



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Ульянов, К. Н. Ульянов, Положительный столб электрического разряда
в поперечном магнитном поле, *ТВТ*, 2012, том 50, выпуск 1, 24–32

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

27 марта 2025 г., 07:25:42



УДК 537.52

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ СТОЛБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2012 г. Д. К. Ульянов, К. Н. Ульянов

ФГУП Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина, Москва

Поступила в редакцию 09.12.2010 г.

Изучено влияние поперечного магнитного поля на характеристики плоского положительного столба электрического разряда в диффузионном и недиффузионном приближениях. В диффузионном приближении все решения получены в аналитическом виде. Показано, что при увеличении индукции магнитного поля распределения концентрации плазмы и потоков частиц на изолированные стенки становятся несимметричными, максимум концентрации смещается в сторону действия магнитной силы, поток ионов в направлении этой силы может существенно превышать поток ионов в обратном направлении. Для гелия определены зависимости параметров разряда от значения индукции. Показано, что существует максимальное значение индукции, ограничивающее сверху область магнитных полей, в которых возможно стационарное состояние положительного столба. В разрешенной для стационарного состояния области одному значению индукции соответствуют два различных режима положительного столба, отличающихся значениями энергии электронов, скорости дрейфа и напряженности электрического поля. С помощью поперечного магнитного поля можно изменять энергию электронов в широком диапазоне (от единиц до сотни электронвольт).

ВВЕДЕНИЕ

Электрические разряды в магнитных полях различной конфигурации изучались экспериментально и теоретически. Эти разряды находят широкое практическое применение. Приведем несколько примеров. Хорошо экспериментально изучен и теоретически описан сильноточный вакуумно-дуговой разряд во внешнем магнитном поле, который находит применение в коммутационных аппаратах и технологии [1, 2]. Разработана теория и проведено экспериментальное изучение положительного столба (ПС) разряда низкого давления в аксиальном магнитном поле [3]. Показано, что в таком разряде при увеличении индукции энергия электронов уменьшается. Изучались также свободно горящие электрические разряды в магнитном поле. В поперечном магнитном поле ПС свободно горящего электрического разряда изгибается в направлении действия магнитной силы. Плазма выносится из области канала разряда, а поступающий в область разряда нейтральный газ ионизуется. Такой разряд в поперечном магнитном поле применяется для создания потоков плазмы (плазменные двигатели). Эти разряды изучались экспериментально. Например, в [4] исследовался свободно горящий разряд в поперечном магнитном поле. Установлено, что стационарная форма разряда существует только в ограниченной области магнитных полей $B < B_{\max}$. При $B > B_{\max}$ разряд переходит в нестационарную форму. Напряжение на разряде пульсирует с частотой, равной обратному времени пролета плазмой разрядного промежутка, плазма из разряда вылетает

сгустками. Аналогичные явления наблюдаются и при низких давлениях. Ускорение плазмы в поперечном магнитном поле ускорителя с замкнутым током Холла [5] при $B > B_{\max}$ также происходит в нестационарном режиме с пульсирующим напряжением и пульсирующим выбросом плазмы. В обоих случаях достоверно не установлен механизм, переводящий стационарную форму разряда в нестационарную. Поэтому изучение электрических разрядов в поперечных магнитных полях по-прежнему остается актуальным.

В настоящей работе теоретически изучены свойства ограниченного изолированными стенками ПС низкого давления (10^{-2} –1 Тор) в поперечном магнитном поле. В таком ПС движение плазмы к стенкам происходит под действием градиента давления и магнитной силы. Отметим, что физический механизм ускорения ионов и его математическое описание такие же, как и в ускорителях плазмы с поперечным магнитным полем. Разница только в том, что в ПС поток ионов рекомбинирует на стенке, а в ускорителе — пересекает плоскость стенки. Результаты изучения свойств ПС в поперечном магнитном поле с помощью относительно простой математической модели могут оказаться полезными для понимания ряда явлений в ускорителях плазмы. Показано, что стационарная форма такого ПС существует только при $B < B_{\max}$. Определено значение B_{\max} и установлена причина перехода разряда в нестационарную форму.

ТЕОРИЯ ПС В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим ограниченный непроводящими стенками ПС прямоугольного сечения, ширина которого по оси x много меньше (на порядок) размеров ПС по осям y и z . Поле E_z направлено против оси z , ток ПС определяется внешней электрической цепью. Магнитное поле B_y направлено по оси y , магнитная сила, действующая на j_z , направлена по x . В теории ПС низкого давления при $V = 0$ с помощью уравнений неразрывности и движения заряженных частиц с учетом граничных условий находятся распределения плазмы $n(x)$ и скорости амбиполярного движения $V(x)$, а также энергия электронов ϵ , которая не зависит от x из-за высокой электронной теплопроводности [3]. Подводимая к разряду электрическая мощность выносится потоком плазмы на стенки в виде тепловой, кинетической и внутренней энергии плазмы, а также выходит за пределы объема ПС в виде излучения и энергии потока возбужденных атомов. Из баланса энергии и уравнения движения электронов определяется скорость дрейфа электронов $V_d(\epsilon)$ и поле $E_z(\epsilon)$ [6]. В задаче с поперечным магнитным полем B_y в уравнениях движения по x и z появляются магнитные силы. Наличие $F_z = (e/c)VB_y$ приводит к протеканию в замкнутой цепи тока Холла, который влияет на движение заряженных частиц по оси x , а также на электрическое поле E_z . Считаем, что электроны и ионы движутся в столкновительном режиме. Для описания их движения используем систему гидродинамических уравнений. Рассмотрим плазму с невысокой степенью ионизации, в которой плотность атомов можно считать постоянной и пренебречь квадратичными по концентрации электронов процессами ступенчатой ионизации, объемной рекомбинации, а также не учитывать кулоновские соударения. В стационарном случае ток на непроводящую стенку равен нулю, поэтому скорости движения электронов и ионов равны $V(x)$. Распределения концентрации плазмы и потоков заряженных частиц по оси x можно найти из системы уравнений неразрывности и движения для электронов и ионов:

$$\frac{dnV}{dx} = nv_{ion}, \tag{1}$$

$$-enE - \frac{dp_e}{dx} - nmV(v_{ea} + v_{ion}) - \frac{1}{c}enV_{ez}B_y = 0, \tag{2}$$

$$enE - \frac{dp_i}{dx} - nMV(v_{ia} + v_{ion}) + \frac{1}{c}enV_{iz}B_y = nMV \frac{dV}{dx}. \tag{3}$$

