Л. А. Калякин, Слабое взаимодействие возмущенных солитонов Кортевега–де Фриза, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1179–1205

Слабое взаимодействие возмущенных солитонов Кортевега–де Фриза*

Л. А. КАЛЯКИН
Институт математики с ВЦ РАН, г. Уфа

УДК 517.956.226

Ключевые слова: возмущение, интегрируемое уравнение, солитонное решение, квадраты функций Йоста, асимптотика, стационарная точка фазы.

Аннотация

В задаче о возмущении уравнения КдФ выписаны уравнения модуляции параметров N-солитонного решения, которые описывают медленную деформацию амплитуд и сдвигов фаз. Показано, что сдвиг фазы каждого возмущенного солитона зависит от медленно меняющихся амплитуд всех более быстрых солитонов. Этот результат интерпретируется, как слабое взаимодействие солитонов с солитонными «хвостами».

Abstract

L. A. Kalyakin, Week interaction of the perturbed Korteveg–de Vries solutions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1179–1205.

The Cauchy problem for the perturbed Korteveg–de Vries equation with the N-solitons initial data is considered. Differential equations for the slow deformation of the parameters, namely amplitudes and phase shifts, are derived. It is shown that the phase shift of the slow solitons depends on the deformation of the fast solitons. This result is interpreted as weak interaction of the solitons with the soliton tails.

Введение

В данной работе исследуется проблема возмущения интегрируемых уравнений на примере задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза

$$\partial_t u + L[u] \equiv u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon F[u], \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{0.1}$$

Начальные данные берутся вблизи безотражательного N-солитонного потенциала U_N, параметризованного $2N$ константами:

$$u(x,t,\varepsilon)|_{t=0} = U_N(x; B^0, S^0) + \varepsilon v(x). \tag{0.2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96–15–96241, 97–01–00459).

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 4, с. 1179–1205.

Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр; оператор возмущения $F[u]$ — гладкая функция от u и конечного числа производных по x, $F[0] = 0$. Функция начального возмущения $v(x)$ предполагается гладкой и быстро убывающей на бесконечности; $B^0 = (\beta_1^0, \dots, \beta_N^0)$, $S^0 = (s_1^0, \dots, s_N^0) = \mathrm{const}$.

Термин «потенциал» применительно к функциям $u(x)$ используется в связи с задачей рассеяния для уравнения

$$\psi_{xx} + u(x)\psi = -k^2\psi, \quad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{C}, \tag{0.3}$$

которая ассоциируется с уравнением КдФ [1] (но не только с ним [2, 3]). Как известно, имеется взаимно однозначное соответствие между потенциалами, достаточно быстро убывающими на бесконечности, и их спектральными данными, см., например, [3,4]. Для безотражательных потенциалов спектральные данные определяются конечным числом $(2N)$ параметров.

При исследовании асимптотик удобна параметризация, которая обеспечивает простоту асимптотических формул. Для N-солитонного потенциала можно использовать амплитуды $(\beta_1, \dots, \beta_N) = B$ и сдвиги фаз $(s_1, \dots, s_N) = S$ отдельных солитонов, на которые распадается соответствующее решение в его асимптотике на бесконечности:

$$U_N(x; B, S) = \sum_{n=1}^{N} 2\beta_n^2 \operatorname{ch}^{-2}(\beta_n x - s_n) + u_0(x; B, S). \tag{0.4}$$

Амплитуды $\beta_j > 0$ отвечают точкам дискретного спектра $i\beta_j$ и всегда различны; предполагается, что они пронумерованы в порядке убывания.

Остаточный член характеризует разбегание солитонов, и его оценка является эффективной:

$$u_0(x; B, S) = \mathcal{O}(\exp -\delta(|x| + t)), \quad |x| + t \to \infty \quad (\delta = \mathrm{const} > 0), \tag{0.5}$$

пока различны солитонные скорости $\nu_j = \partial_t(s_j/\beta_j)$.

В случае, когда потенциал является точным решением уравнения КдФ, параметры имеют вид $s_j = 4\beta_j^3 t + s_j^0$, $\beta_j = \beta_j^0$ и для решения имеет место асимптотика (0.4), (0.5).

Цель работы — построение главного члена формального асимптотического решения для возмущенной задачи, пригодного вплоть до далеких времен: $x \in \mathbb{R}$, $0 < t \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

Задача о построении асимптотики $u = u_0(x, t; \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ оказывается тривиальной, если ограничиться областью конечных времен $0 \leqslant t \leqslant M = \mathrm{const}$. В качестве u_0 можно взять решение невозмущенной задачи: остаток оценивается через $\mathcal{O}(\varepsilon)$ равномерно по t, так что возмущение не играет роли в главном члене. На больших промежутках $0 \leqslant t \leqslant M/\varepsilon$ такая оценка невозможна в принципе, поскольку на далеких временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ малые возмущения порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ приводят к эффектам порядка $\mathcal{O}(1)$. Для простейших задач подобного типа это обнаруживается в формулах для точного решения [5]. В общей ситуации такие эффекты выявляются в главном члене асимптотики в виде медленной деформации параметров решения невозмущенного уравнения. Для обыкновенных дифференциальных уравнений метод Крылова–Боголюбова [5] обеспечивает нахождение этих параметров как функций от ε и медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Похожий подход мы пытаемся реализовать в задаче о возмущении уравнения КдФ. Основные трудности, которые приходится здесь преодолевать, связаны с бесконечной размерностью динамической системы, соответствующей уравнению в частных производных. Формально это проявляется в необходимости детального исследования интегралов типа Фурье, которые возникают при решении возмущенной задачи.

На первом этапе исследования естественно отделить задачу о построении асимптотики от задачи об оценке остатка. Последняя вместе с доказательством теоремы существования может решаться независимо. Основанием для правильного выбора главного члена асимптотики здесь служит секулярное условие, которое накладывает ограничения на структуру последующих поправок. Мы исходим из стремления сконструировать такую функцию $U(x,t;\varepsilon)$, называемую далее формальным асимптотическим решением (ФАР), которая при подстановке в уравнения дает невязку $o(\varepsilon^2)$ (меньшую по порядку, чем ε^2) равномерно для всех $t \in [0, \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})]$. При столь малой невязке можно рассчитывать на оценку остатка через малую величину $o(1)$ равномерно по $t \in [0, \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})]$*.

Легко понять, что в таком ФАР помимо главного члена порядка $\mathcal{O}(1)$ должны содержаться добавки, меньшие по порядку ε. Конструкция, которая здесь предлагается, содержит отрезок степенного ряда

$$U(x,t,\varepsilon) = U_N(x;B,S) + \varepsilon V(x,t;\varepsilon) + \varepsilon^2 W(x,t;\varepsilon). \tag{0.6}$$

Неизвестными являются функции V, W и вектор-функции B, S. Анзатц включает также искомые выражения для B, S. Для них, следуя подходу Крылова–Боголюбова, можно построить свои асимптотические разложения

$$\begin{aligned} B(\tau;\varepsilon) &= B_0(\tau) + \varepsilon B_1(\tau) + o(\varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t), \\ S(\tau;\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} S_0(\tau) + S_1(\tau) + o(1),\ \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Нахождение первых членов этого разложения B_0, S_0, S_1, которые определяют главный член ФАР, является основной целью статьи.

С учетом (0.7) ясно, что малые члены порядка $o(1)$, $\varepsilon \to 0$, содержатся в разных слагаемых анзатца (0.6) и некоторые из них могут быть перенесены из одной части ФАР в другую. При построении ФАР иногда выгодно выбрать добавки $\varepsilon V + \varepsilon^2 W$ в наиболее простой форме за счет усложнения малых поправок в B, S. Отметим, что в любом случае поправки V, W содержат зависимость от ε.

Рассматриваемая постановка задачи не нова. Уравнения модуляции спек-

*Речь всюду идет об оценках в равномерной метрике.

тральных параметров для главных членов асимптотики типа B_0, S_0 были выписаны в общей ситуации для конечнозонных потенциалов [6–9]*. Задача о возмущении односолитонного потенциала считается достаточно хорошо исследованной [10–19], хотя точные результаты получены при специальных начальных данных [16–19]. Задача для конечносолитонного потенциала имеет свои особенности и практически не рассматривалась. Модуляция амплитуд в главном члене $B_0(\tau)$ не отличается от односолитонного случая. Однако вопрос о поправках для амплитуд $\varepsilon B_1(\tau)$, которые влияют на конечную величину сдвига фазы $S_1(\tau)$ на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$, обычно не обсуждается даже для односолитонного потенциала. Объясняется это необходимостью детального анализа структуры асимптотики первых двух поправок ФАР. Специфика конечносолитонного потенциала позволяет решить эту, сложную в общем случае, проблему с достаточной полнотой и определить полный сдвиг фазы в членах порядка единицы вплоть до далеких времен $t \approx \varepsilon^{-1}$.

1. Результаты и описание методики

Как видно из (0.6), (0.7), для выделения главного члена ФАР требуется определить вектор-функции $B_0, S_0, S_1(\tau)$. Помимо того, необходимо отыскание первых поправок амплитуд $B_1(\tau)$, которые участвуют в определении сдвигов фаз $S_1(\tau)$. Все эти функции находятся из единственного требования, которое называется

Секулярное условие. Поправка в ФАР (0.6) мала: $\varepsilon V + \varepsilon^2 W = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in [0, \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})]$.

Теорема 1.1. *Существует ФАР в виде* (0.6), *которое дает в уравнениях* (0.1), (0.2) *невязку* $\mathcal{O}(\varepsilon^{2+\delta})$ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно по* t *на некотором промежутке* $t \in [0, \tau_0\varepsilon^{-1}]$, $(\delta, \tau_0 = \mathrm{const} > 0)$. *Главный член ФАР представляется* N*-солитонным потенциалом*

$$U(x,t;\varepsilon) = U_N(x;B,S) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/9}), \quad \varepsilon \to 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ t \in [0, \tau_0\varepsilon^{-1}].$$

Параметры $B, S(\tau;\varepsilon)$ *определяются из системы дифференциальных уравнений (1.3) и имеют асимптотическое разложение* (0.7). ♦

Как в любом методе двухмасштабных разложений, построение ФАР сводится к выполнению двух процедур. В первой решаются задачи в быстрых переменных (x,t). Такими задачами здесь являются либо уравнения КдФ для U_N, либо линеаризованные уравнения КдФ для последующих поправок V, W:

$$[\partial_t + L_1(U_N) - \varepsilon F_0]V \equiv \partial_t V + 6\partial_x(U_N V) + \partial_x^3 V - \varepsilon F_0 V = f \qquad (1.1)$$

с соответствующими (из (0.2)) начальными данными. Правые части определяются через предыдущие приближения.

