Н. Н. Ляшенко, Слабая сходимость ступенчатых процессов в пространстве замкнутых множеств, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 130, 122–129

Н.Н.Ляшенко

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ СТУПЕНЧАТЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

В настоящей работе описывается подход к изучению асимптотического поведения последовательностей случайных процессов, основанный на трактовке траекторий как случайных множеств на плоскости. Отличие такой точки зрения от традиционного функционального подхода можно пояснить с помощью двух простых примеров.

Последовательность функций $(\sin nx)$ на промежутке $[0;1]$ не сходится ни в каком из общепринятых смыслов, однако последовательность соответствующих графиков все плотнее зачерчивает прямоугольник $[0;1]\times[-1;1]$. Последовательность функций (nx) на $[-1;1]$ также не сходится, однако графики ее членов все "ближе" примыкают к прямой $x=0$. Опираясь на интуицию, хочется сказать, что первая последовательность стремится к прямоугольнику, а вторая – к вертикальной прямой. Этим утверждениям можно придать строгий смысл, если рассматривать графики как элементы пространства замкнутых множеств плоскости или полосы $\mathbb{E}=[a;b]\times\mathbb{R}$.

Пусть $\mathcal{G}$ – множество открытых, $\mathcal{F}$ – множество замкнутых, а $\mathcal{K}$ – множество компактных подмножеств $\mathbb{E}$ (топология индуцирована на $\mathbb{E}$ евклидовой топологией плоскости); σ_E борелевская σ-алгебра в $\mathbb{E}$. Введем обозначения:

$$\mathcal{F}^B=\{F\mid F\in\mathcal{F}\ \&\ F\cap B=\emptyset\};$$

$$\mathcal{F}_B=\{F\mid F\in\mathcal{F}\ \&\ F\cap B\neq\emptyset\}$$ Очевидно, что $\mathcal{F}_B=\mathcal{F}\setminus\mathcal{F}^B$.

Определим топологию $J_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}$ как наименьшую, содержащую множества вида $\mathcal{F}^K$, $\mathcal{F}_G$, где $K\in\mathcal{K}$, а $G\in\mathcal{G}$. В результате получим топологическое пространство замкнутых множеств. Оно является компактным, хаусдорфовым и сепарабельным (см. [I], с.24). Нам понадобится следующий критерий сходимости в $\mathcal{F}$.

Последовательность (F_n) сходится в $\mathcal{F}$ к пределу F тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

а) если $G\in\mathcal{G}$ и $G\cap F\neq\emptyset$, то начиная с некоторого номера, $F_n\cap G\neq\emptyset$.

б) если $K\in\mathcal{K}$ и $K\cap F=\emptyset$, то начиная с некоторого номера, $F_n\cap K=\emptyset$ (см. [I], с.26, 27).

Рассматривая борелевскую σ-алгебру $\sigma_{\mathcal{F}}$, определяемую топологией $J_{\mathcal{F}}$, будем называть замкнутыми случайными множествами отображения произвольного вероятностного пространства в $\mathcal{F}$, измеримые по Борелю относительно σ-алгебры событий.

Введем последовательность (α_n) $(n=0,1,2,\ldots)$ одинаково распределенных независимых случайных величин. Распределение α_i обозначим через S, а функцию распределения – через H. Определим случайную функцию ξ на $[0;+\infty[$ следующим образом: $\xi(t)=\alpha_{[t]}$. Положим для $t\in[0;1]$ $\xi_n(t)=b_n\,\xi(nt)$, где $n\in N$, (b_n) – строго возрастающая, стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел. С помощью ξ_n определим последовательность случайных подмножеств $\mathbb{E}$ (полагая $a=0$, $b=1$): $A_n=\overline{\xi}_n$ (функцию мы отождествляем с ее графиком, $\overline{\xi}_n$ – замыкание графика ξ_n). Легко видеть, что A_n удовлетворяет определению замкнутого случайного множества (ЗСМ).

