A. F. Kryuchkov, Finite galois modules, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 86, 125–134

А.Ф.Крючков

КОНЕЧНЫЕ МОДУЛИ ГАЛУА

В работе исследуются арифметические инварианты алгебраических торов, встречающихся в задаче погружения числовых полей с абелевым ядром. Получена также формула для вычисления ядра слабой аппроксимации в произвольных торах под глобальными полями. Из результатов выведен ряд следствий.

Введение

Пусть k - глобальное поле, $\bar{k}$ - его алгебраическое замыкание и A - конечная группа, являющаяся $Gal(\bar{k}/k)$ -модулем. Положим $\hat{A}=Hom_{\mathbb{Z}}(A,\bar{k}^{*})$ - группа характеров группы A и рассмотрим стандартную последовательность [I],[4]

$$0\to\hat{\mathcal{U}}\to\mathbb{Z}[\hat{A}]\to\hat{A}\to 0 \qquad (а)$$

$Gal(\bar{k}/k)$ -модулей, а также дуальную к ней последовательность алгебраических торов

$$1\to A\to P\to\mathcal{U}\to 1\ . \qquad (б)$$

Последняя представляет собой изогению торов, причем тор P k-рационален, так как $\hat{P}=\mathbb{Z}[\hat{A}]$ - пермутационный модуль и кроме того $H^1(k,P)=0$ [2]. Используя последовательность (а) нетрудно показать, что $H^1(\Pi,\hat{\mathcal{U}})=0$ для любой подгруппы $\Pi\subset Gal(\bar{k}/k)$. В работе автора [4] начато изучение арифметических инвариантов тора $\mathcal{U}$. Целью настоящей работы является дальнейшее их изучение и применение.

§ I посвящен слабой аппроксимации в произвольных торах над глобальным полем, и теорема I дает общую формулу для вычисления этого арифметического инварианта. Эта формула позволяет получить многие известные вычисления слабой аппроксимации, принадлежащие В.Е.Воскресенскому. Доказательство теоремы I почти дословно повторяет доказательство одного ее частного случая, рассмотренного автором в [4]. Как стало известно автору, теорема I независимо доказана также в недавней работе [9] стр.2I9. Аналогичную формулу (теорема 2) можно получить и для тора $\mathcal{U}$. В § 2 выявлена арифметическая природа девятичленной последовательности Тэйта и вычислена группа $H^1(k,Pic\,\bar{V}(\mathcal{U}))$. § 3 посвящен изучению связи различных понятий для тора $\mathcal{U}$ с задачей погружения полей с абелевым ядром. Наконец, в § 4, тор $\mathcal{U}$ рассматривается применительно к полупростым группам и, по модулю гипотезы Вейля, вычисляются числа Тамагавы одного класса редуктивных групп, аналогичных рассматриваемым Оно [13].

§ 1. Слабая аппроксимация в алгебраических торах

Пусть T - произвольный тор над глобальным полем k, K - некоторое поле разложения T, и $F=Gal(K/k)$. Группа рациональных k-точек $T(k)$ тора T вкладывается диагональным образом в группу $\prod_v T(k_v)$, где произведение берется по всем нормированиям k. Фактормножество $A(T)=\prod_v T(k_v)/\overline{T(k)}$, причем замыкание берется в v-адической топологии, называется ядром слабой аппроксимации тора T и представляет собой важный арифметический инвариант. Положим $A(T,S)=\prod_{v\in S} T(k_v)/\overline{T(k)}$, где S - некоторое конечное множество нормирований. Известно [2], что $A(T)$ - конечная группа и $A(T,S)=A(T)$, если только S содержит все нормирования k с нециклическими группами разложения. В дальнейшем мы рассматриваем только такие S. В [2] $A(T)$ вычислена в некоторых частных случаях. Целью этого параграфа является получение одной общей формулы для $A(T)$. Пусть

$$0\longrightarrow\hat{T}\longrightarrow\hat{M}\longrightarrow \operatorname{Pic}V_K(T)=\hat{N}\longrightarrow 0 \qquad (1)$$