Здесь $n_e = n_i = n$ – концентрация плазмы; p_e, p_i – электронное и ионное давления; v_{ea} – транспортная частота столкновений электронов с атомами,

учитывающая упругие и неупругие (возбуждения, ионизация) столкновения, при которых импульс передается атому; v_{ia}, v_{ion} – частоты столкновений ионов с атомами и частота ионизации; $V_{ex} = V_{ix} = V$ – скорость потока плазмы; $V_{iz} - V_{ez} = V_z$; B_y – магнитное поле; $F_m = enV_zB_y$ – магнитная сила, действующая на ток в поперечном направлении. Ионизационное трение (третьи члены в левой части (2) и (3)) в уравнениях движения электронов и ионов связано с появлением при ионизации в потоках заряженных частиц новых электронов или ионов, которые понижают средний импульс потока. В (2) пренебрегается (как это принято) инерцией электронов. Задачу о ПС в поперечном магнитном поле будем рассматривать в диффузионном и недиффузионном приближениях.

ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В диффузионном приближении в уравнении (3) пренебрегаем инерцией ионов. Сложим (2) и (3) для исключения электрического поля E . Имеем

$$-k(T_e + T_i) \frac{dn}{dx} - nV[M(v_{ia} + v_{ion}) + m(v_{ea} + v_{ion})] + \frac{1}{c}enV_zB_y = 0. \tag{4}$$

Вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. Если разделить (4) на множитель перед V , то последний член в левой части (4) можно записать в виде $V_a = (e/c)\mu_iV_zB_y$, где μ_i – подвижность ионов, V_a – скорость амбиполярного дрейфа [7]. Продифференцируем (4) и используем (1) для исключения производной от плотности потока. Получим

$$-D_a \frac{d^2n}{dx^2} + \frac{eV_zB_y}{Mc(v_{ia} + v_{ion})} \frac{dn}{dx} = nv_{ion}, \tag{5}$$

$$D_a = \frac{k(T_e + T_i)}{M(v_{ia} + v_{ion})}.$$

Учет магнитной силы приводит к появлению в уравнении диффузии дополнительного члена, пропорционального первой производной. Запишем (5) в безразмерных переменных $\tilde{n} = n/n^*$, $\tilde{x} = x/L$ в виде (знак “ \sim ” в дальнейшем будем опускать)

$$\frac{d^2\tilde{n}}{d\tilde{x}^2} + a \frac{d\tilde{n}}{d\tilde{x}} + b\tilde{n} = 0, \tag{6}$$

$$a = -\frac{eV_zB_yL}{ck(T_e + T_i)}, \quad b = \frac{v_{ion}L^2}{D_a}.$$

В (6) коэффициент a при первой производной отрицательный. Для данной задачи пригодно решение с комплексными корнями характеристического уравнения. Имеем

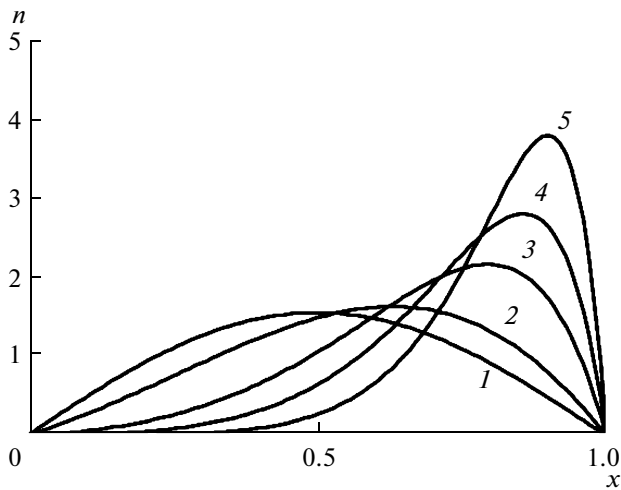


Рис. 1. Зависимость $n(x)$ в диффузионном приближении для различных значений параметра ξ : 1 – 0, 2 – 0.4, 3 – 0.8, 4 – 0.9, 5 – 0.95.

$$n = e^{-\frac{1}{2}ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad \beta = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}. \quad (7)$$

Для ПС в диффузионном приближении с достаточной точностью можно использовать граничные условия $n(0) = n(1) = 0$. В этом случае $C_1 = 0$, $\beta = \pi$. В решаемой задаче $a < 0$, поэтому экспоненциальный множитель в (7) увеличивается с ростом x , распределение концентрации становится несимметричным, максимум концентрации при увеличении магнитной силы смещается от центра по направлению действия силы. Положение максимума x_{\max} определяется соотношением $2\pi \operatorname{ctg}(\pi x_{\max}) = a$. Параметр a ограничен сверху значением $a^* = 2\sqrt{b}$. Определим величину $\xi < 1$ соотношением $a = \xi a^*$, что позволяет записать решение (7) в универсальной форме:

$$n(x) = \frac{f^2 + \pi^2}{\pi(e^f + 1)} e^{fx} \sin \pi x, \quad (8)$$

$$\int_0^1 n(x) dx = 1, \quad f = \frac{\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

На рис. 1 представлены распределения $n(x)$ для нескольких значений ξ . Отметим, что с ростом ξ увеличивается и смещается вправо значение n_{\max} . Полученное из граничных условий выражение $\beta = \pi$ вместе с соотношением $a = \xi a^*$ позволяет выразить параметры a и b через фактор ξ :

$$a = -\frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad b = \frac{\pi^2}{1 - \xi^2}. \quad (9)$$

Найдем распределения плотностей потоков ионов и электронов из (4). Скорость нормируем

