P. A. Mozolyako, On the definition of B-points, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2008, Volume 355, 219–236

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

П. А. Мозоляко

ЗАМЕЧАНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТОЧЕК БУРГЕЙНА

1. Введение

Функцию Φ, суммируемую на вещественной оси, будем называть *ядром*, если $\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi = 1$. Положим

$$\Phi_{(y)}(t) = \frac{1}{y}\Phi\Big(\frac{t}{y}\Big), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \tag{1.1}$$

Буквой P будем обозначать *ядро Пуассона* $\pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$; вместо $P_{(2^{-|j|})}$ будем писать $P_{|j|}$, $j \in \mathbb{Z}$. Символ $\phi*\psi$ будет обозначать свертку на $\mathbb{R}$ функций ϕ и ψ.

Для комплексной функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$ положим

$$B_f(x) := (|f * P| * P)(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (|f * (P_j - P_{j-1})| * P_j)(x). \tag{1.2}$$

Определение 1. *Число $x \in \mathbb{R}$ будем называть точкой Бургейна (B-точкой) функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, если $B_f(x) < +\infty$.*

Это определение появилось в статье [7] в связи с некоторыми задачами теории аппроксимативных единиц (а.е.), или "сингулярных интегралов", понимаемых в старинном смысле, как, например, в главе X монографии [4]. Оно возникло в результате продумывания работ [1, 2], где вместо (1.2) использовалось иное значительно более сложно формулируемое условие $B^*_f(x) < +\infty$ (величина $B^*_f(x)$ определена ниже в п. 2, см. формулу (2.21)). В этой статье мы покажем, используя технику статьи [1], что величины $B_f(x)$ и $B^*_f(x)$ конечны или бесконечны одновременно. Более того, их отношение ограничено сверху и отделено от нуля абсолютными константами. Иначе говоря, величина $B^*_f(x)$, играющая центральную роль в работах [1, 2], *сравнима* с $B_f(x)$.

В [7] показано, что для многих а.е. $(\Phi_{(y)})_{y>0}$, где Φ – ядро, в любой вещественной B-точке x функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ имеет место *усиленная* сходимость сверток $\left(f * \Phi_{(y)}\right)(x)$ при $y \downarrow 0$, т.е.

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi_{(y)} * f\right)(x) \right| dy < +\infty \tag{1.3}$$

(в [2] аналогичный результат относится к B^*-точкам).

В [5] даны некоторые многомерные обобщения результата работы [1].

В [1] показано, что метрическая размерность множества $\{x \in \mathbb{R} : B_f^*(x) < +\infty\}$ равна единице для любой вещественной функции f из $L^\infty(\mathbb{R})$. Наш основной результат означает, что последнее множество *совпадает* с $\{x \in \mathbb{R} : B_f(x) < +\infty\}$, так что и множество B-точек вещественной функции из $L^\infty(\mathbb{R})$ тоже имеет максимальную размерность. В [7] дано прямое (не использующее величин $B_f^*(x)$) доказательство этого факта.

Итак, заменяя B^*-точки (т.е. те точки $x \in \mathbb{R}$, для которых $B_f^*(x) < +\infty$) на B-точки, мы не уменьшаем множества, на котором имеет место феномен усиленной сходимости (см. (1.3)), и весьма существенно упрощаем определение "хороших" точек и работу с ними.

В заключительном разделе (п. 8) нашей статьи будет выписан интегральный аналог величины $B_f(x)$, сравнимый с нею при любой $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

2. Определение величины $B_f^*(x)$

Это определение появится в п. 2.4 после подготовки, проведенной в 2.1–2.3.

2.1. Преобразование Фурье $\widehat{g}$ функции g мы будем понимать так:

$$\widehat{g}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i t \tau}\, dt, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Мы имеем в виду, что g принадлежит $L^2(\mathbb{R})$; в приложениях будет достаточно рассматривать финитную ограниченную функцию. *Спектром* $\operatorname{spec} g$ функции g мы называем замкнутый носитель функции $\widehat{g}$.

2.2. Ядра Пуассона и Фейера; ядра K и h_j^∞. Ядро Пуассона P (см. (1.1)) в дальнейшем будет играть основную роль. Особенно важно для нас его полугрупповое свойство:

$$P_{(y_1+y_2)} = P_{(y_1)} * P_{(y_2)}, \quad y_1, y_2 > 0. \tag{2.2}$$

Оно легко следует из равенства

$$\widehat{P}(\tau) = e^{-2\pi|\tau|}, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Нам понадобится следующий простой факт: если $0 < y_1 < y_2$, то

$$\frac{y_1}{y_2} P_{(y_2)} \le P_{(y_1)} \le \frac{y_2}{y_1} P_{(y_2)}. \tag{2.4}$$

Действительно, полагая $q = \frac{y_2}{y_1}$, имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{P_{(y_1)}(x)}{P_{(y_2)}(x)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{q}\, \frac{q^2 y_1^2 + x^2}{y_1^2 + x^2} = \sup_{v \ge 0} \frac{1}{q}\, \frac{q^2 + v}{1 + v} = q;$$

точно так же оценивается и $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} \frac{P_{(y_1)}(x)}{P_{(qy_1)}(x)}$.

Ядром Фейера мы называем функцию

$$F : x \mapsto \left(\frac{\sin \pi x}{2\pi x}\right)^2, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

так что

$$\widehat{F}(\tau) = (1 - |\tau|)_+, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Положим ещё

$$K = P * F, \tag{2.7}$$

так что $K_{(\eta)} = P_{(\eta)} * F_{(\eta)}$, $\eta > 0$.