каноническая резольвента для тора T [2], где $\hat{T}=\operatorname{Hom}(T,\bar{k}^{*})=\operatorname{Hom}(T,K^{*})$, а M и N торы, причем M k-рационален. Рассмотрим естественное отображение

$$\alpha_1: H^1(F,N(K))\longrightarrow \prod_{v\in S} H^1(F_v,N(K_w))$$

где $F_v=Gal(K_w/k_v)$ для какого-либо продолжения w нормирования v. Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. $A(T)=\prod_{v\in S} H^1(F_v,N(K_w))/\operatorname{Im}\alpha_1$, т.е. $A(T)=\operatorname{coker}\alpha_1$ для произвольного тора T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем точную последовательность торов над k, двойственную (1)

$$1\longrightarrow N\longrightarrow M\longrightarrow T\longrightarrow 1 \qquad (2)$$

а также следующую коммутативную диаграмму из работы [4], индуцированную этой последовательностью

$$\begin{array}{ccccccc}
M(k) & \xrightarrow{\gamma_2} & T(k) & \xrightarrow{\gamma_1} & H^1(F,N) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \\
\prod\limits_{v\in S} M(k_v) & \xrightarrow{\beta_2} & \prod\limits_{v\in S} T(k_v) & \xrightarrow{\beta_1} & \prod\limits_{v\in S} H^1(F_v,N) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(I). В [4] показано, что $A(T)=0 \Longleftrightarrow \alpha_1$ – эпиморфизм, так что в этом случае $A(T)=\operatorname{coker}\alpha_1$.

(II). Пусть теперь $A(T)\neq 0$ и, следовательно, α_1 не эпиморфно. Возьмем $x\in \prod\limits_{v\in S} T(k_v)\setminus \alpha_2(T(k))$ и положим $y=\beta_1(x)$. Докажем, что $y\notin \operatorname{Im}\alpha_1$. Предположим, что $y\in \operatorname{Im}\alpha_1$, тогда найдутся $z\in H^1(F,N)$ и $t\in T(k)$ такие, что $\alpha_1\gamma_1(t)= =\alpha_1(z)=y$. Так как $\beta_1\alpha_2(t)=y$ также, то $x[\alpha_2(t)]^{-1} \in\ker\beta_1$, а тогда найдется $u\in\prod\limits_{v\in S} M(k_v)$ такое, что $\beta_2(u)=x[\alpha_2(t)]^{-1}$. Тор M рационален, поэтому $A(M)=0$. Следовательно, элемент u может быть аппроксимирован с любой степенью точности некоторой последовательностью элементов $u_n\in M(k)$ но, тогда и x аппроксимируется с любой степенью точности последовательностью $\gamma_2(u_n)\cdot t\in T(k)$. Полученное противоречие показывает, что $y\in \overline{\operatorname{Im}\alpha_1}$.

Рассмотрим теперь отображение смежных классов $\varphi: x\operatorname{Im}\alpha_2\longrightarrow \beta_1(x)\operatorname{Im}\alpha_1$. Это очевидно, гомоморфизм. Докажем, что φ эпиморфизм. Возьмем класс $y\operatorname{Im}\alpha_1$, $y\notin\operatorname{Im}\alpha_1$, тогда найдется $x\in\prod\limits_{v\in S} T(k_v)$ такой, что $\beta_1(x)=y$. Этот $x\notin \overline{\operatorname{Im}\alpha_2}$, убедимся в этом. Гомоморфизм β_2 открыт в v-адической топологии, следовательно, найдется такая окрестность единицы E в $\prod\limits_{v\in S} T(k_v)$, что $\beta_1(E)=0$. Если $x\in\overline{\operatorname{Im}\alpha_1}$, то $x\in\operatorname{Im}\alpha_2\cdot E$, т.е. представляется в виде $\alpha_2(t)\cdot a$, где $a\in E$, $t\in T(k)$. Но тогда $\alpha_1\gamma_1(t)=\beta_1\alpha_2(t)=\beta_1(x)=y$. Нам осталось показать мономорфность φ.