Известно, что распределение ЗСМ A полностью определяется так называемым сопровождающим функционалом, сопоставляющим каждому $K\in\mathcal{K}$ величину $T_A(K)=P(A\cap K\neq\emptyset)$ (см. [I], с.53, 56). Этот функционал может быть продолжен до емкости на множество всех подмножеств $\mathbb{E}$. Во многих рассмотрениях удобен также функционал

$$Q_A(K)=1-T_A(K)=P(A\cap K=\emptyset).$$

Наша задача состоит в отыскании условий, при которых последовательность распределений $\mathcal{P}_n$ ЗСМ A_n слабо сходится к некоторому предельному распределению. В частности, мы будем интересоваться условиями сходимости к невырожденному распределению, а также более сильными условиями сходимости к распределению без фиксированных точек ($x\in\mathbb{E}$ называется фиксированной точкой ЗСМ A, если $P(x\in A)=1$, см. [I], с.84). Кроме этого, в нашу задачу входит описание класса предельных распределений.

Понятие слабой сходимости вводится здесь естественным образом: как сходимость $\mathcal{P}_n(M)\to\mathcal{P}(M)$ на всех $M\in\sigma_{\mathcal{F}}$, удовлетворяющих условию $\mathcal{P}(\partial M)=0$. Слабую сходимость будем обозначать знаком $\Rightarrow$.

Для решения поставленных задач нам понадобятся некоторые вспомогательные факты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Обозначим через $\mathcal{B}(L)$ класс открытых прямоугольников $]a,b[\times]c,d[\subset\mathbb{E}$, где $(a,b),(c,d)\in L$, а L – счетное всюду плотное подмножество R^2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через $\mathcal{T}$ класс множеств вида

$$\mathcal{F}^{\overline{B}'_1\cup\ldots\cup\overline{B}'_k}_{B_1,\ldots,B_n},$$

где $n,k\in Z_0^+$; $B_i, B_i'\in\mathcal{B}(L)$(см. определение I).

ЛЕММА I. $\mathcal{T}$ является счетной базой топологии $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [I] , с. 24.

ЛЕММА 2. Если $\mathcal{P}_n(M)\to\mathcal{P}(M)$ для всех $M\in\mathcal{T}$, то $\mathcal{P}_n\Rightarrow\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к ссылке на теорему 2.2 из книги [2] (с. 25) и лемму I.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через $\mathcal{L}(L)$ класс множеств вида

$$B_1\cup\ldots\cup B_s\cup\overline{B}_{s+1}\cup\ldots\cup\overline{B}_m;$$

где $s,\ m\in Z_0^+$, $B_j\in\mathcal{B}(L)$.

Обозначим через Q функционал, определяющий распределение $\mathcal{P}$, а через Q_n - функционал, определяющий распределение $\mathcal{P}_n$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{P}_n(\mathcal{F}_V)\to\mathcal{P}(\mathcal{F}_V)$ для всех $V\in\mathcal{L}(L)$. Тогда $\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}$ на $\mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_j,\ B_j'\in\mathcal{B}(L)$; $n,k\in Z_0^+$;

$$Y=\mathcal{F}^{\overline{B}_1'\cup\ldots\cup\overline{B}_k'}_{B_1,\ldots,B_n};\qquad M=\overline{B}_1'\cup\ldots\cup\overline{B}_k';$$

тогда

$$\mathcal{P}(Y)=\sum_{I\subset\Delta_n}Q(M\cup(\bigcup_{i\in I}B_i))(-1)^{\operatorname{card}I};$$

где $\Delta_n=\{1,\ldots,n\}$. Аналогичная формула связывает $\mathcal{P}_n$ и Q_n. (См. [I] , с.58). Под знаком Q_n стоят множества из класса $\mathcal{L}(L)$, поэтому каждое слагаемое сходится к соответствующему значению Q и, значит, $\mathcal{P}_n(Y)\to\mathcal{P}(Y)$.

ТЕОРЕМА I. Если $\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}$ на множествах вида $\mathcal{F}_M$ ($M\in\in\mathcal{L}(L)$) , то $\mathcal{P}_n\Rightarrow\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 2 и 3.