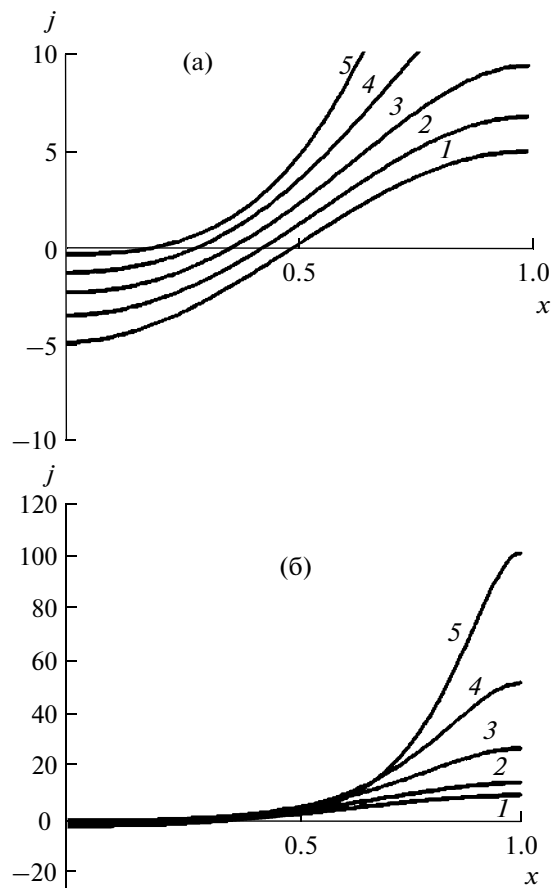


Рис. 2. Зависимость плотности потока $j(x)$ в диффузионном приближении для различных значений параметра ξ ; (а): 1 – 0, 2 – 0.2, 3 – 0.4, 4 – 0.6, 5 – 0.8; (б): 1 – 0.4, 2 – 0.6, 3 – 0.8, 4 – 0.9, 5 – 0.95.

на $V^* = D_a L^{-1}$. Используя (4), (7) и (8) для $j = nV$ получим

$$j = \frac{f^2 + \pi^2}{\pi(e^f + 1)} e^{fx} (f \sin \pi x - \pi \cos \pi x).$$

Потоки направлены в разные стороны относительно точки x_0 , в которой $V(x_0) = 0$. Значение x_0 определяется соотношением $\operatorname{tg}(\pi x_0) = \pi f^{-1}$. При $\xi = 0$ функция $f = 0$, $\operatorname{tg}(\pi x_0) = \infty$, $x_0 = 0.5$, распределение потоков симметрично. При наличии магнитного поля с ростом ξ распределения становятся несимметричными, точка x_0 смещается влево по оси x , при $\xi \rightarrow 1$ значение $x_0 \rightarrow 0$. Распределения потоков для разных ξ представлены на рис. 2. Отношение потоков к на правой $j(1)$ и левой $j(0)$ границах промежутка составляет $\kappa = -\exp(f)$. При увеличении ξ поток на левую границу уменьшается, а поток на правую границу увеличивается. Асимметрия потоков при $f > 1$ весьма велика. Приведенные на рис. 1 и 2 распределения концентраций и плотностей потоков соответствуют раз-

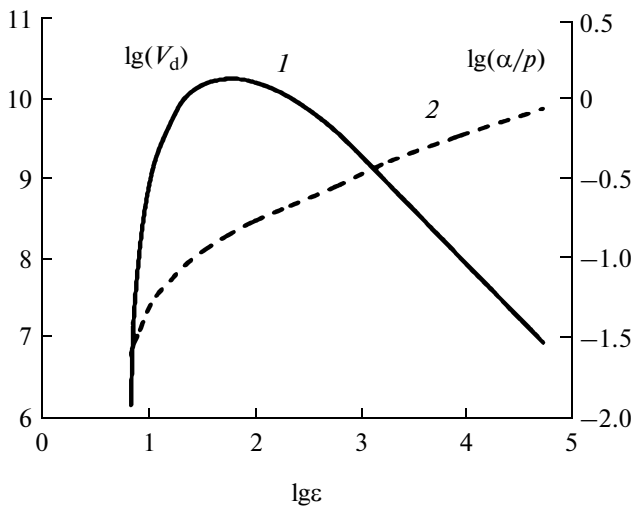


Рис. 3. Зависимость для гелия скорости дрейфа V_d [см/с] – 1 и α/p [(Тор см)] – 2 от ϵ [эВ].

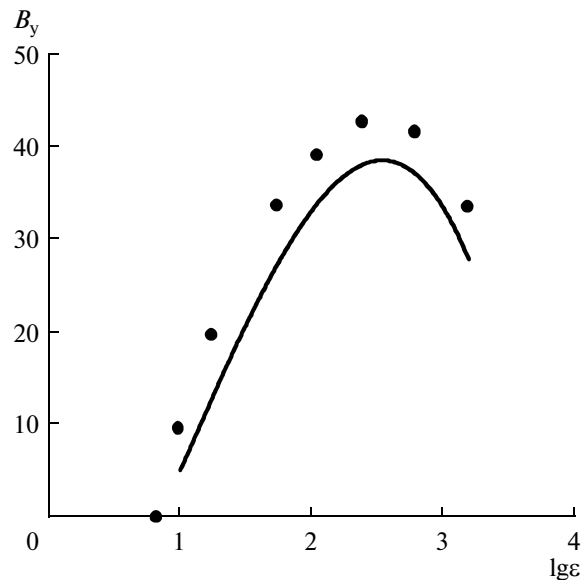


Рис. 4. Зависимость B_y [мТ] от ϵ [эВ] для гелия при $n_0 = 3 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $L = 4$ см: сплошная кривая – диффузионное приближение, точки – недиффузионное приближение.

ным токам. Эти распределения можно привести к одному значению тока, если их умножить на фактор $\delta = V_z(\epsilon_0)/V_z(\epsilon)$, где ϵ_0 – значение ϵ при $B_y = 0$.