Пусть $x_1\operatorname{Im}\alpha_2$ и $x_2\operatorname{Im}\alpha_2$ такие, что $x_2^{-1}x_1\notin\overline{\operatorname{Im}\alpha_2}$ переходят в один класс $y\operatorname{Im}\alpha_1$. Так как $\beta_1(x_1)=\beta_1(x_2)= =y$, $x_2^{-1}x_1\in\ker\beta_1$. Рассуждая тогда как и выше, находим, что $x_2^{-1}x_1\in\overline{\operatorname{Im}\alpha_2}$, значит, $x_1\in x_2\overline{\operatorname{Im}\alpha_2}$, а мы предполагали, что классы $x_1\operatorname{Im}\alpha_2$ и $x_2\operatorname{Im}\alpha_2$ различны. Следовательно, φ – изоморфизм и, легко видеть, канонический. Теорема I доказана.

Предположим теперь, что в классе, изогенных T торов, существует тор T_1, такой что $\hat{T}_1$ – пермутационный модуль, и

$$1 \longrightarrow B \longrightarrow T_1 \longrightarrow T \longrightarrow 1 \qquad (3)$$

соответствующая изогения. Пусть также K содержит первообразный корень ξ из I степени равной периоду B. Последнее предположение, однако, несущественно, так как в противном случае $K(\xi)$ также поле разложения T, поэтому вместо K всюду можно взять $K(\xi)$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. $A(T)=\prod_{v\in S} H^1(F,B)/\mathrm{Im}\,\alpha_B$, где α_B естественное отображение $H^1(F,B) \longrightarrow \prod_{v\in S} H^1(F_v,B)$.

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично доказательству теоремы I с заменой последовательности (2) на (3).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Торы $\mathcal{U}$, возникающие в задаче погружения с абелевым ядром (а), удовлетворяют условиям теоремы 2 и для них, следовательно, справедливы обе формулы для слабой аппроксимации.

СЛЕДСТВИЕ I. Если все группы разложения поля K цикличны, то $A(T)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $H^1(F_v, N(K_w)) = H^1(F_v, \hat{N}) = 0$ для всех v, по теореме I, следовательно, $A(T)=\mathrm{coker}\,\alpha_1=0$.

Такая ситуация встречается когда:

I) F – циклическая группа;

2) $K=\mathbb{Q}(\sqrt{5},\sqrt{29})$, а $k=\mathbb{Q}$ и т.д.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $H^1(F,\mathrm{Pic}\,V_K(T))=0$, то $A(T)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем точную последовательность $0 \longrightarrow K \longrightarrow J_K \longrightarrow C_K \longrightarrow 0$, где J_K и C_K группы иделей и классов иделей соответственно. Эта последовательность порождает следующую точную последовательность для тора $N=\widehat{\mathrm{Pic}\,V_K}(T)$

$$1 \longrightarrow N(K) \longrightarrow N(A_K) \longrightarrow C_K(N) \longrightarrow 1 \qquad (4)$$

Здесь A_K – кольцо аделей поля K, а

$$C_K(N) = N(A_K)/N(K).$$

Переходим в (4) к когомологиям:

$$H^1(F,N(K)) \longrightarrow H^1(F,N(A_K)) \longrightarrow H^1(F,C_K(N)).$$

По двойственности Накаяма

$$H^1(F,C_K(N)) \approx H^1(F,\hat{N}) = H^1(F,\mathrm{Pic}\,V_K(T)) = 0.$$

Непосредственно проверяется, что α и α_1 это одно и то же.

Поэтому $\mathrm{coker}\,\alpha_1 = 0$.