Ядра K и P сравнимы:

$$K \asymp P, \tag{2.8}$$

(здесь, как и всюду ниже, знак $\asymp$ означает, что $\frac{1}{c}K(t) \le P(t) \le cK(t)$ при любых $t \in \mathbb{R}$; c есть *абсолютная* постоянная). В справедливости оценки (2.8) можно убедиться, переходя к преобразованию Фурье и учитывая (2.3) и (2.6):

$$K(t) = 2\int_0^1 (1-\xi) e^{-2\pi\xi} \cos 2\pi\xi t\, d\xi, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Дважды интегрируя по частям, при больших $|t|$ получим ограниченность и отделенность от нуля произведения $K(t)t^2$, т.е. оценку (2.8). Полагая $K_j = K_{(2^{-j})}$, $P_j = P_{(2^{-j})}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, получим

$$K_j \asymp P_j \tag{2.10}$$

с теми же константами, что и в (2.8). Отметим, кроме того, что

$$\operatorname{spec} K_j = [2^{-j}, 2^j], \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.11}$$

Определению ядер h_j^∞ мы предпошлем определение ядер h_j^k:

$$h_j^k = (K_j * K_j) * (K_{j+1} * K_{j+1}) * \cdots * (K_{j+k} * K_{j+k}), \quad k, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.12}$$

Очевидно, h_j^k есть неотрицательное ядро, спектр которого совпадает с множеством $\operatorname{spec} K_j$.

Лемма 2.1. *При любом $j \in \mathbb{Z}_+$ последовательность $(h_j^k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Её предел (который мы обозначим через h_j^∞) есть непрерывное неотрицательное ядро, $\lim\limits_{|t|\to\infty} h_j^\infty(t) = 0$.*

Таким образом, ядро h_j^∞ можно воспринимать как бесконечное свёрточное произведение:

$$h_j^\infty = \prod_{*, s\ge j} (K_s * K_s), \quad j \ge 0. \tag{2.13}$$

Доказательство. Из (2.6) и (2.3) следует, что

$$\widehat{h_j^k}(\xi) = \prod_{s=j}^{j+k} (1 - 2^{-j}|\xi|)_+ e^{2\pi|\xi|2^{-s}}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.14}$$

Предел $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{h_j^k}(\xi) = \eta_j(\xi)$ существует при любом $\xi \in \mathbb{R}$, причем $|\widehat{h_j^k}|(\xi) \le e^{2\pi\cdot 2^{-j+1}|\xi|}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\xi \in \mathbb{R}$. Функцию h_j^∞ мы определим равенством

$$h_j^\infty(t) = \widehat{\eta}_j(-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

при любых $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, так что

$$|h_j^k(t) - h_j^\infty(t)| \le \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{h_j^k}(\xi) - \eta_j(\xi)|\, d\xi. \tag{2.15}$$

Последний интеграл стремится к нулю при $k \to \infty$, так как функции h_j^k, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеют общую суммируюмую мажоранту, и потому $\lim\limits_{k\to\infty} h_j^k = h_j^\infty$ равномерно на $\mathbb{R}$. Функция h_j^∞ суммируема на $\mathbb{R}$ по лемме Фату, а тогда из ее определения следует, что $\widehat{h_j^\infty} = \eta_j$. В частности, $\int\limits_{\mathbb{R}} h_j^\infty = \widehat{h_j^\infty}(0) = \eta_j(0) = 1$, так что h_j^∞ есть ядро. Остальное следует из непрерывности функций h_j^k, исчезающих на бесконечности. $\square$

Легко видеть, что $\operatorname{spec} h_j^\infty = [-2^j, 2^j]$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} &((F * F) * (F_1 * F_1) * \cdots * (F_j * F_j))(t) \\ =&2 \int\limits_0^1 \prod_{k=0}^{j} (1 - 2^{-k}\xi)^2 \cos 2\pi\xi t \, d\xi, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Интегрируя по частям, получаем, что левая часть в (2.16) не превосходит $cP(t)$, где $c > 0$ – абсолютная константа. Отсюда легко следует, что функция h_0^k не превосходит cP, и, соответственно $h_0^\infty \le cP$. Поскольку $h_j^\infty(t) \equiv 2^j h_0^\infty(t \cdot 2^j)$, получаем, что

$$h_j^\infty(t) \le cP_j(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

$c > 0$ – некоторая абсолютная постоянная.

2.3. Определим теперь комплексные функции X_j, $j \in \mathbb{Z}$. Для этого положим сначала

$$E_j(t) = e^{2\pi i \cdot 2^j t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.18}$$

а затем

$$X_j = \begin{cases} h_0^\infty & \text{при } \ j = 0, \\ h_j^\infty * (E_{j-1}K_{j-1}) & \text{при } \ j \ge 1, \\ \overline{X}_{-j} & \text{при } \ j < 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Функции X_j суммируемы на $\mathbb{R}$ (напомним, что $h_j^\infty \in L^1(\mathbb{R})$, $K_j \asymp P_j$) и ограничены. Заметим, что $\operatorname{spec} X_j = \operatorname{spec} h_j^\infty \cap \operatorname{spec} E_{j-1}K_{j-1} = [-2^j, 2^j] \cap [0, 2^j]$ при $j > 0$, так что

$$\begin{aligned} &\operatorname{spec} X_j = [0, 2^j] \qquad \text{при} \quad j > 0, \\ &\operatorname{spec} X_j = [-2^{|j|}, 0] \quad \text{при} \quad j < 0, \end{aligned} \tag{2.20}$$

а $\operatorname{spec} X_0 = [-1, 1]$.

2.4. Определение величин $B_f^*(x)$**.** Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$. Положим

$$B_f^*(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(|f * X_j| * P_{|j|} \right)(x). \tag{2.21}$$

Заметим, что функция $f * X_j$ ограничена, как свертка ограниченной и суммируемой функций, так что каждое слагаемое в сумме (2.21) имеет смысл.

3. Формулировка основного результата. Субпуассоновы функции

Основной результат нашей статьи таков.