ЛЕММА 4. Если $an,\ bn\in Z$; $M\in\sigma_R$; $\Pi_1=[a,b]\times\times M$; $\Pi_2=]a,b[\times M$; то

$$Q_n(\Pi_1)=(1-S(b_n^{-1}M))^{n(b-a)+2};\ Q_n(\Pi_2)=(1-S(b_n^{-1}M))^{n(b-a)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение Q_n и независимость случайных величин α_j , получаем:

$$Q_n(\Pi_1)=P(A_n\cap\Pi_1=\varnothing)=P(\xi_n(a-\tfrac{1}{n})\notin M\ \&\ldots\&\ \xi_n(b)\notin M)=$$
$$=P(\alpha_{na-1}\notin b_n^{-1}M\ \&\ldots\&\ \alpha_{bn}\notin b_n^{-1}M)=(1-S(b_n^{-1}M))^{nb-na+2}.$$

Второе утверждение доказывается аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть Y – промежуток произвольного вида с концами a, b. Положим

$$Y_n^+ = \left[\frac{[na]}{n}, \frac{[nb]+1}{n} \right]; \quad Y_n^- = \left] \frac{[na]+1}{n}, \frac{[nb]}{n} \right[.$$

ЛЕММА 5. Пусть Π_1 и Π_2 определяются, как в лемме 4,

$$h_n = S(b_n^{-1} M); \quad \Pi_n^+ = [a, b]_n^+ \times M; \quad \Pi_n^- =]a, b[_n^- \times M.$$

Тогда верны следующие утверждения:

а) $\Pi_n^- \subset \Pi_2 \subset \Pi_1 \subset \Pi_n^+$;

б) $Q_n(\Pi_n^+) \leq Q_n(\Pi_1) \leq Q_n(\Pi_2) \leq Q_n(\Pi_n^-)$;

в) $(1-h_n)^{[nb]-[na]+3} \leq Q_n(\Pi_1) \leq Q_n(\Pi_2) \leq (1-h_n)^{[nb]-[na]-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) вытекает из включений $Y_n^- \subset Y \subset Y_n^+$, справедливых для промежутков по определению 4; б) следует из а) и убывания функционала Q_n. Наконец, подставляя в б) значения $Q_n(\Pi_n^{\pm})$ из леммы 4, получаем в).

Уже использованная нами техника позволяет доказать следующее утверждение:

ЛЕММА 6. Пусть $\Pi = \bigcup_{j=1}^{m} \langle a_j, b_j \rangle \times \langle c_j, d_j \rangle$, $\mathcal{D} = [u, v]$, $u < v$, $pr_Y \Pi \subset \mathcal{D}$. Если S – невырожденное распределение, то для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ и всех достаточно больших n

$$\prod_{j=1}^{s} Q_n(\Pi_j)(1 - S(b_n^{-1}\mathcal{D}))^{2(s-1)} \leq Q_n(\Pi) \leq \prod_{j=1}^{s} Q_n(\Pi_j)(1 - S(b_n^{-1}\mathcal{D}))^{-4(s-1)};$$

$$\Pi_j = \langle u_j, v_j \rangle \times M_j.$$

ЛЕММА 7. Пусть $K \in \mathcal{K}$, тогда $\overline{\mathcal{F}^K} = \mathcal{F}^{\mathring{K}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из критерия сходимости в пространстве $\mathcal{F}(E)$.

ЛЕММА 8. $\partial_{\mathcal{F}} \mathcal{F}^K = \mathcal{F}_K^{\mathring{K}}$ $(K \in \mathcal{K})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathcal{F}^K$ – открытое множество в $\mathcal{F}$. Поэтому $\partial_{\mathcal{F}} \mathcal{F}^K = \overline{\mathcal{F}^K} \setminus \mathcal{F}^K$. Используя лемму 7, получаем: $\partial_{\mathcal{F}} \mathcal{F}^K = \mathcal{F}^{\mathring{K}} \cap \mathcal{F}_K = \mathcal{F}_K^{\mathring{K}}$.