*Надо отметить, что эти уравнения не определяют сдвиги фаз в членах порядка единицы $S_1 = \mathcal{O}(1)$.

Слагаемое $-\varepsilon F_0 V$ с константой $F_0 = \partial_u F[0]$ соответствует линейной при $u \to 0$ части возмущения и, несмотря на малый множитель ε, учитывается в левой части уравнения. Этот член существенно влияет на первую поправку и через нее на сдвиг фазы в членах порядка $\mathcal{O}(1)$. Однако его влияние проявляется в простой форме; это слагаемое можно исключить путем выделения из V множителя $\exp(\varepsilon F_0 t)$.

Возможность явного обращения линеаризованного оператора $\partial_t + L_1(U_N)$ играет решающую роль при построении ФАР. Это свойство является следствием интегрируемости уравнения КдФ.

На каждом шаге задача решается с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$, и все невязки выносятся на следующие шаги. Такой подход представляется достаточно гибким, поскольку заранее не фиксирует анзатц для поправок, каждую из которых достаточно найти с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

В частности, на исходном шаге при подстановке функции U_N в уравнение КдФ получается невязка в виде комбинации $2N$ линейно независимых функций с множителями $\varepsilon\partial_\tau\beta_j$, $\varepsilon[s_j\partial_\tau\beta_j - \beta_j\partial_\tau s_j] + 4\beta_j^4$, которые для краткости обозначим $\varepsilon\alpha_j, \varepsilon r_j$ $(j = 1, \dots, N)$ (теорема 2.3). Требование асимптотического выполнения уравнения КдФ с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$ сводится к соотношениям $\alpha_j, r_j = \mathcal{O}(1)$. В остальном вектор-функции $\{\alpha_j\} = A$, $\{r_j\} = R$ остаются неопределенными; на следующих шагах они включаются в правые части уравнений (1.1). Неопределенности в параметрах A, R ликвидируются при исключении секулярных (неубывающих) членов в поправках εV, $\varepsilon^2 W$. При этом на каждом шаге в A, R остается произвол следующего порядка малости по ε, так что в результате получается отрезки асимптотических по ε рядов. Для наших целей достаточно двух первых членов:

$$A = A_0(B, S; \tau, \varepsilon) + \varepsilon A_1(B, S; \tau, \varepsilon), \quad R = R_0(B, S; \tau, \varepsilon) + \varepsilon R_1(B, S; \tau, \varepsilon). \quad (1.2)$$

Таким образом, секулярное условие для ФАР (0.6) выполняется при подходящем выборе A_0, A_1, R_0 как функций от $B, S; \tau, \varepsilon$. Этот этап составляет центральный пункт доказательства теоремы и содержится в разделе 4. Итогом являются уравнения деформации солитонных параметров, которые получаются с учетом определения величин α_j, r_j:

$$\partial_\tau\beta_j = \alpha_j(B, S; \tau, \varepsilon), \quad \partial_\tau(s_j/\beta_j) = (1/\varepsilon)4\beta_j^2 - r_j(B, S; \tau, \varepsilon)/\beta_j^2. \quad (1.3)$$

Асимптотическое решение этих уравнений при $\varepsilon \to 0$ составляет второй этап построения ФАР. Легко понять, что параметры A, R являются вспомогательным элементом конструкции и используются для разделения задач по построению разных частей ФАР (0.6) и (0.7).

Уравнения (1.3) в общем случае оказываются нелинейными, так что B, S как функции от τ определяются на конечном промежутке $\tau \in [0, \tau_0]$. Поэтому формально не имеет смысла асимптотика при $t \to \infty$, и мы оперируем с асимптотикой при $\varepsilon \to 0$. В частности, формулу (0.4) можно рассматривать как асимптотическую при $\varepsilon \to 0$ с остатком $u_0(x; B, S) = \mathcal{O}(\exp(-\delta(|x| + \tau/\varepsilon)))$, который экспоненциально мал для не слишком малых времен $\tau \in [\varepsilon^\gamma, \tau_0]$ $(0 < \gamma < 1)$.

С тех же позиций анализируются поправки εV, $\varepsilon^2 W$ как функции от x, τ, ε. Секулярности в них выделяются как неубывающая часть асимптотики при $\varepsilon \to 0$. В принципе, это те самые члены, что обычно записываются в форме $\varepsilon\mathcal{O}(t)$, $\varepsilon^2\mathcal{O}(t^2)$.

Эффективность всех построений основана на анализе асимптотической структуры поправок V, W при $\varepsilon \to 0$ на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$ (это содержание третьего раздела). На этом пути, в частности, получены неубывающие члены асимптотики первой поправки $V(x,t;\varepsilon)$. Ввиду экспоненциального убывания солитонов такие члены вне солитонных секторов (при $|\beta_j x - s_j| \to \infty$) представляют главный член ФАР. Эти так называемые хвосты солитонов на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$ тянутся на большие расстояния $\approx \varepsilon^{-1}$ и потому дают интегральный вклад в ФАР порядка $\mathcal{O}(1)$. По этой причине анализ первой поправки представляет самостоятельный интерес.

Обратим внимание, что главный член ФАР в солитонных хвостах можно выделить из интегрального представления первой поправки, если только линеаризованное уравнение для V содержит добавку $\varepsilon F_0 V$, [14, 15]. Эта добавка проявляется на сдвигах фаз всех солитонов, кроме первого, из-за взаимодействия задних солитонов с хвостами передних.

Далее под j-солитонным сектором понимается часть полосы $\{x \in \mathbb{R},\ 0 < t \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})\}$, выделенная неравенством $|\beta_j x - s_j| \leqslant t^\gamma$ $(0 < \gamma < 1;$ $j = 1, \ldots, N)$. Оставшиеся области (при $\beta_1 x - s_1 < 0$) образуют секторы солитонных хвостов.

Обсуждаемый здесь подход основан на использовании квадратов функций Йоста для явного представления решения линеаризованного уравнения [20]. Свойства квадратов обсуждались, например, в [3, 7, 20–22]. Случай безотражательного потенциала имеет некоторые особенности. В разделе 2 приводятся необходимые результаты в форме, удобной для их использования в теории возмущений.

2. Базис решений линеаризованного уравнения

Данный раздел является вспомогательным. Здесь строится и исследуется система функций, которая оказывается подходящей для решения линеаризованного уравнения. Три свойства этой системы обеспечивают эффективность метода Фурье.

(B) Базисность системы в классе убывающих функций.

(L) Принадлежность базиса ядру линеаризованного оператора.

(A) Эффективные формулы для асимптотики при $|x| + t \to \infty$.

Базис составляется из квадратов функций Йоста, которые определяются как решения уравнений (0.3) с условиями

$$\psi^\pm(x,k;t) = \exp(\pm i[kx + \omega t])[1 + o(1)], \quad x \to \pm\infty, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Базисность является общим свойством спектральной задачи и слабо связана со свойствами потенциала [3].

Зависимость от параметра t в функции Йоста входит как через нормировочные множители $\exp(i\omega t)$), так и через потенциал посредством спектральных данных:

$$\psi^{\pm}(x,k;t)=\psi^{\pm}(x,k;t,B,S),\quad B,S=B,S(t).$$

При подходящей нормировке базисные функции принадлежат ядру линеаризованного оператора. Это свойство обычно доказывается с использованием $L-A$ пары, и это единственное место, где используется интегрируемость исходного невозмущенного уравнения.

Замечание 2.1. Само требование (L) близко к интегрируемости, поскольку линеаризованное уравнение фактически представляет второе (эволюционное) уравнение $L-A$ пары. В частности, уравнение ЛКдФ для $\partial_x(\psi^2)$ с учетом (0.3) редуцируется к виду

$$\psi_t=4k^2\psi_x+u_x\psi-2u\psi_x,$$

и его совместность с (0.3) эквивалентна уравнению КдФ.

Свойства (B), (L) не связаны с требованием безотражательности потенциала. Специфика безотражательного потенциала используется для получения эффективных асимптотических формул. В этом случае функции Йоста выписываются явно [1]. Однако асимптотику базисных функций при $|x|+t\to\infty$ легче извлекать не из явных формул, а из асимптотики потенциала (0.4). Поэтому потенциал рассматривается как основной объект, в терминах параметров которого B,S представляются все конструкции.

Основной результат данного раздела — выражение базисных функций через производные потенциала по спектральным параметрам. Помимо асимптотик это обеспечивает также эффективное вычисление линеаризованного оператора на базисных функциях, необходимое для реализации метода Фурье.

Для сокращения записей ниже используются обозначения

$$a(k)=\prod_{n=1}^{N}\frac{k-i\beta_n}{k+i\beta_n},\quad b_j=\exp(-2s_j)\prod_{n=1}^{j-1}\frac{\beta_j-\beta_n}{\beta_j+\beta_n}\prod_{n=j+1}^{N}\frac{\beta_j+\beta_n}{\beta_j-\beta_n}. \tag{2.2}$$

В задаче рассеяния эти величины имеют вполне определенный смысл: $1/a(k)$ — коэффициент прохождения, и на безотражательном потенциале $\psi^-=(\psi^+)^*a\ \forall k\in\mathbb{R}$; b_j — коэффициенты пропорциональности собственных функций $\psi^+(x,i\beta_j;t)=b_j\psi^-(x,i\beta_j;t)$ (используются в качестве параметров вместо s_j). Для интегралов по пространственной переменной используется обозначение

$$\langle h\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)dx.$$

Встречающиеся ниже интегралы по k с особым ядром понимаются в смысле главного значения. Все асимптотики выписываются при $|x|+t\to\infty$; переход к асимптотика по ε получается заменой $t=\tau/\varepsilon$ (при $\tau\gg\varepsilon$).