Теорема 3.1. *Для произвольной функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ и любого вещественного x справедливы неравенства*

$$\frac{1}{c} B_f(x) \le B_f^*(x) \le c B_f(x), \tag{3.1}$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

3.1. Наше доказательство оценок (3.1) будет использовать следующую элементарную лемму о функциях, мажорируемых ядрами вида $P_{(\varepsilon)}$ (эта лемма играет важную роль в работах [1, 2]).

Лемма 3.1. *Предположим, что спектр функции ψ содержится в ограниченном промежутке I, так что*

$$\psi(t) = \int_I \widehat{\psi}(\tau) e^{2\pi i \tau t}\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

причем функция $\widehat{\psi}$ удовлетворяет следующим условиям:

(a) *$\widehat{\psi}$ липшицева на $\mathbb{R}$ и исчезает на $\mathbb{R} \setminus I$;*

(b) *$\widehat{\psi}'$ п.в. на I совпадает с функцией g, определённой и имеющей конечную вариацию на I;*

(c) $\| \widehat{\psi}' \|_\infty \le \frac{1}{|I|}$, $\operatorname{var} g \le \frac{1}{|I|}$.

Тогда при любом $t \in \mathbb{R}$ верна оценка

$$|\psi(t)| \le 2\pi P_{(\frac{1}{|I|})}(t). \tag{3.3}$$

Условия этой леммы выполняются, если $\operatorname{spec} \psi \subset I$, $\widehat{\psi} \in C^2(\mathbb{R})$ и $\| \widehat{\psi}'' \|_\infty \le \frac{1}{|I|^2}$, но нам будут нужны и функции $\widehat{\psi}$ с разрывной производной.

4. Подготовка к доказательству оценок (3.1): интервалы I_j и субпуассоновы функции Y_j

Положим

$$I_0 = \Big[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \Big]; \qquad I_j = [2^{j-2}, 3 \cdot 2^{j-2}] \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots; \qquad I_j = -I_{-j} \quad \text{при} \quad j = -1, -2, \ldots. \tag{4.1}$$

Очевидно, $I_j \Subset [0, 2^j], j > 0$, $I_0 \Subset [-1, 1]$, причем семейство $(I_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ образует покрытие прямой $\mathbb{R}$, и существует подчинённое ему разбиение единицы $(\sigma_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ такое, что:

$$\begin{gathered} \operatorname{supp}(\sigma_j) \subset I_j; \quad \sigma_j \in C^2(\mathbb{R}); \quad \sigma_j(x) = \sigma_{-j}(-x); \\ \sigma_j \geq 0; \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j \equiv 1; \quad \| \sigma_j^{(s)} \|_\infty \leq a \cdot 2^{-|j|s}, \\ s = 1, 2, \ \ j \in \mathbb{Z}, \ \ a > 0 \ \text{ – абсолютная постоянная.} \end{gathered} \tag{4.2}$$

4.1. Отметим следующие свойства функций X_j (см. (2.19)):

(a) функция $\widehat{X_j}$ непрерывно дифференцируема всюду, кроме концов и центра c_j промежутка $\operatorname{spec} X_j$;

(b) $|\widehat{X_j}(\tau)| \geq a$, если $\tau \in I_j$; (4.3)

(c) функция $\psi := X_j$ удовлетворяет условиям леммы 3.1 с $I = \operatorname{spec} X_j$, $c > 0$ – абсолютная постоянная, и в качестве g можно взять функцию, совпадающую с X_j' всюду, кроме центра c_j сегмента $\operatorname{spec} X_j$ (на концах $\operatorname{spec} X_j$ имеется в виду соответствующая одностороняя производная), а в точке c_j равную $\widehat{X_j}'(c_j + 0)$; $c_j = \operatorname{sign} j \cdot 2^{|j|}$.

Доказательство этого утверждения будет дано в п. 5.

4.2. Функции Y_j. Следуя [1], определим при $j \in \mathbb{Z}$ функцию Y_j, спектр которой содержится в $\operatorname{spec} X_j$, полагая сперва

$$\widehat{Y_j} = \frac{1}{\widehat{X_j}} \ \text{ в } \ I_j, \tag{4.4}$$

так что, вследствие п. 4.1, функция $\widehat{Y_j}$ липшицева на сегменте I_j, причем

$$\| \widehat{Y_j}' \|_{\infty, I_j} \leq \frac{a}{2^{|j|}}, \tag{4.5}$$

и

$$\begin{aligned}&\widehat{Y_j}' \ \text{ совпадает всюду в } I_j \setminus \{c_j\} \text{ с некоторой функцией } \ g_j \\ &\text{конечной вариации в } I_j, \ \ \text{причём } \ \operatorname{var} g_j \le \frac{a}{2^{|j|}},\end{aligned} \tag{4.6}$$

$a > 0$ – абсолютная постоянная. Вне $\operatorname{spec} X_j$ функция Y_j равна нулю, а в "зазоре" $\operatorname{spec} X_j \setminus I_j$ (длина которого сравнима с $|I_j|$) функцию $\widehat{Y_j}$ определим так, чтобы для $\psi = Y_j$, $I = \operatorname{spec} X_j$, выполнялись условия леммы 3.1 о субпуассоновости. Мы пришли к следующему результату:

$$\begin{aligned}&\varphi * X_j * Y_j = \varphi, \text{ если } \ \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \ \text{ и } \ \operatorname{spec} \varphi \subset I_j; \\ &|X_j(t)| + |Y_j(t)| \le A \cdot P_{|j|}(t), \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $A > 0$ – абсолютная постоянная.

5. Доказательство оценки

$$B_f \le c \cdot B_f^* \tag{5.1}$$

(см. (3.1)).