Определим значение B_y . Используя (6) и (9), получим

$$B_y = \frac{2\pi ck(T_e + T_i)}{eV_z L} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (10)$$

$$\frac{v_{\text{ion}} L^2 M (v_{\text{ia}} + v_{\text{ion}})}{k(T_e + T_i)} = \frac{\pi^2}{1 - \xi^2}. \quad (11)$$

Левая часть (11) пропорциональна $(n_0 L)^2$, где n_0 – плотность газа. Средняя энергия электронов $\epsilon = (3/2)kT_e + mV_z^2/2$ увеличивается при уменьшении $n_0 L$. Левая часть (11) при увеличении ϵ проходит через максимум при $\epsilon = \epsilon_{\text{max}}$. При $\epsilon < \epsilon_{\text{max}}$ с ростом ϵ она увеличивается за счет экспоненциального роста частоты ионизации. При $\epsilon > \epsilon_{\text{max}}$, когда сечение ионизации уменьшается как ϵ^{-1} , левая часть (11) уменьшается как ϵ^{-2} . Магнитное поле B_y при $\epsilon < \epsilon_{\text{max}}$ увеличивается с ростом ϵ . При $\epsilon \gg \epsilon_{\text{max}}$ скорость дрейфа пропорциональна $\epsilon^{1/2}$ [6], B_y пропорционально $\xi \epsilon^{-1/2}$. В этом диапазоне ϵ индукция магнитного поля B_y уменьшается как за счет роста ϵ , так и за счет уменьшения ξ . Таким образом, существует значение B_{max} , ограничивающее сверху диапазон магнитных полей, в котором имеет место стационарный ПС. Поскольку в этой задаче влиянием тока Холла можно пренебречь, то зависимости $V_z(E/p)$ и $\epsilon(E/p)$ такие же, как и в разряде без поперечного магнитного поля. Из эксперимента и результатов численного моделирования для различных газов известны зависимости $\epsilon(E/p)$, $V_z(E/p)$ и частоты ионизации $v_{\text{ion}} = \alpha p V_z(E/p)$, где α – коэффициент Таундсенда. Поэтому можно определить зависимости $V_z(\epsilon)$ и

$v_{\text{ion}}(\epsilon)$ для выбранного газа. Эти зависимости следует использовать в формулах (10) и (11). Таким способом для конкретного газа при заданных значениях n_0 и L можно определить зависимость $B_y(\epsilon)$.

В качестве примера выполним расчет зависимости $B_y(\epsilon)$ для гелия. Отметим, что для ПС в поперечном магнитном поле не выполняются законы подобия: в (11) входит произведение $n_0 L$, в (10) входит только величина L . Этот факт связан с видом уравнения (5), которое содержит как вторую, так и первую производные. При проведении расчетов необходимо задавать независимо n_0 и L . Методика расчета следующая. Определяем минимальное значение ϵ_{min} при $\xi = 0$ из (11). Задаемся значениями ϵ больше ϵ_{min} и из (11) определяем зависимость $\xi(\epsilon)$. Значение $V_z(\epsilon)$ известно из эксперимента и расчетов. Обе эти функции используем в (10) для определения зависимости $B_y(\epsilon)$. Зависимости V_z и α/p от ϵ взяты из работ [6], [8] (рис. 3). В расчетах при определении $v_{\text{ion}}(\epsilon)$ принималась во внимание как прямая ионизация атомов гелия из основного состояния, так и (линейная по n) ступенчатая ионизация через метастабильное состояние атома гелия. Оказалось, что в рассмотренном диапазоне энергий электронов ϵ ступенчатая ионизация мала по сравнению с прямой ионизацией. Результаты расчетов B_y для гелия при $n_0 = 3 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $L = 4$ см приведены на рис. 4. Обратим внимание на тот факт, что одному значению B_y соответствует два набора значений ϵ и V_z , причем большие значения относятся к области

кривой $B_y(\varepsilon)$, на которой производная отрицательна.

При выводе уравнения (10) предполагалось, что $n(0) = n(1) = 0$. Определим эти значения. Величина объемного заряда ρ в плазме находится из уравнения Пуассона $\text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Для определения $n(0)$ и $n(1)$ на границе плазмы и слоя (при $x = 0$ и $x = 1$) полагается, что $\rho(0) = en(0)$, $\rho(1) = en(1)$. Продифференцируем по x уравнение (2). Имеем

$$n_{0,1} = \left(\frac{l_D}{L}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\left(\frac{dn}{dx}\right)^2 \Big|_{0,1} - n_{0,1} \frac{d^2n}{dx^2} \Big|_{0,1} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (12)$$

$$l_D^2 = \frac{kT_e}{4\pi e^2 n^*}, \quad n^*(\varepsilon) = \delta n^*(\varepsilon_0).$$

Здесь $n_{0,1}$ — концентрация на левой и правой границах плазмы, производные также вычисляются на границах. Полученные выше аналитические решения для $n(x)$ позволяют определить производные как

$$n'(0) = \frac{f^2 + \pi^2}{e^f + 1}, \quad n''(0) = n'(0) 2f,$$

$$n'(1) = -n'(0) e^f, \quad n''(1) = n'(1) 2f.$$

Чтобы найти $n_{1,2}$, необходимо задать ток на единицу длины по оси y , по которому определяется n^* для данного ε . Например, при $n^* = 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $L = 4 \text{ см}$, $kT_e = 10 \text{ эВ}$ имеем $(l_D/L)^{2/3} = 6 \times 10^{-3}$. При $\xi = 0$ находим $n(0) = n(1) = 0.017$; при $\xi = 0.5$ $n(0) = 9 \times 10^{-3}$, $n(1) = 3 \times 10^{-2}$; при $\xi = 0.9$ $n(0) = 2 \times 10^{-3}$, $n(1) = 8 \times 10^{-2}$. Значение $n(0)$ уменьшается с ростом ξ , а $n(1)$ увеличивается, однако отношение $n(1)/n_{\text{max}}$ всегда много меньше единицы, поэтому аналитические решения, полученные с нулевыми граничными условиями, вполне корректны.

НЕДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Уравнение амбиполярной диффузии (7) было получено из уравнений неразрывности и движения электронов и ионов с рядом допущений. Основные из этих допущений следующие. В уравнениях движения не учитывалась инерция электронов и ионов. Для электронов это оправдано. Для ионов пренебрежение инерцией существенным образом изменяет распределения $n(x)$ и $V(x)$. Меньшее влияние это допущение оказывает на потоки частиц на стенки. При выводе (7) частота соударений ионов с атомами предполагалась постоянной. Однако скорость направленного движения ионов V на границах плазмы близка к скорости ионного звука, которая может на порядок и более превышать тепловую скорость. Поэтому в этой задаче v_{ia} не является константой, она зависит от $V(x)$. Кроме того, в диффузионном приближении предполагается, что V_z не зависит от x . Это,

казалось бы, очевидное в теории ПС предположение не обосновано. Оно неверно, если в балансе энергии заметную роль играет кинетическая энергия потока ионов на стенки. Поскольку скорость иона около стенки близка к скорости ионного звука, то каждый ион при рекомбинации на стенке помимо тепловой энергии $(3/2)kT_e$, внутренней энергии I выделяет также $(1/2)kT_e$ за счет кинетической энергии. В этом случае V_z зависит от x и эту зависимость следует учитывать.

Запишем уравнение движения плазмы по x с учетом инерции ионов. Сложим (2) и (3) для исключения электрического поля:

$$MnV \frac{dV}{dx} = -k(T_e + T_i) \frac{dn}{dx} - nV [M(v_{ia} + v_{ion}) + m(v_{ea} + v_{ion})] + \frac{1}{c} enV_z B_y.$$

Исключим dn/dx с помощью (1):

$$-\frac{k(T_e + T_i)}{V} \frac{dV}{dx} \left(1 - \frac{MV^2}{k(T_e + T_i)} \right) = \quad (13)$$

$$= -\frac{k(T_e + T_i)}{V} v_{ion} - MV(v_{ia} + v_{ion}) + \frac{e}{c} V_z B_y.$$

Отметим, что в (13) частота соударений ионов v_{ia} и скорость V_z зависят от V . Для $v_{ia}(V)$ используем выражение $v_{ia} = n_0 (v_a^2 + V^2)^{1/2} \sigma_{ia}$, которое правильно описывает оба предельных случая и имеет незначительную погрешность в узкой промежуточной области, где скорость атомов v_a близка к скорости V .

Выражение для V_z должно быть получено из баланса мощности, который запишем в виде баланса тепла [6]:

$$\frac{j_z^2}{\sigma} = p \text{div} V + \text{div} q_e + W_{\text{nel}} + W_{\text{el}}. \quad (14)$$

В (14) W_{nel} , W_{el} — неупругие (возбуждения и ионизация) и упругие потери, член $\text{div} q_e$ характеризует перенос тепла за счет электронной теплопроводности, член $p \text{div} V$ описывает охлаждение, связанное с ускоренным расширением плазмы. В разредах низкого давления высокая энергия электронов (10–100 эВ) [3], поэтому электронная теплопроводность выравнивает как распределение температуры электронов, так и распределение источников мощности, связанных с $p \text{div} V$. В приближении $T_e = \text{const}$ в балансе тепла нужно усреднить $\text{div} V$ и исключить член $\text{div} q_e$. Имеем

$$\frac{j_z^2}{\sigma} = p \frac{V(L) - V(0)}{L} + W_{\text{nel}} + W_{\text{el}},$$

$$W_{\text{nel}} = n \left(\frac{3}{2} k T_e + I + \frac{M V^2}{2} + \frac{m V_z^2}{2} \right) v_{\text{ion}} + \quad (15)$$

$$+ n \sum I_k v_k^*, \quad W_{\text{el}} = 3nk T_e \frac{m}{M} v_{ea}.$$

Отметим, что в приближении $T_e = \text{const}$, баланс тепла является локальным. Неупругие потери состоят из потерь на ионизацию и потерь на возбуждение атомов. В потерях на возбуждение основную роль играет возбуждение резонансного уровня с последующим быстрым высвечиванием. Энергия излучения выходит за пределы ПС. Энергия, затраченная на ионизацию, выносится потоком плазмы на стенки, где выделяется в виде тепла при рекомбинации. Используя выражения $j_z = enV_z$ и $\sigma = e^2 nm^{-1} (v_{ea} + v_{\text{ion}})^{-1}$, из (15) можно получить

$$V_z = V_d \left(1 + c \frac{2(\tilde{V}(1) - \tilde{V}(0))}{b_1} + c \tilde{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$c = \frac{k T_e}{3k T_e + 2I + \sum \frac{2I_i^* v_i^*}{v_{\text{ion}}} + 6 \frac{m v_{ea}}{M v_{\text{ion}}}}, \quad b_1 = \frac{v_{\text{ion}} L}{V^*}. \quad (16)$$

Здесь $\tilde{V} = V/V^*$, $\tilde{x} = x/L$, $V^* = (k T_e/M)^{0.5}$, I – энергия ионизации, I_i^* – энергия возбуждения i -го уровня, v_i^* – частота возбуждения. Скорость дрейфа электронов V_d равна V_z при $V = 0$. Второй член в правой части (16) характеризует вклад $p \text{div} V$, третий член связан с наличием в балансе тепла кинетической энергии потока плазмы на стенки. Выражение для V_z не зависит от магнитного поля, поскольку магнитное поле не входит

в баланс мощности. Скорость V_z зависит от x даже для обычного ПС без магнитного поля. Этот весьма существенный момент будет обсуждаться в дальнейшем. Подставим выражения для $v_{ia}(V)$ и $V_z(V)$ в (13) и получим нелинейное уравнение первого порядка для определения зависимости $V(x)$. В безразмерных переменных (знак “ \sim ” опущен) уравнение движения имеет вид

$$\frac{dV}{dx} = (1 - V^2)^{-1} \left\{ b_1 \left[1 + V^2 \left(1 + d_1 \left(1 + d_2 V^2 \right)^{1/2} \right) \right] + a \left(1 + c \frac{2(V(1) - V(0))}{b_1} + c V^2 \right)^{1/2} V \right\}, \quad (17)$$

$$a = -\frac{e}{c k} \frac{V_d L B_y}{(T_e + T_i)}, \quad d_1 = \frac{n_0 \langle v_a \sigma_{ia} \rangle}{v_{\text{ion}}}, \quad d_2 = \frac{\pi T_e}{8 T_a}.$$

Здесь n_0 – плотность, v_a – скорость атомов, σ_{ia} – частота столкновений иона с атомами. Правая часть (17) не зависит от x , поэтому выражение $x(V)$ можно записать в виде квадратуры. Однако это не упрощает решение, поскольку интеграл не выражается в элементарных функциях. Поэтому удобнее решать уравнение (17) численно.