Теорема 2.1. *Пусть $U_N(x;B,S)$ — безотражательный потенциал. Любая функция, которая достаточно быстро убывает на бесконечности $g(x)[1+|x|]\in\in L_1(\mathbb{R})$, может быть представлена единственным образом в виде (спектрального) разложения*

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k}\partial_x\Phi^+(x,k;t,B,S)\hat g(k;t,B,S)+$$
$$+\frac12\sum_{n=1}^{N}\partial_x\Phi_n^+(x;B,S)g_n^-(B,S)-$$
$$-\frac12\sum_{n=1}^{N}\partial_x\Phi_n^-(x;B,S)\Big(g_n^+(B,S)+\sum_{p=1}^{N}g_p^-(B,S)\operatorname{Sgn}(p-n)\Big).\tag{2.3}$$

Коэффициенты разложения (образы) связаны с прообразами формулами

$$\hat g(k;t,B,S)=\big\langle g(x)\Phi^-(x,k;t,B,S)\big\rangle,\quad k\in\mathbb{R},\tag{2.4}$$
$$g_j^{\pm}(B,S)=\big\langle g(x)\Phi_j^{\pm}(x;B,S)\big\rangle,\quad j=1,\dots,N.\tag{2.5}$$

Базисные функции выражаются через потенциал $U_N(x;B,S)$ по формулам

$$\Phi_j^-=(1/2\beta_j)\int\limits_{-\infty}^{x}\partial_{s_j}U_N(x;B,S)dx,\tag{2.6}$$

$$\Phi_j^+=1-1/2\int\limits_{-\infty}^{x}\partial_{\beta_j}U_N(x;B,S)dx-s_j\Phi_j^-(x;B,S),\tag{2.7}$$

$$\Phi^+=[\phi^+(x,k;t,B,S)]^2,\quad \Phi^-=(\Phi^+)^*;\tag{2.8}$$

$$\phi^+=\Big[1-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k+i\beta_n}\frac{1}{a'(i\beta_n)}\phi_n^-\exp(-\beta_nx+s_n)\Big]\exp(\pm i[kx+\omega t]),$$

$$\phi_n^-=\frac12[\Phi_n^-(x;B,S)]^{1/2}=\exp(\beta_nx-s_n)[1+o(1)],\quad x\to-\infty.\ \bullet$$

В теореме 2.1 объединены два утверждения: первое — о разложении функции $g(x)$ по базису квадратов функций Йоста; второе — о выражении квадратов через производные потенциала. Разложение по квадратам можно получить так, как это делается для другого класса потенциалов в [3] (см. также [20]). Однако для доказательства второго утверждения требуется формула разложения по произведениям ψ-функций, которые отвечают двум разным потенциалам. Обозначим такие потенциалы через $u,\tilde u$, соответствующие функции Йоста — через $\psi^{\pm}, \tilde{\psi}^{\pm}$, спектральные данные — через $\beta_j, \tilde{\beta}_j$; $b_j, \tilde{b}_j$; $a(k), \tilde{a}(k)$ и положим $A(k) = a(k)\tilde{a}(k)$.

Лемма 2.1. *Пусть $u, \tilde{u}$ — безотражательные потенциалы с дискретным спектром $\sigma = \{\beta_j\}$ и $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\beta}_j\}$. Тогда любая функция, которая достаточно быстро убывает на бесконечности $g(x)[1+|x|] \in L_1(\mathbb{R})$, может быть представлена единственным образом в виде спектрального разложения*

$$
\begin{aligned}
g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{kA(k)}\partial_x \Psi^+(x,k) g^-(k) - \\
- \partial_x \sum_n \frac{1}{i\beta_n A''(i\beta_n)}[\Phi_n(x) g_n^- - \Psi_n^-(x) g_n^+] - \\
- (1/2)\partial_x \sum_\beta \frac{1}{i\beta A'(i\beta)}[\Psi^+(x,i\beta) g^-(i\beta) - \Psi^-(x,i\beta) g^+(i\beta)]. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Суммирование производится по точкам дискретного спектра: совпадающим $i\beta_n \in \sigma' = \sigma \cup \tilde{\sigma}$ и несовпадающим $i\beta \in \sigma'' = (\sigma \cup \tilde{\sigma}) \setminus \sigma'$. Базисные функции составлены из произведений функций Йоста:

$$
\Psi^{\pm}(x,k) = \psi^{\pm}(x,k)\tilde{\psi}^{\pm}(x,k), \quad \Psi_j^{\pm}(x) = \Psi^{\pm}(x, i\beta_j), \qquad (2.10)
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_j(x) = \partial_k \big(\tilde{\psi}^+(x,k)[\psi^+(x,k) - b_j \psi^-(x,k)] + \\
+ \psi^+(x,k)[\tilde{\psi}^+(x,k) - \tilde{b}_j \tilde{\psi}^-(x,k)]\big)\big|_{k=i\beta_j}; \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

$$
g^{\pm}(k) = \big\langle g(x)\Psi^{\pm}(x,k)\big\rangle,
$$

$$
g_j^-(k) = \big\langle g(x)\Psi_j^-(x)\big\rangle, \quad g_j^+(k) = \langle g(x)\Phi_j(x)\rangle; \quad A' = \partial_k A. \bullet
$$

Доказательство леммы схоже с приведенным в [3] и основывается на вычислении интеграла по k, который возникает в формуле (2.9) при подстановке выражения для $g^-(k)$. Этот интеграл вычисляется путем деформации контура интегрирования на полуокружность большого радиуса $R \to \infty$, как это обычно делается в интегралах Фурье. При этом используются известные свойства аналитичности ψ-функций, соотношения рассеяния, а также асимптотики при $|k| \to \infty$, которые имеют тот же вид (2.1) [1, 4]. Таким образом, интеграл вычисляется через функцию $g(x)$ и вычеты подынтегральной функции в нулях $kA(k) = 0$.

Отличие от [3] возникает из-за наличия вычета в точке $k = 0$. Для его исключения следует вычислить тем же способом еще один интеграл с функциями $\psi^+(x,k)\tilde{\psi}^-(x,k)$ и $\tilde{\psi}^+(y,k)\psi^-(y,k)$ вместо $\Psi^+(x,k)$, $\Psi^-(y,k)$. Он отличается от предыдущего тем, что интеграл по дуге радиуса R стремится к нулю при $R \to \infty$, поскольку подынтегральные функции не осциллируют на бесконечности: например, $\psi^+(x,k)\tilde{\psi}^-(x,k) = 1 + o(1)$, $k \to \infty$. Учитывая, что при $k = 0$ функции Йоста пропорциональны, требуемые вычеты в точке $k = 0$ можно выразить через вычеты в точках спектра. В итоге приходим к разложению (2.9). $\bullet$

Полученный результат, в частности, дает формулу разложения по квадратам. Однако основная цель, ради которой выписывалась формула (2.9), — разложение разности потенциалов аналогично [3].

В случае когда в качестве функции g берется разность потенциалов $u-\tilde{u}$, коэффициенты разложения выражаются через спектральные данные. Вычисления проводятся с учетом тождеств, которые получаются из (0.3) путем умножения равенств на подходящие функции Йоста и интегрирования по x [2].

Лемма 2.2. *Разность безотражательных потенциалов имеет разложение по базису* (2.10)–(2.11)*:*

$$\tilde{u}-u = i\sum_j \left[\frac{1}{a'(i\beta_j)}+\frac{1}{\tilde{a}'(i\beta_j)}\right][b_j-\tilde{b}_j]\partial_x\Psi_j^-(x)+$$
$$+\,i\partial_x\sum\frac{1}{a'(i\beta)}[\psi^+\tilde{\psi}^- - \psi^-\tilde{\psi}^+](x,i\beta)+$$
$$+\,i\partial_x\sum\frac{1}{\tilde{a}'(i\tilde{\beta})}[\psi^+\tilde{\psi}^- - \psi^-\tilde{\psi}^+](x,i\tilde{\beta}).$$

Суммирование производится как по совпадающим $i\beta_j\in\sigma'$, так и по несовпадающим точкам дискретного спектра $i\beta\in\sigma\setminus\sigma'$, $i\tilde{\beta}\in\tilde{\sigma}\setminus\sigma'$. $\bullet$

Из полученных соотношений немедленно вытекают формулы для производных потенциала по параметрам.

Следствие 2.1.

$$-\,\partial_{b_j}u = i\frac{2}{a'(i\beta_j)}\partial_x\Psi_j^-(x), \tag{2.12}$$

$$-\,\partial_{\beta_j}u = \frac{1}{b_j a'(i\beta_j)}\partial_x\Phi_j(x).\ \bullet \tag{2.13}$$

В том случае, когда потенциал параметризован набором β_j, s_j, производные по β_j, s_j вычисляются с учетом формул (2.2).

Нормировка полученных таким способом функций Йоста на дискретном спектре определяется асимптотикой потенциала на бесконечности (0.4): $\psi_j^- = \mathcal{O}(\exp(\beta_j x - s_j))$, $x\to-\infty$. Функции Йоста на непрерывном спектре $k\in\mathbb{R}$ восстанавливаются через ψ_j^- по известным формулам обратной задачи рассеяния [1] (функции ψ_j^- нормируются к единице при $x\to-\infty$ для использования их в этих формулах). Нормирующий множитель для $\psi(x,k)$ может быть любой, в частности, $\exp(i\omega(k)t)$. В этом случае функции $\psi(x,k)$ в точках дискретного спектра $k=i\beta_j$ имеют асимптотику $\mathcal{O}(\exp(-|\beta_j x - i\omega(i\beta_j)t|))$ и могут отличаться от ψ_j^- множителями.

Окончательные формулы для базиса (2.6)–(2.8) отличаются от (2.9) нормировкой; кроме того, Φ_j^+ комбинируются из Φ_j и Ψ_n^- $\forall n$ для упрощения структуры асимптотик.

В формулах разложения важную роль играют соотношения ортогональности, получаемые из уравнения (0.3):

$$\left\langle \Phi_q^{\pm}\partial_x\Phi_p^{\mp}\right\rangle = \mp 2\delta_{pq}, \quad \left\langle \Phi_q^{-}\partial_x\Phi_p^{-}\right\rangle = 0, \quad \left\langle \Phi_q^{+}\partial_x\Phi_p^{+}\right\rangle = 2\,\mathrm{Sgn}(q-p),$$
$$\left\langle \Phi^{\pm}(x,p)\partial_x\Phi^{\mp}(x,q)\right\rangle = \mp 2\pi i\delta(p-q), \quad \left\langle \Phi_p^{\pm}\partial_x\check{h}\right\rangle = \left\langle \check{h}\partial_x\Phi_p^{\pm}\right\rangle = 0$$
$$\left(\text{где}\ \ \check{h}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^{\pm}(x,k)h(k)dk \ \ \forall h \in C_0^{\infty}\right),$$
$$\left\langle \Phi_j^{+}(x)\partial_x\Phi^{\pm}(x,0)\right\rangle = -2 \ \ \forall j = 1,\dots,N.$$

Следствие 2.2. *Если функцию $\partial_x\Phi^{\pm}(x,0)$ разложить по базису и затем восстановить первообразную, то с учетом асимптотики на бесконечности получается соотношение*

$$\Phi^{\pm}(x,0;t,B,S) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \Phi_n^{-}(x;B,S). \ \bullet \tag{2.14}$$

Переформировка дискретной части базиса, проведенная при переходе от (2.9) к (2.6)–(2.8), обеспечивает наиболее простую структуру для асимптотики базисных функций. Каждая функция $\Phi_j^{\mp}(x;B,S)$ быстро убывает, либо стабилизируется вне соответствующего солитонного сектора при $\eta_j = \beta_j x - s_j \to \pm\infty$. Расплатой за это свойство является несимметрия формулы разложения, связанная с неполной ортогональностью базиса.