Мы ограничимся предположением, что (комплексная) функция $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ *суммируема* на $\mathbb{R}$ (в приложениях к оценкам аппроксимативных единиц и более общих сверточных операторов нам будут нужны только *финитные* $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, см. [7]). В таком случае при любом натуральном j и $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\left(f * (P_j - P_{j-1})\right)(u) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau) W_j(\tau) e^{2\pi i \tau u}\, d\tau; \\ &\left(f * P\right)(u) = \left(f * P_0\right)(u) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau) W_0(\tau) e^{2\pi i \tau u}\, d\tau,\end{aligned} \tag{5.2}$$

где W_j, $j > 0$, есть Фурье-образ функции $P_j - P_{j-1}$:

$$W_j(\tau) = \widetilde{E}_{-j}(\tau) - \widetilde{E}_{-j+1}(\tau), \quad j > 0, \tag{5.3}$$

а $\widetilde{E}_s(\tau) = e^{-2\pi \cdot 2^{-|s|}\tau}$, $s \in \mathbb{Z}$. Эти равенства верны, поскольку и функция $f * (P_j - P_{j-1})$, и ее Фурье-образ суммируемы.

Положим

$$c_{j,k} = 2^{j-|k|} e^{\frac{2\pi 2^{|k|-j}}{10}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.4}$$

а функции $Z_{j,k}$ при тех же j, k определим равенством

$$\widehat{Z_{j,k}} = c_{j,k} W_j \sigma_k, \tag{5.5}$$

где σ_k – разбиение единицы из п. 4. При любом натуральном j имеем

$$\begin{aligned} &(f * (P_j - P_{j-1}))(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau)\widehat{Z_{j,k}}(\tau) e^{2\pi i \tau u}\, d\tau, \quad u \in \mathbb{R}; \\ &(f * P)(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{0,k}^{-1} \widehat{f}(\tau)\widehat{Z_{0,k}}(\tau) e^{2\pi i\tau u}\, d\tau, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Функция $\widehat{Z_{j,k}}$ исчезает вне I_k и принадлежит $C^2(\mathbb{R})$. В этом пункте мы покажем, что

$$\left|\widehat{Z_{j,k}}''\right| \le a 2^{-2|k|} = \frac{a_1}{|I_k|^2} \tag{5.7}$$

(буквы $a, a_1, \ldots, b, b_1, \ldots, c, c_1, \ldots$ будут обозначать положительные абсолютные константы). Из леммы 3.1 (точнее, из замечания к ней) и из (5.7) будет следовать оценка

$$|Z_{j,k}| \le b \cdot P_{|k|}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{5.8}$$

Возвращаясь к (5.6), находим

$$\begin{aligned} |f * (P_j - P_{j-1})|(u) &= \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\tau)\widehat{Z_{j,k}}(\tau)\widehat{X_k}(\tau)\widehat{Y_k}(\tau) e^{2\pi i\tau u}\, d\tau \right| \\ &= \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}^{-1} (f * X_k) * Y_k * Z_k \right|(u) \le c \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}^{-1} |f * X_k| * P_{|k|} * P_{|k|} \right)(u) \\ &\le c_1 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}^{-1} |f * X_k| * P_{|k|} \right)(u) \end{aligned} \tag{5.9}$$

(мы воспользовались субпуассоновостью функций Y_k и $Z_{j,k}$ – см. (4.7) и (5.8) – и тем, что $\operatorname{spec} Z_{j,k} \subset I_k$, а $\widehat{X_k}\widehat{Y_k} = 1$ на I_k). Свернём левую и правую части оценки (5.9) с P_j и просуммируем по $j = 1, 2, \ldots$; учитывая (2.2), получим

$$
\begin{aligned}
B_f \leq & c_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}^{-1} |f * X_k| * P_{(2^{-|k|}+2^{-j})} \\
= & c_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f * X_k| * \left(\sum_{j<|k|} c_{j,k}^{-1} \cdot P_{(2^{-|k|}+2^{-j})} + \sum_{j\geq|k|} c_{j,k}^{-1} P_{(2^{-|k|}+2^{-j})} \right) \\
\leq & c_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f * X_k| * \left((I)(k) + (II)(k)\right). \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

Осталось проверить, что $(I)(k)+(II)(k) \leq c_3 P_{|k|}$, и мы получим (5.1). Оценим $(I)(k)$. Если $j \leq |k|$, то $2^{-j} + 2^{-|k|} \leq 2 \cdot 2^{-j}$ и $P_{(2^{-j}+2^{-|k|})} \leq 2P_{2^{-j}} \leq 2 \cdot 2^{|k|-j} P_{|k|}$, и

$$
\begin{aligned}
(I)(k) \leq 2 \sum_{j=1}^{|k|-1} c_{j,k}^{-1} 2^{|k|-j} P_{|k|} = 2 \sum_{j=1}^{|k|-1} 2^{2(|k|-j)} e^{-\frac{2\pi 2^{|k|-j}}{10}} P_{|k|} \\
\leq 2 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} 2^{2p} e^{-\frac{-2\pi p}{10}} \right) P_{|k|} = c_3 P_{|k|}. \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

Далее, при $j \geq k$ справедливы неравенства $P_{(2^{-|k|}+2^{-j})} \leq 2P_{(2^{-|k|})}$ и

$$
(II)(k) \leq 2 \left(\sum_{j=|k|}^{+\infty} c_{j,k}^{-1} \right) P_{|k|} \leq \left(2 \sum_{j=|k|}^{+\infty} 2^{|k|-j} \right) P_{|k|} \leq 4P_{|k|}. \qquad (5.12)
$$

Из (5.10) будет следовать (5.1) – когда мы докажем оценку (5.8).