Группа $H^1(F, \widehat{\mathrm{Pic}\,V_K}(T))$, участвующая в формуле теоремы I, является бирациональным инвариантом тора T . В самое последнее время было установлено, что она представляет собой группу классов R - эквивалентности тора T , то есть группу Манина $T(k)/R$ [9],[2]. Таким образом мы обнаруживаем тесные связи между $A(T)$ и $T(k)/R$.

СЛЕДСТВИЕ 3. $A(T) = \mathrm{coker}\left[T(k)/R \longrightarrow \prod_{v\in S}(T(k_v)/R)\right]$.

В книге [2] $T(k)/R$ вычислена в некоторых частных случаях. Применим это к вычислению $A(T)$.

Пусть $T = R^{(1)}_{K/k}(G_m)$ - норменная гиперповерхность. В этом случае нетрудно доказать, что $H^1(F,\hat{N}) = H^3(F,\mathbb{Z})$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $K = R_1R_2 \cong R_1 \otimes_k R_2$ - свободный композит двух циклических расширений глобального поля k , $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Если k такое, что S состоит из одной точки v и $F_v = F$, то $A(T) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для норменных гиперповерхностей в [2] получена следующая точная последовательность

$$0 \longrightarrow T(k)/R \longrightarrow \sum_{v\in S} H^3(F_v,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^3(F,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad (5)$$

где S состоит из точек, для которых группа F_v не является метациклической. В нашем случае S состоит из одной точки, и из последовательности (5) находим, что $T(k)/R = 0$. Но

$$H^1(F_v, N(K_w)) = H^1(F_v, N) = H^3(F,\mathbb{Z}) =$$

$$= H^3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

и $A(T) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР. $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{-1})$, где $p = 2$ или $p \equiv 3 \pmod 4$. Тогда мы находимся в условиях следствия 3. Группа $F = F_p$ имеет тип (2,2), следовательно, в этом случае $A(T) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот пример, следствия I и 2 рассматривались ранее В.Е.Воскресенским [2] и результаты были получены другим способом.

§ 2. Группа $H^1(k, \mathrm{Pic}\,\overline{V}(\mathcal{U}))$.

Напишем следующую коммутативную диаграмму, индуцированную последовательностью (6)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dash] & H^1(k,\mathcal{U}) \arrow[r, dash] \arrow[d] & H^2(k,A) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\theta"] & H^2(k,p) \arrow[d, "\varphi"'] \\
 & 1 \arrow[r, dash] & \prod\limits_{v} H^2(k_v,A) \arrow[r, dash] & \prod\limits_{v} H^2(k_v,p)
\end{tikzcd} \qquad (6)$$

Здесь φ – мономорфизм по теореме Брауэра-Хассе-Нетер, так как тор P есть группа обратимых элементов групповой алгебры $A\bar{k}$. Нижний нуль слева получается по локальной двойственности Тэйта: $H^1(k_v,\mathcal{U})=H^1(k_v,\hat{\mathcal{U}})=0$. Диаграмма (6) показывает тогда $H^1(k,\mathcal{U})=\ker\Theta$. Отметим также, что $H^1(k,\mathcal{U})=Ш(\mathcal{U})$, где $Ш$ – группа Шафаревича-Тэйта, то есть ядро отображения локализации $H^1(k,\mathcal{U})\longrightarrow\prod\limits_{v}H^1(k_v,\mathcal{U})$. По формуле теоремы 2 имеем

$$A(\mathcal{U})=\operatorname{coker}\left[H^1(k,A)\longrightarrow\prod_{v}H^1(k_v,A)\right] \qquad (7)$$

где S – конечное множество нормирований с нециклическими группами разложения. Так как для v с циклической группой разложения имеет место слабая аппроксимация, то рассуждениями, аналогичными теореме 2, можно показать, что локализация $H^1(k,A)\to H^1(k_v,A)$ является эпиморфизмом для этих v. Следовательно, коядра таких отображений тривиальны и формулу (7) можно переписать так

$$A(\mathcal{U})=\operatorname{coker}\left[H^1(k,A)\longrightarrow\prod_{v}H^1(k_v,A)\right], \qquad (8)$$