Следствие 2.3. *Если безотражательный потенциал имеет асимптотику* (0.4), (0.5), *то базисные функции на дискретном спектре имеют схожую асимптотику:*

$$\Phi_j^{-}(x;B,S) = -\operatorname{ch}^{-2}(\eta_j) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)}) \quad (\eta_j = \beta_j x - s_j,\ \delta > 0), \tag{2.15}$$
$$\Phi_j^{+}(x;B,S) = -\operatorname{th}(\eta_j) - \eta_j \operatorname{ch}^{-2}(\eta_j) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)}). \ \bullet \tag{2.16}$$

Доказательство. Асимптотика функций $\Phi_j^{\pm}$ восстанавливается путем интегрирования асимптотики потенциала по формулам (2.6), (2.7). При этом надо учесть краевые условия

$$\Phi^{-}(x;B,S) \to 0, \ \ \Phi_j^{+}(x;B,S) \to 1, \quad x \to -\infty.$$

Последнее соотношение с учетом определения функции Φ вытекает из свойства вронскиана $\partial_k W(\psi^+,\psi^-) = -2\beta_j a'(i\beta_j)$ при $k = i\beta_j$. $\bullet$

Следствие 2.4. *В точке непрерывного спектра $k = 0$ асимптотика в j-солитонном секторе получается из формул* (2.14), (2.15)*:*

$$\Phi^{\pm}(x,0;t,B,S) = \operatorname{th}^2(\eta_j) + \mathcal{O}(\exp(-\delta[|x|+t])). \ \bullet \tag{2.17}$$

В остальных точках непрерывного спектра схожую структуру асимптотики имеют амплитуды функций $\Phi^{\pm}$. Они представляют собой гладкие ступеньки с быстрой стабилизацией вне каждого солитонного сектора. Параметры стабилизации определяются параметрами потенциала B, S.

Теорема 2.2. *Если потенциал безотражательный, то базисные функции на непрерывном спектре имеют асимптотику, разную в разных секторах, так что в j-секторе*

$$\Phi^{\pm}(x,k;t,B,S) = \chi_j^{\pm}(\eta_j,k;B)\exp(\pm 2i[kx+\omega t])[1+\mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)})], \qquad (2.18)$$

$$(k\in\mathbb{R},\quad \eta_j = \beta_j x - s_j,\quad \delta>0);$$

$$\chi_j^{+}(\eta,k;B) = [c_j + d_j\exp(-\eta)/2\operatorname{ch}(\eta)]^2,\quad \chi_j^{-} = (\chi_j^{+})^{*};$$

$$c_j = 1 - \sum_{n=1}^{j-1}[2i\beta_n/(k+i\beta_n)]\prod_{q=1}^{j-1}(\beta_n+\beta_q)/(\beta_n-\beta_q),\quad q\neq n;$$

$$d_j = -\sum_{n=1}^{j}[2i\beta_j/(k+i\beta_n)]\prod_{r=1}^{j-1}(\beta_n+\beta_r)/\prod_{q=1}^{j}(\beta_n-\beta_q),\quad q\neq n;$$

$$c_j + d_j = c_{j+1};\quad c_j^2|_{k=0} = 1. \blacklozenge$$

Доказательство. Построение асимптотики основывается на явной формуле для функции Йоста $\psi^{+}(x,k;t)$, которая в случае безотражательного потенциала имеет вид

$$\psi^{+}(x,k;t) = \left[1 - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k+i\beta_n}\frac{1}{a'(i\beta_n)}\psi_n^{-}(x;B,S)\exp(-\eta_n)\right]\exp(ikx). \qquad (2.19)$$

Здесь ψ-функция на непрерывном спектре $\psi^{\pm}(x,k;t) = \exp(\pm ikx)[1+o(1)]$ $(x\to\pm\infty,\ k\in\mathbb{R})$ отличается от (2.1) множителем $\exp(i\omega t)$. Нормировка на дискретном спектре соответствует базисным функциям $\Phi_j^{-}(x;B,S)$, см. (2.8). Поэтому формулы связи собственных функций содержат множитель $\exp(s_j)$:

$$\psi^{+}(x,i\beta_j;t)\exp(s_j) = \psi_j^{+}(x;B,S) = b_j\psi_j^{-}(x;B,S),\quad b_j = b_j(B,S).$$

Как видно из (2.19), дело сводится к нахождению асимптотики функций

$$\Gamma_j(x;B,S) = \frac{1}{ia'(i\beta_j)}\psi_j^{-}(x;B,S)\exp(-\eta_j). \qquad (2.20)$$

К сожалению, при $N\geqslant 2$ эту асимптотику не удается столь же просто восстановить через асимптотику потенциала, используя, например, пропорциональность квадратов $(\psi_j^{\pm})^2$ и известных из (2.7) функций $\Phi_j^{-}(x;B,S)$. Проблемы возникают из-за экспоненциальных множителей $\exp(-\eta_j)$, которые нормируют ψ_j^{-} к единице при $x\to-\infty$ и наличие которых в формуле (2.20) требует от ψ_j^{-} сверх экспоненциальной асимптотики.

Эти проблемы отражают существо дела: каждая функция ψ_j^{-} влияет на структуру асимптотики во всех «задних» секторах с меньшими солитонными скоростями $\nu_p<\nu_j$. Следующие построения опираются не на асимптотику потенциала, а на спектральные данные в обратной задаче рассеяния [1].

В точках дискретного спектра $k=i\beta_j$ система уравнений (2.19) разрешима для $\psi_j^{\pm}$, так что имеют место тождества

$$b_j\psi_j^-(x;B,S)\exp(\eta_j) = 1 - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\beta_j+\beta_n}\Gamma_n(x;B,S) \quad (j=1,\dots,N).$$

В предположении, что солитонные секторы распадаются при $t\to\infty$, рассмотрим эти тождества в q-солитонном секторе, где $|\eta_q|<\infty$, $\eta_{q-r}\to-\infty$, $\eta_{q+r}\to+\infty$ $\forall r>0$. Выделим в них члены, которые экспоненциально малы при $|x|+t\to\infty$. Поскольку функции $\psi_n^-(x;B,S)$ равномерно ограничены, то такими будут $\Gamma_n(x;B,S)$ с номерами $n>q$, а также $\psi_j^-(x;B,S)\exp(\eta_j)$ с номерами $j<q$. Поэтому первые q тождеств дают следующие асимптотические равенства:

$$0 = 1 - \sum_{n=1}^{q}\frac{1}{\beta_j+\beta_n}\Gamma_n(x;B,S) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)}) \quad (j=1,\dots,q-1);$$

$$b_q\psi_q^-(x;B,S)\exp(\eta_q) = 1 - \sum_{n=1}^{q}\frac{1}{\beta_q+\beta_n}\Gamma_n(x;B,S) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)}). \tag{2.21}$$

Первые $(q-1)$ равенств могут быть разрешены относительно Γ_n:

$$\Gamma_n(x;B,S) = c_{q,n} + d_{q,n}\Gamma_q(x;B,S) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)}), \quad n\leqslant q-1. \tag{2.22}$$

Константы $c_{q,n}$ и $d_{q,n}$ определяются из системы алгебраических уравнений с симметричной матрицей $\{1/(\beta_j+\beta_n)\}$ и с правыми частями $\{1,\dots,1\}$ и $\{-1/(\beta_j+\beta_q)\}$ $(j,n=1,\dots,q-1)$:

$$c_{q,n} = 2\beta_n\prod_{p=1}^{q-1}(\beta_n+\beta_p)/(\beta_n-\beta_p), \quad p\neq n;$$

$$d_{q,n} = \frac{2\beta_n}{\beta_q+\beta_n}\prod_{p=1}^{q-1}(\beta_q-\beta_p)/(\beta_q+\beta_p)\prod_{p=1}^{q}(\beta_n+\beta_p)/(\beta_n-\beta_p), \quad p\neq n.$$

Полученные таким образом выражения $\Gamma_n(x,t)$ через $\Gamma_q(x,t)$ поставляются в равенство (2.21), из которого извлекается асимптотика для функций ψ_q^-:

$$\psi_q^-(x;B,S) = A_q\exp(s_q)/2\operatorname{ch}(\eta_q-s_q)[1+\mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)})] \tag{2.23}$$

с константами

$$A_q = \prod_{p=q+1}^{N}(\beta_q-\beta_p)/(\beta_q+\beta_p).$$

При записи формулы (2.23) исходная константа b_q заменяется на s_q (сдвиг фазы); при этом получается формула (2.2)*.

Асимптотика функции Йоста теперь получается подстановкой выражений из (2.20), (2.21), (2.23) в формулу (2.19). Главный член асимптотики для $\Phi^+ = (\psi^+)^2$ в j-секторе содержит первые j слагаемых и имеет вид (2.18).

*Соотношение (2.2) получено другим способом в [1], с. 43.

Сравнение полученного результата с асимптотикой (2.17) при $k = 0$ приводит к соотношению $c_j^2|_{k=0} = 1$. Теорема 2.2 доказана.

Вычисление значений линеаризованного оператора на базисных функциях закладывает основу для использования метода Фурье. Как известно, если исходный потенциал удовлетворяет уравнению КдФ, то производные $\partial_x(\psi^2)$ квадратов функций Йоста с подходящей нормировкой удовлетворяют уравнению, линеаризованному на этом потенциале [20]. В точках дискретного спектра $k = i\beta_j$ это немедленно следует из выражений (2.6), (2.7), связывающих производные квадратов по x с производными потенциала по параметрам. При этом ясно, что специфика уравнения КдФ и его интегрируемость не играет никакой роли; для любого уравнения производные по параметрам удовлетворяют соответствующему линеаризованному уравнению. В точках непрерывного спектра $k \in \mathbb{R}$ ситуация сложнее, и доказательство опирается на существование $L - A$ пары [20]*.