5.1. Оценка (5.8). Вне I_k функция $\widehat{Z_{j,k}}$ исчезает, а при $\tau \in I_k$ имеем

$$
\left| \widehat{Z_{j,k}}'' \right| (\tau) \leq c_{j,k} \left(2^{-2|k|} |W_j|(\tau) + 2^{-k} |W_j'|(\tau) + |W_j''|(\tau) \right), \qquad (5.13)
$$

поскольку $|\sigma_k^{(s)}| \leq b 2^{-s|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$, $s = 0, 1, 2$ (см. п. 4). Далее, при $\tau \in I_k$, очевидно, $|\tau| \asymp 2^{|k|}$, и

$$
\begin{aligned}
& c_{j,k} |W_j|(\tau) = c_{j,k} \left(e^{-2\pi|\tau|2^{-j}} - e^{-2\pi|\tau|2^{-j+1}} \right) \\
= & c_{j,k} e^{-2\pi|\tau|2^{-j}} \left(1 - e^{-2\pi|\tau|2^{-j}} \right) \leq e^{-(\frac{2\pi}{8} - \frac{2\pi}{10}) \cdot 2^{-j}} \left(1 - e^{-b 2^{|k|-j}} \right) \cdot 2^{j-|k|} \\
\leq & \frac{(1 - e^{-bx})}{x} \leq c, \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

(здесь $x = 2^{|k|-j}$, a, b и c – абсолютные постоянные). Далее, $|1 - 2e^{-y}| \le 1$ при $y > 0$, и

$$\begin{aligned} c_{j,k}|W_j'|(\tau) &= c_{j,k} \cdot 2\pi \cdot 2^{-j} e^{-2\pi|\tau|\cdot 2^{-j}} \left|1 - 2e^{-2\pi|\tau|2^{-j}}\right| \\ &\le 2\pi \cdot e^{-2\pi\frac{2-j}{40}} \cdot 2^{-j} \cdot 2^{j-|k|} \le 2\pi 2^{-|k|}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Наконец, при $\tau \in I_k$, учитывая, что $|1 - 4e^{-y}| \le 3$, $y > 0$, получим

$$\begin{aligned} c_{j,k}|W_j''|(\tau) &= c_{j,k}(4\pi)^2 2^{-2j} e^{-2\pi|\tau|2^{-j}} \left|1 - 4e^{-2\pi|\tau|2^{-j}}\right| \\ &\le (4\pi)^2 2^{-|k|+j} 2^{-2j} e^{-\frac{2\pi}{40}|\tau|2^{-j}} \cdot 3 \\ &= c_1 2^{-2|k|} 2^{|k|-j} e^{-c_2 2^{|k|-j}} = c_1 x e^{-c_2 x} 2^{-2|k|} \le c_3 2^{-2|k|} \end{aligned} \tag{5.16}$$

(здесь $x = 2^{|k|-j}$). Из (5.13) и оценок (5.14)–(5.16) следует (5.7). Оценка (5.1) доказана.

6. Доказательство оценки

$$B_f^* \le C \cdot B_f. \tag{6.1}$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} &(|f * (E_{j-1}F_{j-1})| * P_j)(x) \qquad (6.2) \\ =&\left(\left|\int_0^{2^j} \widehat{f}(\tau)(1 - 2^{-j+1}|\tau - 2^{j-1}|)e^{2\pi i t\tau}\,d\tau\right| * P_j\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad j > 0. \end{aligned}$$

Используя разбиение единицы из п. 3, получим

$$\begin{aligned} &\big(|f * (E_{|j|-1}F_{|j|-1})| * P_{|j|}\big)(x) \\ \le&\left(\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{|k|-|j|} \int\limits_{\operatorname{spec}\sigma_k} \widehat{f}(\tau)\widehat{V_{j,k}}(\tau)\widehat{T_k}(\tau)\widehat{U_k}(\tau)e^{2\pi i x\tau}\,d\tau\right| * P_{|j|}\right)(x) \\ \le& c \sum_{k=0}^{j+\operatorname{sign} j} 2^{|k|-|j|} \big(|f * T_k| * |V_{j,k}| * P_{|j|} * |U_{|k|}|\big)(x), \end{aligned} \tag{6.3}$$

где $\widehat{V_{j,k}} = 2^{|j|-|k|}\sigma_k(\widehat{E_{|j|-1}F_{|j|-1}})$; $T_k := P_{|k|} - P_{|k|-1}$, $k \neq 0$, $T_0 = P$, а спектр функции U_k содержится в промежутке $[0, 2^k]$ при $k > 0$, в $[-2^{|k|}, 0]$ при $k < 0$ и в $[-1, 1]$ при $k = 0$, причем $\widehat{U_k} = \frac{1}{\widehat{T_k}}$ на I_k, $U_k \in C^2(\mathbb{R})$, $|\widehat{U_k}''| \leq c \cdot 2^{-2|k|}$, если $k \neq 0$, так что $|U_k| \leq c \cdot P_{|k|}$ (в том числе и при $k = 0$); существование таких U_k обосновывается ниже в п. 9.

Легко показать, что функция $V_{j,k}$ удовлетворяет условию леммы 3.1 с $I = I_k$. Действительно $\operatorname{spec} V_{j,k} = I_k$, и, кроме того, $V_{j,k}$ имеет непрерывную производную всюду, кроме точки $c_j = \operatorname{sign} j 2^{|j|-1}$ и концов отрезка $[0, \operatorname{sign} j 2^{|j|}]$. Из (4.2) и (2.6) получаем

$$|\widehat{V_{j,k}}'|(\tau) \leq c \cdot 2^{|j|-|k|} 2^{-|j|} = c \cdot 2^{-|k|}, \quad \tau \neq c_j, \tag{6.4}$$