ЛЕММА 9. Пусть T – сопровождающий функционал замкнутого случайного множества A. Для того чтобы A было вырождено (то есть существовало $F \in \mathcal{F}$ со свойством $P(A=F) = 1$) необходимо и достаточно, чтобы для любого $B \in \mathcal{B}(L)$ $T(\bar{B}) \in \{0; 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если $A = F$ п.н., то $\mathcal{K}$ можно разбить на две части:

$$\mathcal{K}^F = \{K \mid K \in \mathcal{K} \,\&\, K \cap F = \emptyset\}; \quad \mathcal{K}_F = \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}^F.$$

Если $K \in \mathcal{K}^F$, то п.н. $A \cap K = \emptyset$ и $T(K) = 0$. Если же $K \in \mathcal{K}_F$, то п.н. $A\cap K\neq\emptyset$ и $T(K)=1$.

Достаточность. Предположим выполнение условия леммы. Если $G\in\mathcal{G}$, то $G=\bigcup_n K_n$, где $K_n=\overline{B_n}\in\mathcal{K}$, $B_n\in\mathcal{B}(L)$. Вследствие полунепрерывности T снизу $T(G)\in\{0;1\}$. Отсюда полагая $Y=\bigcup_{i\in I}G_i$ где $\{G_i\mid i\in N\}$ – счетное множество фундаментальных окрестностей в E из $\mathcal{B}(L)$, а $I=\{i\mid T(G_i)=0\}$, получаем, что $T(Y)=0$, и, следовательно, п.н. $A\subset Y^c$.

Покажем, что $A=Y^c$ п.н. Действительно, по построению $Y^c\in\mathcal{F}$. Рассмотрим фундаментальную окрестность $\mathcal{F}^M_{B_1,\dots,B_k}$ из леммы I, содержащую Y^c. Тогда $M\subset Y$ и $\mathcal{P}(\mathcal{F}^M)\geqslant\mathcal{P}(\mathcal{F}^Y)=1-T(Y)=1$.

B_j являются объединениями G_ℓ, причем не для всех ℓ $T(G_\ell)=0$. Так или иначе $B_j\subset Y$. Отсюда $\mathcal{P}(\mathcal{F}_{B_j})=T(B_j)=1$. В итоге $\mathcal{P}(\mathcal{F}^M_{B_1,\dots,B_k})=1$ и, значит, $\mathcal{P}(\{Y^c\})=1$.

Перейдем к доказательству первого результата о слабой сходимости распределений $\mathcal{P}_n$ замкнутых случайных множеств A_n к невырожденному распределению.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы $(\mathcal{P}_n)$ слабо сходилась к невырожденному распределению, необходимо и достаточно выполнения условий:

а) существует такое всюду плотное в $R\times R$ множество L, что для любой пары $(x,y)\in L$

$$\lim_n n\,S\left(b_n^{-1}[x,y]\right)=\nu([x,y])\in[0,+\infty],$$

где ν – мера на σ_R;

б) существует пара $(x,y)\in L$, для которой $0<\nu([x,y])<+\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathcal{P}_n\Rightarrow\mathcal{P}$, причем $\mathcal{P}$ не вырождено. Рассмотрим прямоугольник $\Pi_\beta=[a+\beta,b-\beta]\times[c+\beta,d-\beta]$, где β таково, что $\mathring{\Pi}_\beta\neq\emptyset$.

В силу монотонности функции $f(\beta)=Q(\Pi_\beta)$ существуют сколь угодно малые β, в которых f непрерывна. Если β – точка непрерывности, то $Q(\mathring{\Pi}_\beta)=f(\beta)=Q(\Pi_\beta)$, поэтому $\mathcal{P}(\partial\mathcal{F}^{\Pi_\beta})=$ $=Q(\mathring{\Pi}_\beta)-Q(\Pi_\beta)=0$ по лемме 8, то есть $\mathcal{F}^{\Pi_\beta}$ – множество непрерывности. В силу слабой сходимости

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{F}^{\Pi_\beta})\to\mathcal{P}(\mathcal{F}^{\Pi_\beta})\qquad\text{или } Q_n(\Pi_\beta)\to Q(\Pi_\beta).$$

Положим $\Pi_\beta=[\bar a,\bar b]\times[\bar c,\bar d]$. По лемме 5

$$(1-h_n)^{[n\bar b]-[n\bar a]+3}\leqslant Q_n(\Pi_\beta)\leqslant(1-h_n)^{[n\bar b]-[n\bar a]-1}$$

Рассмотрим три случая.