Если спектральные параметры B, S медленно деформируются по времени, то потенциал удовлетворяет исходному нелинейному уравнению лишь приближенно, базисные функции удовлетворяют линеаризованному уравнению также приближенно. Все невязки связаны с изменением зависимости от времени параметров B, S и довольно просто вычисляются. Следующее утверждение содержит формулу для значений линеаризованного оператора КдФ

$$\partial_t + L_1(U_N) \equiv \partial_t + 6U_N\partial_x + 6(\partial_x U_N) + \partial_x^3$$

на базисных функциях, построенных на потенциале $U_N(x; B, S)$. Зависимость от t, ε в параметрах B, S пока не уточняется, поскольку будет определяться с учетом возмущения.

Теорема 2.3. *Пусть $U_N(x; B, S)$ — безотражательный потенциал и на нем определены базисные функции по формулам (2.6)–(2.8). Тогда значение оператора КдФ на этом потенциале дается выражением*

$$\partial_t U_N + L[U_N] \equiv -2\partial_x \sum_{n=1}^{N} [\varepsilon\alpha_n \Phi_n^+(x; B, S) + \varepsilon r_n \Phi_n^-(x; B, S)], \tag{2.24}$$

$$\varepsilon\alpha_n = \partial_t \beta_n, \quad \varepsilon r_n = s_n \partial_t \beta_n - \beta_n \partial_t s_n + 4\beta_n^4;$$

а базисные функции удовлетворяют соотношениям

$$[\partial_t + L_1(U_N)]\partial_x \Phi_j^- = \hat{\partial}_t \Phi_j^-, \tag{2.25}$$

$$[\partial_t + L_1(U_N)]\partial_x \Phi_j^+ = 8\beta_j^3 \partial_x \Phi_j^-(x; B, S) + \hat{\partial}_t \Phi_j^+, \tag{2.26}$$

$$[\partial_t + L_1(U_N)]\partial_x \Phi^\pm = \hat{\partial}_t \Phi^\pm. \ \blacklozenge \tag{2.27}$$

Здесь

$$\hat{\partial}_t = (\partial_t B)\partial_B + [\partial_t S - 4B^3]\partial_S \quad (B^3 = \{\beta_j^3\}) \tag{2.28}$$

*Другой способ состоит в вариации коэффициента отражения и годится при наличии достаточно богатого семейства решений нелинейного уравнения [23].

так называемая «усеченная производная» [9], которая на дискретном спектре легко вычисляется:

$$\hat{\partial}_t \Phi_j^- = -2\varepsilon \frac{\alpha_j}{\beta_j} \partial_x \Phi_j^- - (1/\beta_j) \partial_x \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon \alpha_n \partial_{s_j} \Phi_n^+ + \varepsilon r_n \partial_{s_j} \Phi_n^-), \tag{2.29}$$

$$\hat{\partial}_t \Phi_j^+ = 2\varepsilon \frac{r_j}{\beta_j} \partial_x \Phi_j^- + \partial_x \sum_{n=1}^{N} \Big(\varepsilon \alpha_n \Big[\partial_{\beta_j} + \frac{s_j}{\beta_j} \partial_{s_j} \Big] \Phi_n^+ + \varepsilon r_n \Big[\partial_{\beta_j} + \frac{s_j}{\beta_j} \partial_{s_j} \Big] \Phi_n^- \Big).$$

Доказательство первого утверждения основывается на вычислении спектрального разложения функции $L[U_N]$ по базису (2.6)–(2.8). Эти вычисления дают

$$L[U_N] = -2\partial_x \sum_{n=1}^{N} 4\beta_n^4 \Phi_n^-(x; B, S).$$

Остальная часть в формуле (2.24) представляет производную по времени $\partial_t U_N(x; B(t), S(t))$.

Вариация тождества (2.24) по параметрам B, S дает (2.25), (2.26). При этом надо учесть свойства $\delta_f g = f \partial_f g$, $\delta_f \partial_t = \partial_t \delta_f$ и соотношения, которые вытекают из определений (2.6)–(2.8):

$$\partial_x \Phi_j^- = \delta_s U_N / 2\beta s, \quad \partial_x \Phi_j^+ = -[\delta_\beta U_N + \delta_s U_N]/2\beta \quad (\beta = \beta_j,\ s = s_j).$$

Эти формулы, а также (2.27) можно получить и из других соображений. Если взять невозмущенный потенциал с параметрами $s_j = 4\beta_j^3 t + s_j^0$, $\beta_j = \beta_j^0$, то производные квадратов удовлетворяют уравнению ЛКдФ тождественно. Все отличия, возникающие при возмущении потенциала, проявляются в операторе дифференцирования по t и сводятся к появлению в невязках усеченной производной $\hat{\partial}_t$. ♦

3. Асимптотика первой поправки

В данном разделе исследуется асимптотика двойного интеграла типа Фурье, который представляет интегральную часть решения линеаризованного уравнения с правой частью $f(x, t; \varepsilon)$:

$$J(x, t; B, S, \varepsilon) = (1/2\pi i) \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} \Phi^+(x, k; t, B, S) \int_0^t \hat{f}(k, \rho; \varepsilon) d\rho. \tag{3.1}$$

Результаты формулируются в терминах спектрального образа

$$\hat{f}(k, \rho; \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y, \rho; \varepsilon) \Phi^-(y, k; \rho, B(\varepsilon\rho, \varepsilon), S(\varepsilon\rho, \varepsilon)) dy.$$

Экспоненты, которые содержатся в базисных функциях

$$\Phi^\pm(x, k; t, B, S) = \chi^\pm(x, k; B, S) \exp(\pm 2i[kx + \omega t]),$$

зависят от быстрых переменных x, t. После записи их в медленных переменных $\xi = \varepsilon x$, $\tau = \varepsilon t$, $\theta = \varepsilon\rho$ получается интеграл, быстро осциллирующий при $\varepsilon \to 0$, асимптотика которого зависит от стационарных точек фазы [24].

Рассматривается случай $\omega = 4k^3$, соответствующий КдФ. Число стацточек зависит от структуры образа $\hat{f}$, точнее, от числа секторов в плоскости (y, ρ) с быстрым изменением функции $f(y, \rho; \varepsilon)$. Дело в том, что зависимость от быстрых переменных имеется в амплитудах $\chi^{\pm}$. Это проявляется в структуре их асимптотики, которая имеет вид ступенек с быстрым изменением в солитонных секторах, см. теорему 2.2. Подобная асимптотика предполагается и у правой части:

$$f(y, \rho; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{N} f_n(\eta_n, \theta) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|y|+\rho)}), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0; \tag{3.2}$$

$$f_n(\eta, \theta) = \mathcal{O}(\exp(-\delta|\eta|)); \quad \eta_n = \beta_n(\theta)y - s_n(\theta), \quad \theta = \varepsilon\rho, \quad \delta = \mathrm{const} > 0. \tag{3.3}$$

Такая структура функции f позволяет в главном члене асимптотики разбить интеграл на N слагаемых*. Каждое слагаемое сводится к стандартному интегралу Фурье от быстро убывающих функций путем замены y на солитонную переменную η_n. При этом в экспоненте появляется сдвиг фазы, который с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$ описывает траекторию солитона:

$$\xi_n(\theta) = \int_0^{\theta} \nu_n(\zeta)d\zeta, \quad \nu_n(\tau) = \varepsilon\partial_\tau(s_n/\beta_n).$$

Функции $\xi_n(\theta)$ определяют соответствующие стационарные точки k_{st}, θ_{st} из уравнений

$$k = 0, \quad \xi = \xi_n(\theta) \quad (n = 1, \ldots, N).$$

Из-за специфики фазы стацточки $\theta_{st} = \theta_n(\xi)$ не зависят от τ, если только не связаны между собой переменные ξ, τ. Так, в j-солитонном секторе, где $\xi \approx \xi_j(\tau)$, стацточка $\theta_{st} = \theta_{nj}(\tau)$ может быть представлена как функция от τ из уравнения

$$\xi_n(\theta) = \xi_j(\tau). \tag{3.4}$$

Основной результат состоит в выделении из функции $J(x, t; B, S, \varepsilon)$ неубывающих членов асимптотического разложения при $\varepsilon \to 0$, равномерного по x, t вплоть до далеких времен: $0 < t \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

Теорема 3.1. *Для интеграла* (3.1) *имеет место асимптотика при* $\varepsilon \to 0$, *различная в разных секторах полуплоскости* $x \in \mathbb{R}, t > 0$:

1) *в j-солитонном секторе, где* $|\eta_j| < \infty$, $\eta_{j-1} \to -\infty$, $\eta_{j+1} \to +\infty$:

$$J(x, t; B, S, \varepsilon) = \varepsilon^{-1}V_j^s(x; B, S, \tau) + J_j(\eta_j; B, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)});$$

*В случае первой поправки надо положить $f = e^{-F_0\theta}F[U_N(x; B, S)]$, $f_n(\eta, \theta) = e^{-F_0\theta}F[2\beta_n^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta)]$.