а в точке c_j производная совершает скачок, не превосходящий $c \cdot 2^{-|k|}$. Точно так же получаем, что $\operatorname{var} |\widehat{V_{j,k}}'| \leq c \cdot 2^{-|k|}$. Таким образом,

$$|V_{j,k}| \leq c \cdot P_{|k|}. \tag{6.5}$$

Пользуясь оценками п. 9, запишем

$$\sum_{k=0}^{j+\operatorname{sign} j} 2^{|k|-|j|} |f * T_k| * |V_{j,k}| * P_{|j|} * |U_{|k|}| \leq \sum_{k=0}^{j+\operatorname{sign} j} 2^{|k|-|j|} |f * T_k| * P_{|j|+|k|}$$
$$\leq 8 \cdot \sum_{k=0}^{j+\operatorname{sign} j} 2^{|k|-|j|} |f * T_k| * P_{|k|}, \tag{6.6}$$

здесь мы воспользовались оценкой (2.4) и тем, что $|k| \leq |j| + 1$. Просуммировав левую часть в (6.6) по $j \in \mathbb{Z}$, получим

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f * (E_{|j|-1}F_{|j|-1})| * P_{|j|} \leq 8 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \cdot \sum_{k=0}^{j+\operatorname{sign} j} 2^{|k|-|j|} |f * T_k| * P_{|k|}$$
$$\leq 32 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f * T_k| * P_{|k|}. \tag{6.7}$$

Чтобы доказать неравенство (6.1), осталось заметить, что

$$|f * X_k| * P_{|k|} = |f * h_k^\infty * (E_{|k|-1}P_{|k|-1}) * (E_{|k|-1}F_{|k|-1})| * P_{|k|}$$
$$\leq c \cdot |f * (E_{|k|-1}F_{|k|-1})| * P_{|k|};$$
$$|f * h_0^\infty| \leq 4|f * P|, \tag{6.8}$$

где $c > 0$ некоторая абсолютная постоянная.

7. Доказательство утверждений (a)–(c) п. 4.1

(a) При $j = 0$ утверждение очевидно. Если $j < 0$, то $\widehat{X_j}(\tau) \equiv \widehat{X_{|j|}}(-\tau)$, так что можно считать, что $j \geq 0$. Если $\tau \in \operatorname{spec} X_j$, а $p \geq j$, то $\widehat{K_p * K_p}(\tau) = e^{-2\pi\tau 2^{-p+1}}(1 - 2^{-p}\tau)^2$; на множестве $\operatorname{spec} X_j = [0, 2^j]$ функция $\widehat{h_j^\infty}$ совпадает с целой функцией

$$\tau \to (e^{-2\pi\tau 2^{-p+2}})\Big(\prod_{p\geq j}(1 - 2^{-p}\tau)^2\Big) = (I)(II),$$

а

$$\begin{aligned}\widehat{X_j}(\tau) &= (I)(II)(1 - 2^{-j+1}|\tau - 2^{j-1}|)(e^{-2\pi 2^{-j+1}|\tau - 2^{j-1}|})\\ &= (I)(II)(III)(IV).\end{aligned} \tag{7.1}$$

Вне множества $\operatorname{spec} X_j$ функция $\widehat{X_j}$ равна нулю, и утверждение (a) доказано. Заметим, что $(I), (II), (III), (IV) \in [0, 1]$, и единственный в $[0, 2^j]$ скачок функции $\widehat{X_j}'$ в точке 2^{j-1} проистекает от множителей (III) и (IV) и не превышает $c \cdot 2^{-j}$ по абсолютной величине.

(b) При $\tau \in \operatorname{spec} X_j = [0, 2^j]$ и $p \geq j$, очевидно, $(I) \geq e^{-2\pi}$. Далее, при $\tau \in I_j$, очевидно, $0 \leq \tau \leq \theta 2^j$, $0 < \theta < 1$, и $(II) \geq \prod_{s=0}^\infty (1 - \theta 2^{-s})^2 > e^{-5}$. Если $\tau \in I_j$, то $|\tau - 2^{j-1}| \leq \frac{2}{3}2^{j-1}$, и $(III) \geq 1 - \frac{2}{3} > 0$, а $(IV) \geq e^{-2\pi\frac{2}{3}}$, и утверждение (b) доказано.

(c) Используя оценку скачка функции $\widehat{X_j}'$ в точке $c_j = 2^{j-1}$, мы видим, что достаточно доказать оценки

$$|\widehat{X_j}'| \leq c2^{-j}, \ |\widehat{X_j}''| \leq c2^{-2j} \tag{7.2}$$

на $I_j \setminus \{c_j\}$, так как из них будет следовать, что $\operatorname{var}_{I_j} \widehat{X_j} \leq c2^{-j}$. Из (7.1) и из (2.8) следует, что функция $\widehat{X_j}$ отделена от нуля и не превосходит единицы на I_j. Оценим производную $(\log \widehat{X_j})'(\tau)$ при $\tau \in I_j \setminus \{c_j\}$:

$$\begin{aligned}|(\log \widehat{X_j})'(\tau)| = \bigg| &- 2\pi 2^{-j-2} + \sum_{p\geq j} \frac{2 \cdot 2^{-p}}{1 - 2^{-p}\tau}\\ &+ \frac{\operatorname{sign}(2^{j-1} - \tau)2^{-j+1}}{1 - 2^{-j+1}|\tau - 2^{j-1}|} + 2\pi \operatorname{sign}(2^{j-1} - \tau)2^{-j+1}\bigg| \leq a2^{-j},\end{aligned} \tag{7.3}$$

так что $|\widehat{X_j}'(\tau)| = |\widehat{X_j}(\tau)||(\log\widehat{X_j})'(\tau)| \le B2^{-j}$.

Далее, при тех же τ имеем

$$|(\log\widehat{X_j})''(\tau)| = \left|\sum_{p\ge j}\frac{2\cdot 2^{-2p}}{(1-2^{-p}\tau)^2} + \frac{2^{2(j-1)}}{(1-2^{-j+1}|\tau-2^{j-1}|)^2}\right| \le C\cdot 2^{-2j}.$$

Остается заметить, что

$$\widehat{X_j}'' = \widehat{X_j}\left((\log(\widehat{X_j}))'' + \left(\frac{\widehat{X_j}'}{\widehat{X_j}}^2\right)\right).$$

В заключение рассмотрим интегральный аналог величины B_f^*, о котором говорилось во Введении.