где сумма берется теперь по всем нормированиям. Известна точная последовательность, связывающая арифметические инварианты тора T [2]:

$$0\longrightarrow A(T)\longrightarrow H^1(k,\operatorname{Pic}\bar{V}(T))^0\longrightarrow Ш(T)\longrightarrow 0, \qquad (9)$$

где $\operatorname{Pic}\bar{V}(T)$ – модуль Пикара замыкания неособой проективной модели тора T, а „0" – переход к характерам в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Все члены последовательности (9) являются конечными группами [2]. Рассмотрим теперь девятичленную последовательность Тэйта для конечного $Gal(\bar{k}/k)$-модуля A [6].

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H^0(k,A) \arrow[r] & H^0(k,J_A) \arrow[r] & H^2(k,\hat{A})^0 \arrow[r] & H^1(k,A) \arrow[d, "\mu"] \\
1 & H^0(k,A)^0 \arrow[l] & H^2(k,J_A) \arrow[l] & H^2(k,A) \arrow[l, "\Theta"'] & H^1(k,\hat{A}) \arrow[l] & H^1(k,J_A) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Она показывает, что точна последовательность

$$1 \longrightarrow \operatorname{coker} \mu \longrightarrow H^1(k, \hat{A})^0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \Theta \longrightarrow 1 \qquad (10)$$

Сравнивая теперь последовательности (9), (10), а также учитывая (8), получаем следующий результат

ТЕОРЕМА 3. Для тора $\mathcal{U}$ группы $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V}(\mathcal{U}))$ и $H^1(k, \hat{A})$ имеют одинаковые порядки.

Таким образом девятичленная последовательность Тэйта имеет арифметическую природу и несет в себе важную арифметическую информацию о торе $\mathcal{U}$. Если тор T рационален или стабильно рационален, то $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{V}(T)) = 0$. Теорема 3 показывает, следовательно, что тор $\mathcal{U}$, как правило, не стабильно рационален и, тем более не рационален. Некоторые случаи, когда $H^1(k, \hat{A}) = 0$ разобраны в работах [11], [12].

§ 3. Задача погружения

Тор $\mathcal{U}$, последовательности (а) и (б) тесно связаны с задачей погружения глобальных полей с абелевыми ядром [1], [4]. В группе $H^1(k, \mathcal{U}) = Ш(\mathcal{U})$ лежит элемент, распадение которого означает, что при выполнении условия согласности, задача погружения будет разрешима [1], [5]. Следовательно, если $H^1(k, \mathcal{U}) = 0$, то согласность для погружения достаточна. Из последовательности (9) можно извлечь ряд случаев, когда это так, они перечислены в работе [4]. Связаны ли понятия рациональности, стабильной рациональности $\mathcal{U}$ с разрешимостью и выполнением условия согласности для соответствующей задачи погружения? Оказывается, ответ на этот естественный вопрос отрицателен.

Рассмотрим задачу погружения, связанную с последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \qquad (11)$$

циклических групп второго и четвертого порядков, $K = \mathbb{C}$ – погружаемое поле комплексных чисел, рассматриваемое как расширение поля вещественных чисел $k = \mathbb{R}$. Здесь $A = \operatorname{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$. Для задач погружения с таким ядром наличие условия согласности влечет ее разрешимость. Задача же (11) разрешима тогда и только тогда, когда -1 есть сумма четырех квадратов в k. Следовательно, наша задача неразрешима и для нее не выполнено условие согласности. В то же время тор $\mathcal{U}$ над k имеет размерность 2 и, следовательно, рационален [2]. Наоборот, известно, что любая полупрямая задача погружения разрешима. Возьмем полупрямую задачу погружения с таким A, чтобы $H^1(k,\hat{A})\neq 0$, по теореме 3 $H^1(k,\operatorname{Pic}\bar{V}(\mathcal{U}))\neq 0$ тогда также и тор $\mathcal{U}$ не стабильно рационален. Совсем по другому обстоит дело с дополнительным условием погружаемости [4].