2) *в j-секторе хвоста, где $\eta_j \to -\infty$, $\eta_{j+1} \to +\infty$:*

$$J(x,t;B,S,\varepsilon) = T_j(\xi;B) + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) + \mathcal{O}(e^{-\delta(|x|+t)}), \quad \xi = \varepsilon x;$$

3) *в секторе обрыва солитонных хвостов, где $\eta_N \to -\infty$:*

$$J(x,t;B,S,\varepsilon) = J_0(\eta_0;B) + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}) + O(t^{-1/3}), \quad \eta_0 = x/t^{1/3}.$$

Эта асимптотика гладкая и равномерная по x,t в широком слое $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon^{\alpha-1} \leqslant t \leqslant \tau_0\varepsilon^{-1}$ $\forall\alpha \in (0,2/3)$, дифференцируемая по параметрам B,S (с учетом $\eta_j = \beta_j x - s_j$). Коэффициенты асимптотики определяются через исходные данные (2.18), (3.2) по формулам

$$V_j^s(x;B,S,\tau) = (1/2)\partial_x\Phi^+(x,0,t;B,S)\sum_{n=1}^N\int_0^\tau \hat{f}_n(0,\theta)\,\mathrm{Sgn}(\theta_{nj}-\theta)d\theta;$$

$$J_j(\eta;B,\tau) = I_j(\eta;B,\tau) + \chi_j^+(\eta,0;B)\sum_{n=1}^{j-1}\hat{f}_n(0,\theta_{nj})/\nu_n(\theta_{nj}) + \tag{3.5}$$

$$+\,\partial_x\sum_{n=1}^{j-1}(1/2i\nu_n(\theta_{nj}))\partial_k\chi_j^+(\eta,k;B)\hat{f}_n(k,\theta_{nj})|_{k=0};$$

$$T_j(\xi;B) = \sum_{n=1}^{j}\hat{f}_n(0,\theta_n(\xi))/\nu_n(\theta_n(\xi));$$
$$J_0(\eta;B) = I_0(\eta)\sum_{n=1}^N\hat{f}_n(0,0)/2\nu_n(0). \tag{3.6}$$

Согласование асимптотик при переходе из одного сектора в другой обеспечивается асимптотикой соответствующих контурных интегралов, через которые выражаются функции $I_j(\eta;B,\tau)$ и $I_0(\eta)$. В частности, I_j определяется интегралом по контуру l, который обходит полюс $k=0$ сверху ($\mathrm{Im}\,k>0$):

$$I_j(\eta;B,\tau) = (\beta_j(\tau)/4\pi)\partial_\eta\int_l \frac{dk}{k^2}\frac{\chi_j^+(\eta,k;B)}{\nu_j(\tau)+\omega/k}\hat{f}_j(k,\tau)\exp(2ik\eta/\beta_j(\tau))$$

и $I_0(\eta)$ является первообразной функции Эйри:

$$I_0(\eta) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{z}\sin(\eta z + z^3).$$

Таким образом,

$$I_j(\eta;B,\tau) = \hat{f}_j(0,\tau)/\nu_j(\tau) + \mathcal{O}(e^{\delta\eta}), \quad \eta\to-\infty;$$
$$I_j(\eta,\tau) = \mathcal{O}(e^{-\delta\eta}), \quad \eta\to+\infty;$$
$$I_0(\eta) = 2 + \mathcal{O}(\eta^{-1/3}), \ \ \eta\to+\infty; \quad I_0(\eta) = \mathcal{O}(\eta^{-1/3}), \ \ \eta\to-\infty.$$

Все интегралы сходятся, поскольку функции $\hat{f}_n$ выражаются через интегралы Фурье от гладких быстроубывающих функций (3.3):

$$\hat{f}_n(k,\theta) = (1/\beta_n(\theta)) \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\eta,\theta)\chi_n^-(\eta,k;B(\theta)) \exp(-2ik\eta/\beta_n(\theta))d\eta.$$

Доказательство теоремы схоже с приведенным в [21, 26] для односолитонного случая. Детали доказательства содержатся в [30].

Следствие 3.1. *Растущий при $\varepsilon \to 0$ (секулярный) член асимптотики интегральной части первой поправки имеет представление:*

$$\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{N} \partial_x \Phi_j^- \sum_{n=1}^{N} \int_0^{\tau} e^{F_0(\tau-\theta)} \left\langle F\left[\frac{2\beta_n^2(\theta)}{\mathrm{ch}^2(\eta_n)}\right] \mathrm{th}^2(\eta_n)\right\rangle \mathrm{Sgn}(\theta_{nj}-\theta)d\theta. \qquad (3.7)$$

Здесь $\eta_n = \beta_n(\theta)x - s_n(\theta)$; функции $\theta_{nj}(\tau)$ определяются уравнениями (3.4).

Для доказательства надо учесть соотношения (2.14), (2.17) о связи базисных функций в точке $k = 0$.

4. Построение ФАР

Переходим к доказательству теоремы 1.1. На первом этапе строятся поправки V и W в ФАР (0.6) как решения линеаризованных уравнений (1.1). Правые части этих уравнений содержат неопределенные параметры α_j, r_j, которые представляют собой невязки от подстановки потенциала $U_N(x;B,S)$ в уравнение КдФ. Они будут определены как функции от B,S из секулярного условия. Конечной целью является нахождение деформаций параметров $B,S(\tau;\varepsilon)$. Отыскание $A = \{\alpha_j\}$, $R = \{r_j\}$ по сути дела есть формирование уравнений для B,S (1.3). Такой подход позволяет отделить задачу для V,W от задачи для B,S и упростить методику.

Функции $V,W(x,t;\varepsilon)$ определяются из линеаризованных уравнений (1.1) как асимптотические решения с невязкой $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Для их представления используется спектральное разложение по базису (2.6)–(2.8), так что задача сводится к определению коэффициентов этого разложения в их зависимости от времени t. Тривиальная структура уравнений, получаемых для коэффициентов, обусловлена свойствами базиса и, в конечном счете, интегрируемостью исходного уравнения. Основное из этих свойств — асимптотическое выполнение линеаризованного уравнения.

Лемма 4.1. *Пусть параметры B,S удовлетворяют соотношениям (1.3) при некоторых $A,R = \mathcal{O}(1)$. Тогда усеченная производная (2.28) на базисных функциях мала, так что выполняется соотношение:*

$$[\partial_t + L_1(U_N)]\partial_x\Phi^{\pm} = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad [\partial_t + L_1(U_N)]\partial_x\Phi_j^- = \mathcal{O}(\varepsilon),$$
$$[\partial_t + L_1(U_N)]\partial_x\Phi_j^+ = 8\beta_j^3\partial_x\Phi_j^-(x;B,S) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $0 < t \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. $\bullet$

Доказательство из формул (2.25)–(2.29). Наличие множителей $\varepsilon\alpha_j$, εr_j при ограниченных членах обеспечивает оценку $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Из-за операторов

$$[\partial_{\beta_j} + (s_j/\beta_j)\partial_{s_j}], \quad [\alpha_n\partial_{\beta_n} + ((\partial_t s_n) - 4\beta_n^3)\partial_{s_n}]$$

могут появиться множители, растущие по x, t. Специфика этих операторов и структура асимптотики базисных функций приводят к тому, что растущие множители могут быть лишь $\eta_j = \beta_j x - s_j$ и появляются они только при экспоненциально убывающих членах типа $1/\operatorname{ch}(\eta_j)$. Поэтому наличие при них малых множителей $\varepsilon\alpha_j, \varepsilon r_j$ обеспечивает ту же оценку $\mathcal{O}(\varepsilon)$. $\bullet$

Первая поправка V определяется как решение уравнения с правой частью

$$f(x; B, S) = F[U_N(x; B, S)] + 2\partial_x \sum_{n=1}^{N} [\alpha_n^0 \Phi_n^+(x; B, S) + r_n^0 \Phi_n^-(x; B, S)] \tag{4.1}$$

и начальным условием $V|_{t=0} = v(x)$. Она строится в виде спектрального разложения после выделения экспоненты в качестве множителя

$$\begin{gathered} V(x, t; B, S, \varepsilon) = \exp(F_0\tau)\biggl[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k}\partial_x \Phi^+(x, k, t; B, S)\hat{V}(k, t; \varepsilon) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \partial_x \Phi_n^+(x; B, S) V_n^-(\tau; \varepsilon) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \partial_x \Phi_n^-(x; B, S)\biggl(V_n^+(\tau; \varepsilon) + \sum_{p=1}^{N} V_p^-(\tau; \varepsilon)\operatorname{Sgn}(p - n)\biggr)\biggr]. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Параметры $A_0 = \{\alpha_n^0\}$, $R_0 = \{r_n^0\}$ подлежат определению.

Уравнение (1.1) переходит в систему уравнений для коэффициентов $\hat{V}(k, t; \varepsilon)$, $V_j^\pm(\tau; \varepsilon)$:

$$\begin{gathered} \partial_t \hat{V} = \exp(-\varepsilon F_0 t)\hat{f}(k, t; \varepsilon); \\ \varepsilon\partial_\tau V_j^- = \exp(-F_0\tau) f_j^-(\tau; \varepsilon), \quad \varepsilon\partial_\tau V_j^+ = 8\beta_j^3 V_j^- + \exp(-F_0\tau) f_j^+(\tau; \varepsilon); \\ \hat{V}(k, t; \varepsilon)|_{t=0} = \hat{v}(k), \quad k \in \mathbb{R}; \quad V_j^\pm(\tau; \varepsilon)|_{\tau=0} = v_j^\pm, \quad j = 1, \dots, N. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Невязки, которые возникают при действии линеаризованного оператора на базисные функции, здесь игнорируются; они имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon)$ и будут учтены в следующих порядках.

Правые части определяются через интегралы от исходных функций

$$\begin{gathered} \hat{f}(k, t; \varepsilon) = \bigl\langle f(x; B, S)\Phi^-(k, x, t; B, S)\bigr\rangle, \quad k \in \mathbb{R}, \\ f_j^\pm(\tau; \varepsilon) = \bigl\langle f(x; B, S)\Phi_j^\pm(x; B, S)\bigr\rangle \quad (\tau = \varepsilon t), \quad j = 1, \dots, N, \end{gathered}$$

и зависят от τ, ε в разных комбинациях. В соответствии со структурой параметров $B, S(\tau; \varepsilon)$ (0.7) здесь присутствует гладкая зависимость как от медленного времени τ, так и от быстрых переменных $t = \tau/\varepsilon$ и $s_p \approx s_p^0(\tau)/\varepsilon$.

Подобный характер зависимости от τ должен быть и в решениях. Поэтому производные по быстрому времени $\partial_t = \varepsilon\partial_\tau$ не малы и должны быть учтены в уравнениях. Использование медленного времени τ в формулах для $V_j^{\pm}$ обусловлено желанием интерпретировать секулярности как члены, растущие при $\varepsilon \to 0$, $\tau = \mathcal{O}(1)$. При интегрировании уравнений (4.3) учитывается полная зависимость от τ (либо t); разделения на быстрые и медленные переменные здесь не делается в отличие от традиционного метода двух масштабов.

