzinski A., Chrost L.* Analysis of AQM queues with queue size based packet dropping // Int. J. Appl. Math. Comp., 2011. Vol. 21. Iss. 3. P. 567–577. doi: 10.2478/v10006-011-0045-7.
7. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. 529 с.
8. *Henrici P.* Applied and computational complex analysis. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1974. Vol. 1. 682 p.
9. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963. 288 с. (*Riordan J.* An introduction to combinatorial analysis. — 2nd ed. — Wiley publication in mathematical statistics ser. — Wiley, 1958. 244 p.)

[1]Помимо преодоления возможных технических сложностей с выбором весов и узлов.

10. *Маричев О. И., Славянов С. Ю., Брычков Ю. А.* Полиномы Белла в системе Mathematica и асимптотические решения интегральных уравнений // Теоретическая и математическая физика, 2019. Т. 201. № 3. С. 446–456.
11. *Cvijovic D.* New identities for the partial Bell polynomials // Appl. Math. Lett., 2011. Vol. 24. P. 1544–1547. doi: 10.1016/j.aml.2011.03.043.
12. *Qi F., Niu D.-W., Lim D., Yao Y.-H.* Special values of the Bell polynomials of the second kind for some sequences and functions // J. Math. Anal. Appl., 2020. Vol. 491. Iss. 2. Art. 124382. 31 p. doi: 10.1016/j.jmaa.2020.124382.
13. *Бочаров П. П., Д'Апиче Ч., Печинкин А. В., Салерно С.* Стационарные характеристики системы массового обслуживания G/MSP/1/r // Автоматика и телемеханика, 2003. № 2. С. 127–142.
14. *Печинкин А. В., Разумчик Р. В.* Системы массового обслуживания в дискретном времени. — М.: Физматлит, 2018. 432 с.
15. *Вишневский В. М., Дудин А. Н., Клименок В. И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. — М.: Техносфера, 2018. 564 с.
16. *Abate J., Whitt W.* A unified framework for numerically inverting Laplace transforms // INFORMS J. Comput., 2006. Vol. 18. Iss. 4. P. 408–421. doi: 10.1287/ijoc.1050.0137.
17. *Horvath I., Horvath G., Almousa S. A.-D., Telek M.* Numerical inverse Laplace transformation using concentrated matrix exponential distributions // Performance Evaluation, 2019. Vol. 137. Art. 102067. 30 p. doi: 10.1016/j.peva.2019.102067.

Поступила в редакцию 15.08.21

JOINT STATIONARY DISTRIBUTION IN THE GI$/M/n/\infty$ QUEUE WITH GENERAL RENOVATION

***T. A. Milovanova*[1], *I. S. Zaryadov*[1,2], *and L. A. Meykhanadzhyan*[3]**

[1]Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation
[2]Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation
[3]Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prosp., Moscow 125993, Russian Federation

Abstract: Multiserver queuing system with a finite number of identical servers and one queue of unlimited capacity is being considered. Customers enter the system one by one in accordance with a recurrent flow. Service times are exponentially distributed with the same parameter. General renovation mechanism is implemented in the system: a customer, whose service has been completed, upon leaving the system removes a random number of other customers from the queue according to a given probability distribution. The method is proposed for finding the joint stationary distribution of the total number of customers in the system and the time elapsed since the last arrival. Expressions (in terms of transforms) for the calculation of the transient joint distribution are presented.

Keywords: queueing system; general renovation; queue management

DOI: 10.14357/08696527210301

Acknowledgments

The reported study was funded by RFBR, projects Nos. 19-07-00739 and 20-07-00804.