В работе [7] приведен пример задачи погружения числовых полей с циклической группой A восьмого порядка, когда согласность для погружения недостаточна. Очевидно в этом случае $H^1(k,\mathcal{U})\neq 0$ но $H^1(k,\mathcal{U})\approx Ш(\hat{A})^0$ [I]. Этот пример опровергает гипотезу О.Неймана [I2] о том, что для любого конечного неприводимого $Gal(\bar{k}/k)$-модуля A, $Ш(A)=0$.

§ 4. Полупростые группы

Пусть G - квазиразложимая полупростая алгебраическая группа над полем k, т.е. в G существует борелевская подгруппа и максимальный тор T_{max} в ней, определенные над k. Для G имеет место точная последовательность $1\to\pi\to\tilde{G}\xrightarrow{f}G\to 1$, где $\tilde{G}$ - односвязная накрывающая, а π - фундаментальная группа группы G. В $\tilde{G}$ всегда существует единственный максимальный тор T'_{max} содержащий π, такой, что $f(T'_{max})=T_{max}$ [I3]. Если $\hat{T}_{max}$ - пермутационный модуль, то мы находимся в условиях теоремы 2 и получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. $A(T_{max})=\operatorname{coker}\alpha_\pi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствие 5 можно вывести также, сопоставив некоторые факты, полученные В.Е.Воскресенским, а именно: в этом случае $H^1(k,\operatorname{Pic}\bar{V}(G))=H^1(k,\operatorname{Pic}\bar{V}(T_{max}))=$ $=H^1(K/k,\operatorname{Pic}V_K(T_{max}))$ [3], где K - поле разложения T_{max}, имеет место следующая точная последовательность

$$0\longrightarrow\operatorname{coker}\alpha_\pi\longrightarrow H^1(k,\operatorname{Pic}\bar{V}(G))^0\longrightarrow Ш(\hat{\pi})^0\longrightarrow 0$$

Нетрудно показать, что $Ш(T_{max})'\approx Ш(\hat{\pi})^0$ в нашем случае. Осталось лишь сопоставить все эти факты с последовательностью (9).

В связи с этим можно сделать предположение, что тор $\mathcal{U}$ над глобальным полем k можно реализовать, как максимальный тор полупростой, квазиразложимой группы и, что максимальный тор $\mathcal{U}'$ над $\mathcal{U}$ соответствующей односвязной формы имеет пермутационный модуль характеров. В пользу последнего утверждения говорит одна заметка К.Ф.Лая [I0], где показано, что для чисел Тамагава τ справедлива следующая формула: $\tau(G)=c\,\tau(T_{max})$, причем константа c равна 1, если $G=\tilde{G}$. Принимая во внимание гипотезу Вейля, что $\tau(\tilde{G})=1$, находим $\tau(T'_{max})=1$. То, что $\tau(T)=1$, если $\hat{T}$ - пермутационный модуль, хорошо известный факт.

В [4] показано, что число Тамагавы тора $\mathcal{U}$ $\tau(\mathcal{U})=1/[H^{-1}(k,\mathcal{U})]$ здесь [ ] - означают порядок группы. $\tau(\mathcal{U})$ бывает нецелым часто, по крайней мере, когда согласность для погружения не достаточна это так.

Пусть теперь G - произвольная полупростая группа с фундаментальной группой π. В работе [13] Оно реализует π как ядро изогении двух торов

$$0 \longrightarrow \pi \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow 0 \tag{12}$$