Для коэффициентов разложения легко построить асимптотики при $\varepsilon \to 0$. Поскольку подынтегральные выражения сосредоточены в солитонных секторах с точностью до экспоненциально малых членов, то асимптотика правых частей в (4.3) выписывается через интегралы от элементарных функций. Например,

$$\begin{aligned} f_j^-(\tau;\varepsilon) &= 4\alpha_j^0 - \left\langle F[2\beta_j^2/\operatorname{ch}^2(\eta)]/\operatorname{ch}^2(\eta)\right\rangle + \mathcal{O}(\exp(-\delta\tau/\varepsilon)),\\ f_j^+(\tau;\varepsilon) &= -4r_j^0 - \left\langle F[2\beta_j^2/\operatorname{ch}^2(\eta)][\operatorname{th}(\eta) + \eta\operatorname{ch}^{-2}(\eta)]\right\rangle + \\ &+ \sum_{n=1}^{N}[4\alpha_n^0 - \left\langle F[2\beta_n^2/\operatorname{ch}^2(\eta_n)]\right\rangle]\operatorname{Sgn}(j-n) + \mathcal{O}(\exp(-\delta\tau/\varepsilon)) \end{aligned}$$

$$(\eta = \beta_j x - s_j, \quad \eta_n = \beta_n x - s_n).$$

Члены, входящие под знак суммы, обязаны неортогональности базиса и стабилизации функций $\Phi_j^+ \approx -\operatorname{th}(\eta)$, $\eta \to \pm\infty$.

При интегрировании уравнений (4.3) неубывающие (при $\varepsilon \to 0$) части этой асимптотики дают секулярности типа $\varepsilon^{-1}\mathcal{O}(\tau)$ и $\varepsilon^{-2}\mathcal{O}(\tau^2)$. Члены порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ возникают в коэффициентах V_j^+ и обязаны лишь наличию в V_j^- секулярностей типа $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Поэтому те и другие можно исключить одним требованием $V_j^- = \mathcal{O}(1)$, которое приводит к выражению для α_j^0 через функцию от β_j. Более радикальное требование состоит в исключении из дискретной компоненты $V_j^-(\tau;\varepsilon)$ всей неубывающей части ее ее асимптотики при $\varepsilon \to 0$. Для этого следует учесть начальные данные, а также убывающие члены правой части, взятые при $\varepsilon = 0$. Таким образом получается выражение

$$4\alpha_j^0 = \left\langle F\left[\frac{2\beta_j^2}{\operatorname{ch}^2\eta}\right]\frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta}\right\rangle - C_j^+\exp(-\tau/\varepsilon). \tag{4.4}$$

Константа C_j^+ определяется через двойной интеграл, вычисляемый на невозмущенном потенциале (при $\beta_j = \beta_j^0$, $s_j = 4\beta_j^3 t + s_j^0$):

$$C_j^+ = v_j^+ + \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left(F[U_N]\Phi_j^- + F\left[\frac{2\beta_j^2}{\operatorname{ch}^2(\eta)}\right]\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\eta)}\right)\bigg|_{\varepsilon=0} dx dt.$$

При таком выборе α_j^0 дискретная компонента при $\partial_x\Phi_j^+$ имеет убывающую асимптотику: $V_j^- = \mathcal{O}(\exp(-\delta\tau/\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon)$.

В коэффициентах $V_j^+(\tau;\varepsilon)$ (при другой дискретной компоненте) остаются члены порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Такого же типа секулярности имеются в асимптотике интегральной части функции V, см. (3.7). Требование их совместного исключения с учетом выражения (4.4) приводит к соотношению в интегральной форме

$$\int\limits_0^\tau 4r_j^0 e^{F_0\theta}d\theta = -\int\limits_0^\tau e^{F_0\theta}\big(\big\langle F[2\beta_j^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta)][\operatorname{th}(\eta)+\eta\operatorname{ch}^{-2}(\eta)]\big\rangle -$$
$$-\sum_{n=1}^N e^{F_0\theta}\left\langle F[2\beta_n^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta_n)]\operatorname{th}^2(\eta_n)\right\rangle[\operatorname{Sgn}(j-n)+\operatorname{Sgn}(\theta_{nj}(\tau)-\theta)]\big)d\theta.$$

Выражение для r_j^0 получается после дифференцирования по τ. При этом следует учесть, что параметры B, S, входящие под интегралом в переменные η, η_n, зависят от θ. Кроме того, часть интегралов фактически берется по промежуткам $\theta \in [0, \theta_{nj}(\tau)]$. Производная фигурирующей здесь стацточки $\theta_{nj}(\tau)$ вычисляется с учетом определения (3.4):

$$\partial_\tau\theta_{nj}(\tau) = \left.\frac{\partial_\tau[s_j(\tau)/\beta_j(\tau)]}{\partial_\theta[s_n(\theta)/\beta_n(\theta)]}\right|_{\theta=\theta_{nj}(\tau)}.$$

Если принять во внимание уравнения (1.3) для s_j/β_j, то эти выражения можно перезаписать в виде

$$\partial_\tau\theta_{nj}(\tau)] = \frac{4\beta_j^2(\tau)-\varepsilon r_j/\beta_j^2}{4\beta_n^2(\theta)-\varepsilon r_n/\beta_n^2} = \frac{\beta_j^2\tau)}{\beta_n^2(\theta)} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

В итоге для параметров r_j^0 можно выписать представление

$$4r_j^0(B,S;\tau) = -\left.\left\langle F[2\beta_j^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta)][\operatorname{th}(\eta)+\eta\operatorname{ch}^{-2}(\eta)+\operatorname{th}^2(\eta)]\right\rangle\right|_{\theta=\tau} -$$
$$-2\sum_{n=1}^{j-1}\exp((\tau-\theta)F_0)\frac{\beta_j^2(\tau)}{\beta_n^2(\theta)}\left.\left\langle F[2\beta_n^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta_n)]\operatorname{th}^2(\eta_n\right\rangle\right|_{\theta=\theta_{nj}(\tau)}. \quad (4.5)$$

В этих формулах опущены члены порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Поэтому функция $\theta_{nj}(\tau)$ также может быть взята с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon)$ и определена через главные члены асимптотики амплитуд из соотношения

$$\int\limits_0^\tau \beta_j^2(\zeta)d\zeta = \int\limits_0^\theta \beta_n^2(\zeta)d\zeta.$$

При таком выборе r_j^0 первая поправка V будет ограничена: $V(x,t;\varepsilon)=\mathcal{O}(1)$, $0<t\leqslant\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

В следующем порядке приближения параметры $A_1 = \{\alpha_j^1\}$, $R_1 = \{\ r_j^1\}$ входят в правую часть задачи для второй поправки W:

$$g(x,t;\varepsilon) = \delta_U F[U_N]V - F_0V - 3\partial_x(V)^2 - \hat{\partial}_\tau V + \\ + 2\partial_x \sum_{n=1}^{N} [\alpha_n^1 \Phi_n^+(x;B,S) + r_n^1 \Phi_n^-(x;B,S)].$$

Здесь $\delta_U F[U]$ — линеаризация на U оператора возмущения; усеченная производная $\hat{\partial}_\tau V = (1/\varepsilon)\hat{\partial}_t V = \mathcal{O}(1)$, связанная с действием линеаризованного оператора на базисные функции в спектральном разложении первой поправки (4.2), вычисляется по формуле (2.28).

Задача для W переписывается в виде уравнений для коэффициентов спектрального разложения:

$$\partial_t \hat{W} = \exp(-\varepsilon F_0 t)\hat{g}(k,t;\varepsilon);$$
$$\varepsilon\partial_\tau W_j^- = \exp(-F_0\tau)g_j^-(\tau;\varepsilon), \quad \varepsilon\partial_\tau W_j^+ = 8\beta_j^3 W_j^- + \exp(-F_0\tau)g_j^+(\tau;\varepsilon);$$
$$\hat{W}(k,t;\varepsilon)|_{t=0} = \hat{w}(k), \quad k\in\mathbb{R}; \quad W_j^\pm(\tau;\varepsilon)|_{\tau=0} = v_j^\pm \quad (j=1,\ldots,N).$$

Так же, как на предыдущем шаге, секулярные члены порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ могут появиться в W лишь из-за неубывания коэффициентов $g_j^-(\tau;\varepsilon)$. Требование их исключения приводит к выражению для α_j^1:

$$4\alpha_j^1 = \left\langle (\delta_U F[U_N]V_j - F_0V_j - 3\partial_x(V_j)^2 - \hat{\partial}_\tau V_j)\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\eta)} \right\rangle; \quad \eta = \beta_j x - s_j. \quad (4.6)$$

От первой поправки V здесь участвует лишь функция $V_j = e^{F_0\tau}J_j(\eta;B,\tau)$, определенная через формулу (3.5). Она представляет неубывающую часть асимптотики для интегральной составляющей функции V в j-солитонном секторе. Неубывающие члены от дискретных компонент функции V, которые имеются при $\partial_x\Phi_j^-$, не участвуют в этих формулах. Как показывают вычисления, соответствующий член из g ортогонален к функции Φ_j^- и потому не дает вклада в g_j^-.

При таком выборе α_j^1 вторая поправка W не имеет других секулярностей порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$. Это обеспечивается структурой правой части g, которая имеет убывающую асимптотику в секторах солитонных хвостов. Отметим, что без выделения из g линейного члена возмущения $-\partial_u F[0]V$ такое свойство не выполняется, появляются дополнительные секулярности $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$ и построение ФАР оказывается невозможным.

На этом можно закончить первый этап построения ФАР. Устранение более младших секулярностей из второй поправки W не требуется для идентификации главного члена ФАР и потому не проводится. Поправки следующих порядков также не влияют на главный член.

Второй этап построения ФАР состоит в исследовании уравнений деформации солитонных параметров (1.3) с правыми частями, определенными формулами (4.4)–(4.6). Выпишем эти уравнения:

$$
\begin{aligned}
4\partial_\tau\beta_j = {}& \left\langle F\left[\frac{2\beta_j^2}{\operatorname{ch}^2\eta}\right]\frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta}\right\rangle - C_j^+\exp(-\tau/\varepsilon) + \\
&+\varepsilon\left\langle(\delta_U F[U_N]V_j - F_0V_j - 3\partial_x(V_j)^2 - \hat\partial_\tau V_j)\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\eta)}\right\rangle;
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$
\begin{aligned}
4\partial_\tau(s_j/\beta_j) = {}& \frac{1}{\varepsilon}16\beta_j^2 + \\
&+\frac{1}{\beta_j^2(\tau)}\left\langle F[2\beta_j^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta)][\operatorname{th}(\eta)+\eta\operatorname{ch}^{-2}(\eta)+\operatorname{th}^2(\eta)]\right\rangle\Big|_{\theta=\tau} + \\
&+2\sum_{n=1}^{j-1}\exp((\tau-\theta)F_0)\frac{1}{\beta_n^2(\theta)}\left\langle F[2\beta_n^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta_n)]\operatorname{th}^2(\eta_n)\right\rangle\Big|_{\theta=\theta_{nj}(\tau)}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$$(\eta=\beta_j x - s_j,\quad \eta_n=\beta_n x - s_n).$$

Фигурирующие здесь интегралы от быстро убывающих по η (либо η_n) функций

$$\langle.\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} .\,dx = \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} .\,d\eta,\quad \beta=\beta_j\ \ (\text{либо } \beta_n)$$

не зависят от сдвигов фаз S. Поэтому система уравнений имеет треугольную структуру в главных членах асимптотики. Нарушения треугольной структуры происходит в членах порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ в (4.7) из-за функции V_j, которая зависит от солитонных скоростей $\nu_n = \varepsilon\partial_\tau(s_n/\beta_n)$, $n \leqslant j$. Однако в силу уравнения (4.8) $\nu_n = 4\beta_n + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Учитывая это, уравнения (4.7) можно сделать не зависящими от (4.8) до членов порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$; более того, уравнения для s_j оказываются линейными до членов порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Локальная разрешимость на некотором конечном промежутке $\tau\in[0,\tau_0]$ соответствующей задачи Коши $A,S|_{\tau=0}=A^0,S^0$ равномерно по ε не вызывает сомнения. Поскольку в этой задаче малый параметр фактически входит регулярно, то можно построить асимптотическое разложение решения $A,S(\tau,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to0$ в форме (0.7).