8. Усреднённая вертикальная вариация $(\mathrm{Mvar}\, f)(x)$

Для функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ и числа $x \in \mathbb{R}$ положим

$$(\mathrm{Mvar}\, f)(x) = (|f*P|*P)(x) + \int\limits_0^1 \left(\left|f*\frac{\partial P_{(y)}}{\partial y}\right| * P_{(y)}\right)(x)\,dy. \quad (8.1)$$

Убрав слагаемое $|f*P|*P$ и последнюю свёртку с $P_{(y)}$, мы получим “вертикальную” вариацию $\mathrm{Vvar}\, f(x)$ (то есть вариацию вдоль вертикального отрезка $(x, x+i]$ функции $y \to (F*P_{(y)})(x))$, а величину (8.1) можно воспринимать как своего рода усреднение “вертикальной вариации”. В этом пункте мы покажем, что

$$\frac{1}{c}B_f(x) \le \mathrm{Mvar}\, f(x) \le cB_f(x), \quad (8.2)$$

где c – положительная абсолютная постоянная. Докажем левое неравенство:

$$(\mathrm{Mvar}\, f)(x) = (|f*P|*P)(x) + \sum_{j=0}^\infty \int\limits_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \left(|f*\frac{\partial P_{(y)}}{\partial y}| * P_{(y)}\right)(x)\,dy$$

$$\ge (|f*P|*P)(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^\infty \int\limits_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \left(|f*\frac{\partial P_{(y)}}{\partial y}| * P_{(2^{-j})}\right)(x)\,dy \quad (8.3)$$

$$\geq (|f * P| * P)(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\Big|\int\limits_{2^{-j}}^{2^{-j+1}}(f * \frac{\partial P_{(y)}}{\partial y})\,dy\Big| * P_{(2^{-j})}\Big)(x) = \frac{1}{2}B_f(x),$$

мы воспользовались оценкой (2.4) из п. 2. Осталось доказать правое неравенство в (8.2). Положим $u(t,y) = (f * P_{(y)})(t), t \in \mathbb{R}, y > 0$. Имеем:

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\Big| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\tau)e^{-2\pi y|\tau|}e^{2\pi i\tau t}\,d\tau\Big|$$

$$=\Big|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\limits_{\mathbb{R}}2^{|j|}e^{-2\pi y 2^{|j|}/10}\widehat{f}(\tau)\widehat{V_{j,y}}(\tau)e^{2\pi i\tau t}\,d\tau\Big|, \tag{8.4}$$

где $\widehat{V_{j,y}}(\tau) = \frac{|\tau|}{2^{|j|}}\sigma_j e^{-2\pi y(|\tau| - \frac{2^{|j|}}{10})}$, $t \neq 0$, а $(\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ – разбиение единицы, построенное в п. 3. При $j \neq 0$ к гладкой функции $\widehat{V_{j,y}}$ применимо замечание к лемме 3.1, а к $\widehat{V_{0,y}}$ – сама эта лемма, так что

$$|V_{j,y}| \leq c \cdot P_j \tag{8.5}$$

на всей прямой $\mathbb{R}$, причем (см. ниже п. 9) константа не зависит ни от j, ни от y. Далее,

$$\widehat{V_{j,y}} \cdot \widehat{T_j} \cdot \widehat{U_j} = \widehat{V_{j,y}}, \tag{8.6}$$

T_j, U_j были определены в п. 6.

Возвращаясь к оценке, учитывая (8.5) и субпуассоновость функций T_j, U_j, получаем при любых $t \in \mathbb{R}$, $y > 0$:

$$|\frac{\partial u}{\partial y}(t,y)| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} c 2^{|j|}e^{-2\pi y|\tau|\frac{2^{|j|}}{10}}\left(|f * T_j| * P_{|j|}\right)(t). \tag{8.7}$$

Остаётся свернуть обе части в (8.7) с $P_{(y)}$, проинтегрировать по y от 0 до 1 и проверить, что при любых $t \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_0^1 2^j e^{-A2^j y}(P_{|j|} * P_{(y)})(t)\,dy \leq c \cdot P_{|j|}(t). \tag{8.8}$$

Докажем эту оценку. Интеграл слева равен $\int\limits_0^{2^{-j}} + \int\limits_{2^{-j}}^1 = (I) + (II)$. Далее, при $y \in (0, 2^{-j}]$ имеем

$$P_{|j|} * P_{(y)} = P_{(2^{-|j|}+y)} \leq cP_{2\cdot 2^{-|j|}} \leq c_1 P_{|j|}$$

(см. п. 2) и

$$(I)(t) \le c_1 P_{|j|}(t) \int\limits_0^\infty e^{-Au}\,du = \frac{c_1}{A} P_{|j|}(t).$$

Наконец, полагая $u = 2^{|j|}y$ в (II), находим:

$$\begin{aligned}(II) = &\int\limits_1^{2^{|j|}} e^{-Au} P_{(2^{-|j|}(1+u))}(t)\,du\\ =&e^{tA} \int\limits_2^{2^{|j|}+1} e^{-Av} P_{(2^{-|j|}v)}(t)\,dv \\ =&e^{tA} \int\limits_2^{2^{|j|}+1} e^{-Av} \frac{2^{-j}v}{2^{-2|j|}v^2+t^2}\,dv.\end{aligned} \tag{8.9}$$

Если $|t| \le 2^{-|j|}$, то $P_{|j|}(t) \asymp 2^{|j|}$, а $(II) \le e^A \left(\int\limits_0^\infty (\frac{e^{-Av}}{v})\,dv\right) \cdot 2^{|j|}$, так что $(II)(t) \le cP_{|j|}(t)$. Если $t = s2^{-|j|}$, $s \ge 1$, то

$$(II)(t) \le 2^{|j|}e^A \int\limits_2^\infty e^{-Av} \frac{v\,dv}{v^2+s^2} \le e^A 2^{|j|}\biggl(\int\limits_2^\infty e^{-Av} v\,dv\biggr)/s^2,$$

тогда $P_{|j|}(t) = \frac{1}{\pi}\ \frac{2^{|j|}}{1+s^2}$, так что и при $|t| \ge 2^{-j}$ имеем $(II)(t) \le cP_{|j|}(t)$. Оценка (8.8), а с ней и (8.2) доказаны.