так, что $\hat{T}$ - пермутационный модуль, а затем рассматривает следующую коммутативную диаграмму с точными строкой и столбцом:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & T' \arrow[d] \arrow[dr, "\lambda"] & & \\
0 \arrow[r] & \tilde{G} \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & G^* \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] & 0 \\
 & & G \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Здесь $G^*=(\tilde{G}\times T')/\pi$ при диагональном вложении π в прямое произведение групп $\tilde{G}\times T'$. Вообще говоря, G^* является связной редуктивной группой, а T' - центральным тором в ней. На некотором шаге вычисления Оно некоторыми несложными перестановками можно свести к следующим двум формулам:

$$\tau(\tilde{G})\cdot[H^1(k,\hat{T})]=\tau(G^*)[Ш(T)] \tag{13}$$

$$\tau(G)\cdot[H^1(k,\hat{T})]=[H^0(k,\pi)]\cdot\tau(G^*) \ . \tag{14}$$

По двойственности Пуату-Тэйта и диаграмме аналогичной (6), но написанной для T, показывается, что $[Ш(T)]=[Ш(\hat{\pi})^0]$. Формула Оно получается тогда почленным делением (14) на (13). Таким образом $\tau(G^*)$ и $[H^1(k,\hat{T})]$ сокращаются, а каждое из равенств по отдельности не позволяет получить информации о $\tau(G^*)$, так как неизвестна группа $H^1(k,\hat{T})$. Однако, нетрудно заметить, что если реализовать $\hat{T}$ как фактор двух решеток, аналогично $\hat{\mathcal{U}}$ в последовательности (а), то последовательность (б) будет обладать всеми свойствами (12), но кроме того $H^1(k,\hat{\mathcal{U}})=0$. По тору $\mathcal{U}$ также можно построить группу G^*, обозначим ее через $G^*_{\mathcal{U}}$.

Тогда по формуле (I3) получаем такой факт

ТЕОРЕМА 4. Пусть для односвязной накрывающей $\widetilde{G}$ справедлива гипотеза Вейля, т.е. $\tau(\widetilde{G})=1$, тогда

$$\tau(G_u^*) = 1/[H^1(k,\mathfrak{U})] = \tau(\mathfrak{U}) .$$

Таким образом, мы получаем некоторый класс редуктивных групп с нецелым числом Тамагавы. Как показывает работа [8] этот класс довольно обширен, так как часто данную конечную группу A можно реализовать как фундаментальную для некоторой полупростой группы.

Литература

I. Б а ш м а к о в М.И. О задаче погружения полей. - Мат.заметки, 1968, т.4, № 2, с.137-141.

2. В о с к р е с е н с к и й В.Е. Алгебраические торы. М., "Наука", 1977. 224с.

3. В о с к р е с е н с к и й В.Е. Бирациональные свойства линейных алгебраических групп. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1970,т.34, № I, с.3-19.

4. К р ю ч к о в А.Ф. Арифметические инварианты торов. Материалы IУ студенческой научной конференции. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1974, с.10-12.

5. К р ю ч к о в А.Ф. О задаче погружения полей. - Изв.АН Эст. ССР, физ.мат., 1977, т.26, № 2, с.209-211.

6. С е р р Ж.-П. Когомологии Галуа. М., "Мир", 1968. 208с.

7. Ф а д д е е в Д.К. Об одной гипотезе Хассе. - Докл.АН СССР, 1954, т.94, № 6, с.1013-1016.

8. B i a l y n i c k i - b i r u l a A. On homogenious affine spaces of linear algebraic groups. - Amer.J.Math., 1963, vol.85, p.577-582.

9. C o l l i o t - T h e l e n e J.-L., S a n s u c J.-J. La R-equivalence sur les tores. - Ann.sci. Ecole norm.super., 1977, t.10, N 2, p.175-230.

10. L a i K.F. On Tamagava number of quasisplit groups. - Bull. Amer.Math.Soc., 1976, vol.82, N 2, p.300-302.

11. N e u m a n n O. Über die erste Kohomologiegruppe endlichen Galois-Moduls. - Math.Nachr., 1975, Bd.67, N 1, S.13-20.

12. N e u m a n n O. Einige klassen von endlichen Galois-Moduln. - Math.Nachr., 1976, Bd.72, N 2, S.305-320.

13. O n o T. Relative theory of Tamagava numbers. - Ann.Math., 1965, vol.82, N 1, p.88-111.