Распределение концентрации $n(x)$ находится из уравнения неразрывности (1) и уравнения для $V(x)$ (16). Результат имеет вид

$$\frac{dn}{dx} = -\frac{n}{1 - V^2} \left(b_1 V \left(2 + d_1 \left(1 + d_2 V^2 \right)^{1/2} \right) + a \left(1 + c \frac{2(V(1) - V(0))}{b_1} + c V^2 \right)^{1/2} \right). \quad (18)$$

Зависимость $V(x)$ определяется уравнением (16). Используя эту зависимость, запишем решение (18) в виде

$$n(x) = n(0) \exp \left[- \int_0^x \frac{b_1 V \left(2 + d_1 \left(1 + d_2 V^2 \right)^{1/2} \right) + a \left(1 + c \frac{2(V(1) - V(0))}{b_1} + c V^2 \right)^{1/2}}{1 - V^2} dx \right]. \quad (19)$$

Значение $n(0)$ определяется из условия нормировки (8). Распределения $V(x)$ и $n(x)$ находятся следующим образом. Сначала из (17) с граничными условиями $V(0) = -1$, $V(1) = 1$ определяется $V(x)$. Для каждого значения $b_1(\epsilon)$ подбирается значение параметра a , при котором $V(1) = 1$. Затем полученная зависимость $V(x)$ используется в (19) для расчета $n(x)$ при заданном значении $n(0)$. После расчета производится нормировка. Таким образом, получаем нормированное распределение $n(x)$.

Нормированные концентрации $n(x)$ приведены на рис. 5. Обратим внимание на тот факт, что в недиффузионном приближении при $B_y = 0$ значения концентраций на стенках $n(0) = n(1) = 0.33$ существенно отличаются от их значений в диффузионном приближении (0.017). С ростом параметра b_1 значение $n(0)$ уменьшается, а значение $n(1)$ увеличивается.

Типичные распределения $V(x)$ для различных значений параметра ξ приведены на рис. 6. С ростом ξ координата x_0 точки, в которой $V = 0$, сме-

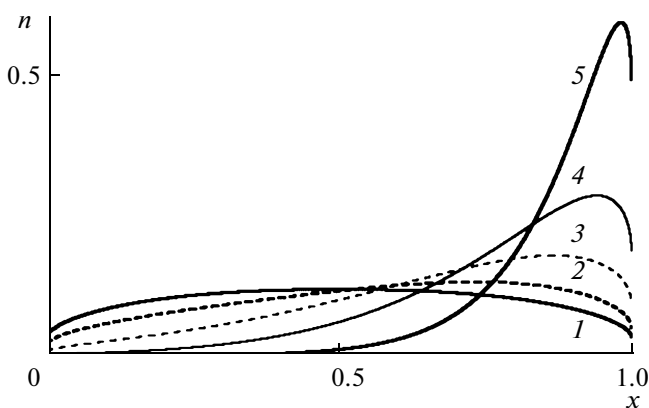


Рис. 5. Зависимость $n(x)$ в недиффузионном приближении для различных значений параметра ξ : 1 – 0, 2 – 0.16, 3 – 0.43, 4 – 0.73, 5 – 0.93.

щается в сторону меньших x . Производная dV/dx в этой точке возрастает пропорционально b_1 , распределения $V(x)$ становятся все более несимметричными.

Значение $n(x)$ и $V(x)$ можно находить также путем решения системы дифференциальных уравнений первого порядка (17) и (18) с граничными условиями $V(0) = -1$, $V(1) = 1$ и заданным значением $n(0)$. После нормировки $n(x)$ для определения значений концентраций и скоростей на границах плазмы следует воспользоваться граничными условиями (12), определить координаты x_1 и x_2 , в которых граничные условия выполняются, и найти значения $n(x_1)$, $n(x_2)$ и $V(x_1)$, $V(x_2)$. После этого необходимо использовать найденные значения $V(x_1)$ и $V(x_2)$ для определения нового значения параметра a , при котором $x_2 - x_1 = 1$. Например, при $\varepsilon = 10$ эВ, $b_1 = 4.8$ находим $a = -15.4$ и $n(0) = 1.5 \times 10^{-4}$, $n(1) = 4.85$, $V(0) = -0.64$, $V(1) = 0.99$. Значения $n(0)$, $n(1)$, $V(0)$ и $V(1)$ для различных значений параметра $b_1(\varepsilon)$ приведены в таблице. В таблице также дано отношение толщины слоя объемного заряда $d(0)$ на границе $x = 0$ к размеру промежутка L . Это отношение мало, однако оно увеличивается при росте b_1 . Толщина слоя $d(1)$ при $x = 1$ уменьшается в случае увеличения b_1 . Если $d(0)$ при больших b_1 окажется соизме-

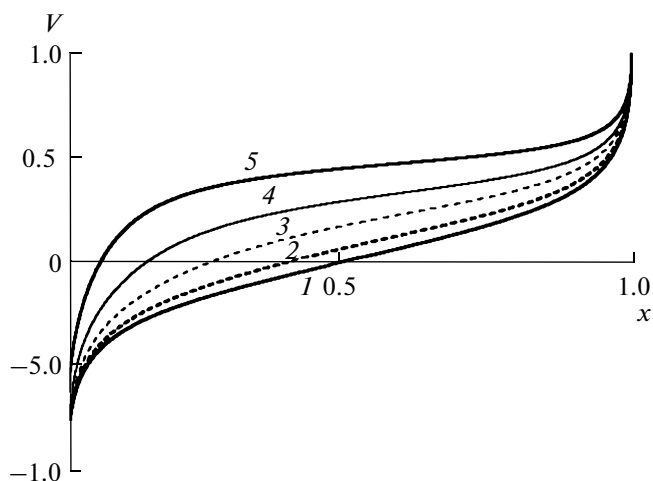


Рис. 6. Зависимость $V(x)$ в недиффузионном приближении для различных значений параметра ξ : 1 – 0, 2 – 0.16, 3 – 0.43, 4 – 0.73, 5 – 0.93.