References

1. Bocharov, P. P., and I. S. Zaryadov. 2007. Statsionarnoe raspredelenie veroyatnostey v sistemakh massovogo obsluzhivaniya s obnovleniem [Queueing systems with renovation. Stationary probability distribution]. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika. Informatika. Fizika* [Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Mathematics. Information Sciences. Physics] 1-2:14–23.
2. Zaryadov, I. S. 2008. Statsionarnye kharakteristiki obsluzhivaniya v sisteme $G/M/n/r$ s obobshchennym obnovleniem [Queueing system $G/M/n/r$ with general renovation. Stationary characteristics]. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika. Informatika. Fizika* [Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Mathematics. Information Sciences. Physics] 2:3–9.
3. Zaryadov, I. S. 2008. Statsionarnye vremennye kharakteristiki sistemy $G/M/n/r$ s nekotorymi variantami distsipliny obobshchonnogo obnovleniya [Stationary temporal characteristics of the $G/M/n/r$ system with some variations of the generalized renovation discipline]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 8(2):108–124.
4. Zaryadov, I. S. 2010. The GI$/M/n/\infty$ queuing system with generalized renovation. *Automat. Rem. Contr.* 71(4): 663–671. doi: 10.1134/S0005117910040077.
5. Konovalov, M., and R. Razumchik. 2018. Comparison of two active queue management schemes through the $M/D/1/N$ queue. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(4): 9–15. doi: 10.14357/19922264180402.
6. Chydzinski, A., and L. Chrost. 2011. Analysis of AQM queues with queue size based packet dropping. *Int. J. Appl. Math. Comp.* 21(3):567–577. doi: 10.2478/v10006-011-0045-7.
7. Bocharov, P. P., and A. V. Pechinkin. 1995. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: RUDN. 529 p.
8. Henrici, P. 1974. *Applied and computational complex analysis.* New York, NY: John Wiley & Sons. Vol. 1. 682 p.
9. Riordan, J. 1958. *An introduction to combinatorial analysis*. 2nd ed. Wiley publication in mathematical statistics ser. Wiley. 244 p.
10. Marichev, O. I., S. Yu. Slavyanov, and Yu. A. Brychkov. 2019. Bell Polynomials in the Mathematica system and asymptotic solutions of integral equations. *Theor. Math. Phys.* 201(3):1798–1807.

11. Cvijovic, D. 2011. New identities for the partial Bell polynomials. *Appl. Math. Lett.* 24:1544–1547. doi: 10.1016/j.aml.2011.03.043.
12. Qi, F., D.-W. Niu, Lim D., and Y.-H. Yao. 2020. Special values of the Bell polynomials of the second kind for some sequences and functions. *J. Math. Anal. Appl.* 491(2):124382. 31 p. doi: 10.1016/j.jmaa.2020.124382.
13. Bocharov, P. P., C. D'Apice, A. V. Pechinkin, and S. Salerno. 2003. The stationary characteristics of the G/MSP/1/r queueing system. *Automat. Rem. Contr.* 64(2):288–301. doi: 10.1023/A:1022219232282.
14. Pechinkin, A. V., and R. V. Razumchik. 2018. *Sistemy massovogo obsluzhivaniya v diskretnom vremeni* [Discrete time queuing systems]. Moscow: Fizmatlit. 432 p.
15. Vishnevskii, V. M., A. N. Dudin, and V. I. Klimenok. 2018. *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primenenie v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic systems with correlated streams. Theory and applications in telecommunication networks]. Moscow: Tekhnosfera. 564 p.
16. Abate, J., and W. Whitt. 2006. A unified framework for numerically inverting Laplace transforms. *INFORMS J. Comput.* 18(4):408–421. doi: 10.1287/ijoc.1050.0137.
17. Horvath, I., G. Horvath, S. A.-D. Almousa, and M. Telek. 2019. Numerical inverse Laplace transformation using concentrated matrix exponential distributions. *Performance Evaluation* 137:102067. 30 p. doi: 10.1016/j.peva.2019.102067.

Received August 15, 2021

Contributors

Milovanova Tatiana A. (b. 1977) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; tmilovanova77@mail.ru

Zaryadov Ivan S. (b. 1981) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Informatics and Probability Theory, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; izaryadov@sci.pfu.edu.ru

Meykhanadzhyan Lusine A. (b. 1990) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Data Analysis and Machine Learning, Financial University under the Government of the Russian Federation, 49 Leningradsky Prosp., Moscow 125993, Russian Federation; lamejkhanadzhyan@fa.ru