I. Пусть $\lim_n h_n=0$. Тогда, логарифмируя, получаем:

$$n(\bar b-\bar a)h_n\to-\ln Q(\Pi_\beta)\in[0,+\infty]$$

(здесь $\ln 0 = -\infty$), то есть существует $\lim\limits_n n h_n$ в R_+. Обозначим его $\nu([\bar{c},\bar{d}])$. При этом

$$Q(\Pi_\beta) = \exp\left(-(\bar{b}-\bar{a})\nu([\bar{c},\bar{d}])\right).$$

2. Пусть для достаточно больших n $h_n \geqslant \delta > 0$. Тогда $Q(\Pi_\beta) = 0$ и $n h_n \to +\infty$, то есть

$$\lim_n n h_n = \exp\left(-(\bar{b}-\bar{a})\nu([\bar{c},\bar{d}])\right), \tag{I}$$

где $\nu([\bar{c},\bar{d}]) = +\infty$.

3. Пусть $(h_{n_k}) \to 0$, но $(h_n) \not\to 0$. Тогда $n h_n \to +\infty$ и $Q_n(\Pi_\beta) \to 0$, откуда следует (I).

Легко видеть, что множество пар (x,y), для которых существует $\lim n S(b_n^{-1}[x,y])$, всюду плотно в $R\times R$; более того, всюду плотным является множество пар L, для которых существует $\lim n S(b_n^{-1}\langle x,y\rangle)$ ($\langle x,y\rangle$ - промежуток произвольного вида). При этом сопровождающий функционал предельного распределения принимает на $\Pi = [a,b]\times\langle c,d\rangle$ $(a<b, (c,d)\in L)$ значения

$$T(\Pi) = 1 - \exp\left(-(b-a)\nu(\langle c,d\rangle)\right).$$

Среди пар множества L найдется такая, что $0<\nu([x,y])<+\infty$, так как иначе по лемме 9 $\mathfrak{P}$ вырождено. Для завершения доказательства необходимости остается отметить, что ν стандартным образом продолжима на σ_R до меры.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. С помощью меры из п.п. а) и б) формулировки теоремы построим функционал [I)]

$$Q(K) = \exp\left(-(mes_1 \otimes \nu)(K)\right), \quad K \in \mathcal{K}.$$

Легко видеть, что $1-Q$ - сопровождающий функционал некоторого распределения на $\sigma_{\mathfrak{F}}$ (см.[I] ,с.56). Так как существует $(x,y)\in L$ со свойством $0<\nu([x,y])<+\infty$, то $T([0,1]\times[x,y]) \notin \{0;1\}$ и по лемме 9 $\mathfrak{P}$ не вырождено.

Покажем, что $\mathfrak{P}_n \Rightarrow \mathfrak{P}$. Очевидно, S не вырождено, так как в противном случае не выполняется условие б). Поэтому применима лемма 6. Для достаточно больших n $S(b_n^{-1}\mathfrak{D})<1$, поэтому неравенство леммы 6 можно прологарифмировать. Оценивая $Q_n(\Pi_j)$ с помощью леммы 5 и пользуясь условием а), получаем, что для любого $M\in\mathfrak{B}(L)$ $Q_n(M)$ стремится к $Q(M)$ и по теореме I $\mathfrak{P}_n \Rightarrow \mathfrak{P}$.

I) Здесь и далее mes_k означает k -мерную меру Лебега.

Из доказательства теоремы 2 видно, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия а), б) теоремы 2, то предельное распределение $\mathcal{P}$ определяется сопровождающим функционалом вида

$$T(K) = 1 - \exp\left(-(mes_1 \otimes \nu)(K)\right),$$

где $K \in \mathcal{K}$, а ν - мера на σ_R.

СЛЕДСТВИЕ.I. Предельные распределения $\mathcal{P}$ из теоремы 2 соответствуют ЗСМ A со свойством:

$$P(\mathrm{card}(A \cap K) = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},$$

где $K \in \mathcal{K}$, $\lambda = (mes_1 \otimes \nu)(\mathcal{K})$. В частности, ЗСМ A является локально конечным, то есть для всякого $K \in \mathcal{K}$

$$P(\mathrm{card}(A \cap K) < \infty) = 1.$$

Рассмотрим частный по отношению к теореме 2 случай, в котором предельное распределение не только не вырождено, но и не имеет фиксированных точек.