римым с промежутком, то этот факт следует учитывать при определении параметра a .

Значение магнитного поля B_y для каждого из расчетов определяется из параметра a . Рассчитанные в недиффузионном приближении величины магнитных полей для различных значений ε приведены на рис. 4.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сравним результаты расчетов, полученные в диффузионном и недиффузионном приближениях. Обратим внимание на наиболее существенные различия. В недиффузионном приближении скорость ионов на границах плазмы ограничена скоростью ионного звука V^* . В диффузионном приближении эта скорость не имеет ограничения, она может существенно превышать скорость ионного звука. Например, если в диффузионной модели $n(0) = n(1) = 0$, то $V(0) = V(1) = \infty$. Даже если в диффузионной модели определять значения $n(0)$ и $n(1)$ с помощью граничных условий (12), то и в этом случае скорость $V(0)$ может на порядок и более превышать скорость ионного звука. Например, при $B_y = 0$ в диффузионной модели

Параметры ПС в гелии

ε , эВ	7.45	7.55	7.8	8.6	10.6
b_1	0.65	0.70	1.00	1.86	4.8
a	0	-1.00	-2.99	-6.65	-15.4
ξ	0	0.157	0.430	0.727	0.926
$n(0)$	0.33	0.21	0.079	0.012	1.5×10^{-4}
$n(1)$	0.33	0.50	0.935	1.87	4.85
$V(0)$	-0.982	-0.976	-0.966	-0.935	-0.643
$V(1)$	0.982	0.984	0.986	0.988	0.990
$d(0)/L$	2.9×10^{-4}	3.6×10^{-4}	6.0×10^{-4}	1.6×10^{-3}	1.5×10^{-2}

$n(0) = 0.017$, в недиффузионной $n(0) = 0.33$. При одинаковой энергии ϵ потоки на стенки для обеих моделей одинаковы. Поэтому скорость $V(0)$ для диффузионной модели в 20 раз превышает скорость $V(0) = 0.98$ для недиффузионной модели.

Распределение концентраций в недиффузионном приближении отличается от соответствующих распределений, полученных из диффузионной модели. Зависимости $n(x)$ имеют совершенно другой вид. Это различие наглядно демонстрируется кривыми $n(x)$, приведенными на рис. 1 и 5. Имеются и другие менее существенные различия, связанные с учетом зависимостей $v_{ia}(V)$ и $V_z(V)$ в недиффузионном приближении.

В диффузионном приближении с достаточной точностью можно рассчитать потоки частиц на стенки и определить взаимосвязь магнитного поля и энергии электронов ϵ . На рис. 4 приведены зависимости $B_y(\epsilon)$, полученные в диффузионном (сплошная кривая) и недиффузионном (точки) приближениях. Можно констатировать, что эти зависимости заметно не различаются. Таким образом, значения $B_y(\epsilon)$ можно определять с помощью аналитических выражений, полученных в диффузионном приближении. Потоки на стенки можно рассчитывать из уравнения неразрывности. При заданной энергии электронов ϵ и известной частоте ионизации $\nu_{ion}(\epsilon)$ с учетом условий нормировки $n(x)$ суммарные потоки частиц на стенки в диффузионном и недиффузионном приближениях одинаковы. Потоки на каждую из стенок могут отличаться, поскольку отличаются координаты точки x_0 при $B_y \neq 0$. При $x_0 \ll 1$ различаются меньшие потоки (на стенку с координатой $x = 0$), большие потоки (на стенку с координатой $x = 1$) близки друг другу.

Остановимся на весьма существенном вопросе, связанном с зависимостью $V_z(x)$. Запишем уравнение движения электронов вдоль оси z в виде обобщенного закона Ома с учетом магнитной силы, действующей на электронный ток j_x :

$$enE_z - \frac{e}{c}nVB_y - nmV_z(v_{ea} + \nu_{ion}) = 0. \quad (20)$$

В (20) электрическая и магнитная силы уравновешены силой трения, причем как магнитная сила, так и сила трения зависят от V . Уравнение (20) в решаемой задаче — это уравнение для определения E_z , поскольку для каждого значения ϵ зависимость $V(x)$ определяется уравнением (17), а зависимость $V_z(V)$ — уравнением (16). Таким образом, в соответствии с (20) электрическое поле E_z зависит от поперечной координаты x . Уравнение (20) может быть записано в виде

$$E_z = E_d \left(\left(1 + c \frac{2(V(1) - V(0))}{b_1} + cV^2 \right)^{\frac{1}{2}} + V \frac{V^*}{V_d} \beta_e \right). \quad (21)$$

В (21) β_e — параметр Холла для электронов, $E_z = E_d$ при $V = 0$. Зависимость E_z от x слабая, поскольку поправки к E_d много меньше единицы. Например, при $\epsilon = 10$ эВ коэффициент с $V^2 = 0.11$, $2c(V(1) - V(0))b_1^{-1} = 0.06$, $V^*V_d^{-1}\beta_e = 0.07$. Тем не менее электрическое поле E_z зависит от поперечной координаты даже в том случае, когда $B_y = 0$. Зависимость $E_z(x)$ свидетельствует о том, что в изотермической модели ПС (как при наличии магнитного поля, так и при его отсутствии) имеют место слабо выраженные двумерные эффекты. Из уравнения $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ следует, что поперечное электрическое поле E_x зависит от продольной координаты z . Обратим внимание на тот факт, что хотя изменение E_z по x невелико, изменение E_x по z может быть весьма значительным, поскольку длина ПС много больше его поперечного размера.