9. Оценки функций $V_{j,y}$ и $\widehat{T_j}$

(а) Оценим $\widehat{V_{j,y}}''$, считая, что $\tau \in I_j$, а $j > 0$, и полагая $\alpha_{j,y}(\tau) = e^{-2\pi y(\tau - \frac{2^j}{10})}$. Имеем:

$$\begin{aligned}|\widehat{V_{j,y}}''(\tau)| &= 2^{-j}|2(\sigma_j\alpha_{j,y})'(\tau) + \tau(\alpha_{j,y}\sigma_j)''(\tau)|\\ &= 2^{-j}|2\sigma_j(\tau)\alpha'_{j,y}(\tau) + 2\sigma'_j(\tau)\alpha_{j,y}(\tau)\\ &+ (\alpha''_{j,y}(\tau)\sigma_j(\tau) + 2\alpha'_{j,y}(\tau)\sigma_j(\tau) + \sigma''_j(\tau)\alpha_{j,y}(\tau))\tau|\\ &\le 2|\alpha'_{j,y}(\tau)|2^{-j} + 2\cdot 2^{-j}c2^{-j}\alpha_{j,y}(\tau) + |\alpha''_{j,y}(\tau)| + |\alpha''_{j,y}(\tau)|\\ &+ 2|\alpha'_{j,y}(\tau)|\cdot 2^{-j} + c2^{-2j}.\end{aligned} \tag{9.1}$$

Теперь учтём, что $\tau - \frac{2^{|j|}}{10} \ge c \cdot 2^j$, если $\tau \in I_j$, так что

$$|\alpha'_{j,y}(\tau)| \le cye^{-c_1 2^j y} = cy2^j e^{-c_1 2^j y} \cdot 2^{-j} \le c_2 \cdot 2^{-j};$$

$$|\alpha''_{j,y}(\tau)| \le c_3 y^2 e^{-c_1 2^j y} = c_3 2^{-2j} \cdot ((2^j y)^2 e^{-c_1 2^j y}) \le c_4 2^{-2j}.$$

Возвращаясь к $\widehat{V_{j,y}}$, заключаем, что $|\widehat{V_{j,y}}''(\tau)| \le c2^{-2j}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Так как выполняется (4.2), то $\widehat{V_{j,y}}(\tau) = \widehat{V_{-j,y}}(-\tau)$, т.е. тем самым все вышесказанное верно и для отрицательных j.

(b) Оценки функций T_j. Субпуассоновость этих функций видна из их определения, однако для установления субпуассоновости функций U_j нам придётся оценить $\widehat{T_j}$, $\widehat{T_j}'$ и $\widehat{T_j}''$ на I_j. Имеем:

$$|\widehat{T_j}(\tau)| = |e^{-2\pi\tau 2^{-j}} - e^{-2\pi\tau 2^{-j+1}}| = e^{-2\pi\tau \cdot 2^{-j}}|1 - e^{-2\pi\tau 2^{-j+1}}|,$$

так что функция $\widehat{T_j}$ ограничена и отделена от нуля на I_j абсолютными константами. Оценки $|\widehat{T_j}'|\Big|_{I_j} \le c2^{-j}$, $|\widehat{T_j}''|\Big|_{I_j} \le c2^{-2j}$ очевидны. Из них и из оценки $|\widehat{T_j}| \asymp 1$ на I_j следуют аналогичные оценки и для $\widehat{U_j} = \frac{1}{\widehat{T_j}}$ на I_j, и, тем самым, существование гладкой функции $U_j \in C^2(\mathbb{R})$, о которой говорилось в п. 8.

Литература

1. J. Bourgain, *On the radial variation of bounded analytic functions on the disc.* — Duke Math. J. **69**, No. 3 (1993), 671–682.
2. Ж. Бургейн, *Ограниченность вариации свёрток мер.* — Матем. заметки. **54** (1993), вып. 4. 25–34.
3. W. Rudin, *The radial variation of analytic functions.* — Duke Math. J. **22** (1955), 235–242.
4. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* Наука, М., (1974).
5. M. D. O'Neill, *Vertical variation of harmonic functions in upper half spaces.* — Colloq. Math. **87** (2001), 1–12.
6. P. Jones, *A complete bounded submanifold of* $\mathbb{C}^3$. — Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 305–306.
7. П. А. Мозоляко, В. П. Хавин, *О сильной сходимости аппроксимативных единиц.* (Готовится к публикации).

Mozolyako P. A. On the definition of B-points.

This paper is devoted to the study of the so-called Bourgain points (B-points) of functions in $L^\infty(\mathbb{R})$. In 1993, Bourgain showed that for real-valued bounded function f the set E_f of B-points is everywhere dense and has maximal Hausdorff dimension, $\dim_H(E_f) = 1$; also the vertical variation of the harmonic extension of f to the upper half-plane is finite at B-points. An essentially simpler definition of B-points is given compared with the original works by Bourgain. A geometric characterization of the B-points of Cantor-like sets is obtained.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: pmzlcroak@gmail.com

Поступило 23 апреля 2008 г.