ТЕОРЕМА 4. Для того, чтобы $(\mathcal{P}_n)$ слабо сходилась к распределению без фиксированных точек, необходимо и достаточно выполнения условий:

а) существует такое всюду плотное в $R \times R$ множество L, что для любой пары $(x, y) \in L$

$$\lim_n n S(b_n^{-1} \langle x, y \rangle) = \nu(\langle x, y \rangle),$$

где ν - мера на σ_R.

б) существует пара $(x, y) \in L$ такая, что $\nu(]x, y[) > 0$;

в) для любой пары $(x, y) \in L$ $\nu(\langle x, y \rangle) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ - распределение без фиксированных точек. Тогда, в частности, $\mathcal{P}$ не вырождено, откуда по теореме 2 следуют условия а) и б).

Докажем в). Выберем произвольную пару $(x, y) \in L$ и предположим, что $\nu([x, y]) = +\infty$. Очевидно, что Q -функционал предельного распределения имеет вид $Q(K) = \exp(-(mes_1 \otimes \nu)(K))$ (см.теорему 3), поэтому $Q([0,1] \times [x, y]) = 0$. С другой стороны, легко видеть, что предельное случайное множество безгранично делимо относительно объединения (см.[I], с.83)и поскольку оно не имеет фиксированных точек, то по лемме 3.I.I книги I (см.с.84) $Q(K)$ положителен. Итак, $\nu([x, y]) < +\infty$ и тем более $\nu(\langle x, y \rangle) < +\infty$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Предположим, что выполнены условия а), б), в). Из условий б), в) вытекает условие б) теоремы 2, откуда, учитывая а), получаем слабую сходимость $(\mathcal{P}_n)$ к некоторому невырожденному распределению $\mathcal{P}$. Остается показать, что оно не имеет фиксированных точек. Докажем это "от противного".

Пусть t – фиксированная точка $\mathcal{P}$, тогда $T(\{t\})=1$. Найдется пара $(x,y)\in L$ со свойством $x<t<y$. Поскольку

$$t\in\Pi=[0,1]\times[x,y],$$

то $T(\Pi)=1$. По теореме 3 $\nu([x,y])=+\infty$, что противоречит условию в).

ТЕОРЕМА 5. Из условий а) и в) теоремы 4 вытекает, что $S(\{0\})=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x<0<y$ и $(x,y)\in L$, то с одной стороны

$$S(b_n^{-1}[x,y])\to S(\{0\}),$$

а с другой –

$$S(b_n^{-1}[x,y])=\frac{1}{n}\nu([x,y])+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и, следовательно, $S(\{0\})=0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть распределению $\mathcal{P}$ соответствует сопровождающий функционал вида, указанного в теореме 3, Fix – множество фиксированных точек $\mathcal{P}$, $J_\nu=\{y\mid\nu(\{y\})=\infty\}$. Тогда

$$Fix=[0;1]\times J_\nu,$$

причем множества J_ν и Fix замкнуты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из общего вида функционала, рассмотренного в теореме 3, сразу следует, что утверждения $P((x,y)\in A)=1$ и $\nu(\{y\})=+\infty$ эквивалентны. Отсюда $Fix=[0;1]\times J_\nu$. Замкнутость немедленно вытекает из безграничной делимости A относительно объединения и леммы 3.I.I книги [I](с.84).

В заключение приведем пример. Пусть $H^{(k)}(0)=0$ для $k=1,\dots,s-1$ и $H^{(s)}(0)>0$. Тогда условия теоремы 4 выполняются при $b_n=n^{1/s}$, а предельная мера ν задается формулой

$$\nu([x,y[)=H^{(s)}(0)\,(s!)^{-1}\,(|y|^s\operatorname{sign}y-|x|^s\operatorname{sign}x).$$

В частности, при $s=1$ $\mu=H'(0)\,mes_2$

Литература

I. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, I978.

2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, I977.