Обратим внимание на еще один существенный момент. В теории разрядов низкого давления большинство задач решается только с помощью уравнений неразрывности и движения, баланс мощности не включается в рассмотрение. Применим такой подход к решаемой задаче. При исключении баланса мощности для определения двух неизвестных E_z и V_z имеется только одно уравнение (20). Если из этого уравнения определять V_z , то относительно E_z необходимо сделать определенное предположение. В теории ПС таким предположением является (казалось бы, очевидное) заключение о том, что E_z не зависит от поперечной координаты x . В этом случае двумерные эффекты в задаче отсутствуют и ПС можно считать однородным по длине. В результате такого предположения из (20) можно получить зависимость $V_z(V)$ в виде

$$V_z = V_d - V(x)\beta_e, \quad (22)$$

которая существенным образом отличается от (16). Если эту зависимость использовать при выводе уравнения амбиполярной диффузии, то это уравнение будет иметь ту же форму (5), однако коэффициент D_a будет заменен на D_a^* :

$$D_a^* = \frac{D_a}{1 + \beta_i \beta_e}. \quad (23)$$

В (23) появился множитель $\beta_i \beta_e$, пропорциональный квадрату B_y . При этом в уравнении амбиполярной диффузии магнитное поле входит в силу Ампера и в коэффициент D_a^* . Включение в задачу баланса мощности в изотермической модели приводит к иной зависимости $V_z(V)$ (16), не содержащей магнитного поля.

Таким образом, в изотермической модели ПС должны проявляться двумерные эффекты. В одномерной модели ПС, когда $E_z = \text{const}$, плазму ПС нельзя считать изотермической. Распределение $\epsilon(x)$ необходимо находить с использованием ба-

ланса мощности (14). Отметим, что в настоящей задаче как двумерные эффекты в изотермической модели, так и неизотермические эффекты в модели $E_z = \text{const}$ малы и ими можно пренебречь. В обоих случаях вместо (16) и (22) можно использовать приближение $V_z = V_d$.

Задача о ПС в поперечном магнитном поле существенно отличается от известной задачи о ПС в продольном магнитном поле B_z [3]. В поле B_z в цилиндрическом ПС на электронный ток j_{er} действует магнитная сила $(e/c) j_{er} B_z$, в результате чего возникает замкнутый азимутальный электрический ток $j_{e\phi} = j_{ez} \beta_e$. На этот ток действует магнитная сила $(e/c) j_{e\phi} B_z$, направленная к оси разряда. Учет этой силы в уравнении движения плазмы приводит к перенормировке коэффициента диффузии (D_a заменяется на D_a^*) в уравнении амбиполярной диффузии. Поэтому относительные распределения концентраций не меняются, они такие же, как и в ПС без магнитного поля. Изменяется энергия электронов ϵ и поле E_z — они уменьшаются при увеличении B_z .

Отметим, что гидродинамическое приближение применимо в том случае, когда длины свободного пробега электронов λ_e и ионов λ_i много меньше L . Если электроны замагничены, то вместо λ_e следует использовать ларморовский радиус R_l . Сделаем оценку, используя результаты расчетов. Пусть $\epsilon = 100$ эВ, тогда $R_l/L = 0.025$, $\lambda_e/L = 0.05$, $\lambda_i/L = 0.02$ и применимость гидродинамического приближения очевидна.

Кинетические поправки возникают на расстояниях порядка λ_i , $\min(R_l, \lambda_e)$ вблизи стенок. Эти поправки практически не влияют на потоки частиц, распределение концентрации плазмы в основном промежутке, зависимость $\epsilon(B_z)$. В разрядах с замагниченными электронами, когда $R_l/L \ll 1$, нижняя по n_0 граница применимости гидродинамического приближения определяется режимом движения ионов. Кинетическую модель для описания движения ионов нужно применять, если длина потери импульса соизмерима либо превышает L .

После проведения расчетов можно оценить роль квадратичных по концентрации членов ступенчатой ионизации (через неметастабильные состояния атома гелия), рекомбинации и роль электронно-ионных столкновений. Первыми двумя процессами можно пренебречь (с большим запасом). Частотой электронно-ионных столкновений можно пренебречь, если степень ионизации существенно меньше 0.1 при $e = 10$ эВ, а при $e = 100$ эВ степень ионизации должна быть много меньше единицы. Эти условия в проведенном расчете выполняются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривался ПС прямоугольного сечения, ограниченный непроводящими стенками. Такая конфигурация позволила решать в поперечном направлении одномерную задачу, поскольку двумерными эффектами можно было пренебречь. Полученные результаты можно применить также к кольцевому ПС, ограниченному непроводящими цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 , в котором азимутальное магнитное поле создается током, протекающим по оси системы. Если $R_2 - R_1 = L \ll R_1, R_2$, то $B_\phi \approx B_y$ и такая задача сводится к рассмотренной выше плоской задаче.

Отметим, что с помощью поперечного магнитного поля и выбора параметров внешней цепи можно в широком диапазоне (от единиц до сотни электронвольт) изменять энергию электронов. Этот результат может оказаться полезным для получения излучения с различным спектральным составом, а также для повышения эффективности плазмохимических реакций. В работе показано, что стационарное состояние ПС с изолированными стенками возможно только при $B \leq B_{\max}$. Этот существенный факт связан с невозможностью обеспечить при $B > B_{\max}$ необходимый для существования стационарного ПС уровень ионизации из-за ограниченности сечения ионизации и формы его зависимости от энергии. По этой же причине, по-видимому, невозможно обеспечить при $B > B_{\max}$ стационарный режим работы ускорителей плазмы с поперечным магнитным полем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voxman R.L., Sanders D.M., Martin P.J.* Handbook of Vacuum Arc Science and Technology: Fundamentals and Applications. Park Ridge. N.J.: Noyes, 1995. 742 с.
2. *Месяц Г.А.* Эктоны в вакуумном разряде: пробой, искра, дуга. М.: Наука, 2000. 424 с.
3. *Грановский В.Л.* Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука, 1971. 543 с.
4. *Баранов В.Ю., Ульянов К.Н.* Электрическая дуга в потоке аргона с цезием при наличии магнитного поля // ТВТ. 1968. Т. 6. № 1. С. 23.
5. *Горшков О.А., Муравлев В.А., Шагайда А.А.* Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2008. С. 88.
6. *Ульянов К.Н.* Параметры электронных лавин и убежание электронов в сильных электрических полях // ТВТ. 2008. Т. 46. № 4. С. 486.
7. *Высикайло Ф.И.* Кумуляция электрического поля в диссипативных структурах в газоразрядной плазме // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. № 5. С. 1071.
8. *Ткачев А.Н., Яковленко С.И.* О механизме убежания электронов в газе. Верхняя ветвь кривой зажигания самостоятельного разряда // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. Вып. 5. С. 264.