Присутствие быстро убывающих функций $C_j^+\exp(-\tau/\varepsilon)$ в правых частях уравнений (4.7) не влияет на существование решения. В асимптотике эти члены проявляются в первых поправках амплитуды $\varepsilon\beta_j^1$, поскольку интегралы от них имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon)$. На сдвигах фаз зависимость от констант C_j^+ обнаруживается в членах порядка $\mathcal{O}(1)$ из-за структуры уравнений (4.8), содержащих слагаемое β_j^2/ε.

При построении асимптотики солитонных параметров нелинейности встречаются лишь в уравнениях для главного члена амплитуд $B_0(\tau)$. Эти уравнения не отличаются от односолитонного случая и не связаны между собой.

В уравнении для первой поправки амплитуды $\beta_j^1(\tau)$ обнаруживается зависимость от деформации амплитуд всех более быстрых солитонов, что видно из структуры функции J_j в (3.5). Подобная зависимость от передних солитонов имеется в уравнениях для сдвига фазы s_j^1. Она проявляется как через поправку амплитуды, так и через структуру правой части r_j^0.

Чтобы закончить доказательство теоремы, приведем оценки для поправок в ФАР и для невязки в уравнении. Оценка оставшейся части второй поправки $\varepsilon^2 W = \mathcal{O}(\varepsilon^{2/9})$ приведена в [21]. Она обеспечивает выполнение секулярного условия с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/9})$. Невязка, которая возникает в уравнении (0.1) при подстановке такого ФАР, имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{1+2/9})$. Отличие от односолитонного случая ([21]) здесь не играет роли.

Решающее значение для возможности подходящей оценки функции W имеет правильное выделение первой поправки V. В частности, в линейном уравнении для V нельзя игнорировать малый на первый взгляд член $\varepsilon F_0 V$. Его вклад в функцию V имеет порядок $\mathcal{O}(\tau)$. Попытка вынести это слагаемое на следующий шаг ведет к нарушению секулярного условия в каждой последующей поправке.

Оценки можно улучшить, если уточнить ФАР во второй поправке W. Для этого в асимптотике функции W следует исключить оставшиеся растущие члены при дискретных компонентах $\partial_x \Phi_j^-$ путем подходящего выбора свободного параметра r_j^1. Исключаемые члены, которые содержат $\varepsilon^{-1} r_j^1$, оцениваются через $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/9-2})$ так же, как вся функция W. Очевидно, полученные таким способом дополнительные члены $\varepsilon^1 r_j^1$ в правых частях уравнений деформации (1.3) имеют порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/9})$ и не влияют на главный член ФАР. Поэтому секулярное условие выполняется с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/9})$. Определенная таким способом вторая поправка имеет теперь порядок $\varepsilon^2 W = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\delta})$ при некотором $\delta > 0$ ([21]), что обеспечивает оценку невязки в уравнении (0.1) через $\mathcal{O}(\varepsilon^{2+\delta})$. Теорема 1.1 доказана.

5. Заключение

Результаты.

1. Деформация солитонных параметров B, S описывается уравнениями (4.7), (4.8), которые, в частности, обеспечивают восстановление сдвигов фаз с точностью $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/9})$ при $\varepsilon \to 0$ вплоть до далеких времен $t \approx \varepsilon^{-1}$. Наиболее сложная для вычислений часть в этих уравнениях содержится в функции V_j в виде контурного интеграла из (3.5).

2. Формулы (3.6) позволяют выписать главный член асимптотики первой поправки в j-секторе солитонного хвоста в виде

$$V(x,t;\varepsilon) \approx \exp(F_0\tau) \sum_{n=1}^{j} \hat{f}_n(0, \theta_n(\xi))/\nu_n(\theta_n(\xi)), \quad \varepsilon \to 0,$$

где

$$\hat{f}_n(0,\theta) = \frac{e^{-F_0\theta}}{\beta_n(\theta)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F[2\beta_n^2(\theta)/\operatorname{ch}^2(\eta)]\chi_n^-(\eta,0;B(\theta))d\eta.$$

Проблемы.

1. Достоинство использованного здесь метода многих масштабов проявляется в простой и ясной структуре главного члена ФАР как медленно деформирующегося N-солитонного потенциала. Может создаться впечатление, что на этом пути легко построить полное ФАР с любой степенью точности. Однако это не так, и трудности обнаруживаются при анализе второй поправки. Источником проблем является неоднородная по x, t структура асимптотики коэффициентов ФАР. Так, для первой поправки видно, что в разных секторах она определяется разными характерными переменными. Выявлять такие асимптотики из многократных интегралов Фурье весьма сложно. Для детального анализа решения более подходящим представляется метод согласования [27], который сводит дело к серии стандартных задач в разных подобластях. Однако этот подход довольно громоздкий и нигде не обсуждался.

2. Следующие член в асимптотике параметров B, S не известен. Для его нахождения требуется детальный анализ второй поправки с более точным учетом влияния непрерывного спектра, как это сделано в [28], см. также [29].

3. При этом придется учесть, что в первой поправке остался произвол в коэффициенте интегральной части спектрального разложения (4.2) в виде функции $\hat{V}_1(k,\tau)|_{\tau=0} = 0$, неопределенной при $\tau > 0$. Если эта функция достаточно гладкая, например, гельдеровская по k с показателем α, то соответствующая часть интеграла из (3.2) мала, $\mathcal{O}(t^{-\alpha/3})$ при $t \to \infty$, и не влияет главный член ФАР. Однако влияние ее на поправки и даже порядок поправки остаются неизвестными. Здесь требуется исследование асимптотики пятикратных интегралов типа Фурье с ядром Коши, которое до сих пор не проводилось.

4. Вопрос об оценке остаточного члена для асимптотики точного решения (обоснование асимптотического разложения) представляет отдельную проблему. Он может решаться либо с помощью априорных оценок, как в [19], либо с использованием спектрального преобразования (2.3)–(2.5) аналогично методу Фурье в [31].

Литература

[1] Теория солитонов / Под ред. Новикова С. П. — М.: Наука. 1980.

[2] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. — М.: Мир. 1985.

[3] Христов Е. Х. О спектральных свойствах операторов, порождающих уравнения типа КдФ // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 9. — С. 1548–1557.

[4] Deift P., Trubowitz E. Inverse scattering on the line // Comm Pure & Appl Math. — 1979. — V. 32. — P. 121–251.

[5] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука. 1974.

[6] Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ приближениях // Современные проблемы математики. Вып. 15. — М.: ВИНИТИ, 1980. — С. 3–94.

[7] Flashka H., Forest M. G., McLaughlin D. W. Multiphase spectral spectral solution of the Korteweg–de Vries equation // Comm. Pure Appl. Math. — 1980. — V. 33, No. 6. — P. 739–784.

[8] Кричевер И. М. Гессианы интегралов уравнения Кортевега–де Фриза и возмущения конечнозонных решений // ДАН СССР. — 1983. — Т. 270, № 6. — С. 1312–1316.

[9] Кричевер И. М. Метод усреднения для двумерных интегрируемых уравнений // Функц. анализ и его приложения. — 1988. — Т. 22, вып. 3. — С. 37–52.

[10] Карпман В. И., Маслов Е. М. Теория возмущений для солитонов // ЖЭТФ. — 1977. — Т. 73, № 8. — С. 538–559.

[11] Вакуленко С. А. Действие возмущения на солитоны // Записки научных сем. ЛОМИ. — 1979. — Т. 89. — С. 91–96.

[12] Grimshaw R. Slowly varyng solitary waves. 1. Korteweg–de Vries eguation // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1979. — V. A 368. — P. 359–375.

[13] Маслов Е. М. К теории приближения для солитонов во втором приближении // Теорет. и матем. физика. — 1980. — Т. 42, № 3. — С. 362–370.

[14] Ньюэлл А. Обратное преобразование рассеяния // Солитоны / Под ред. Буллаф Р. Л., Кодри Ф. — М.: Мир, 1983. — С. 193–269.

[15] Абловиц А., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир. 1987.

[16] Карпман В. И. Система солитонов под воздействием возмущений и осцилляционные ударные волны // ЖЭТФ. — 1979. — Т. 77, № 1. — С. 114–123.

[17] Маслов В. П., Цупин В. А. Необходимые условия существования бесконечно узких солитонов в газовой динамике // ДАН СССР. — 1979. — Т. 246, № 2. — С. 298–300.

[18] Маслов В. П., Омельянов Г. А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // УМН. — 1981. — Т. 36, вып. 3. — С. 63–126.

[19] Маслов В. П., Омельянов Г. А. Об условиях типа Гюгонио для бесконечно узких решений уравнения простых волн // Сиб. мат. журнал. — 1983. — Т. 24. — С. 172–182.

[20] Sachs R. L. Completeness of derifatives of sguared Schrödinger eigenfunctions and explicit solutions of the linearized KdV eguation // SIAM J. Mat. Anal. — 1983. — V. 14, No. 4. — P. 674–680.

[21] Калякин Л. А. Возмущение солитона Кортевега–де Фриза // Теорет. и матем. физика. — 1992. — Т. 92, № 1. — С. 62–76.

[22] Аркадьев В. А., Погребков А. К., Поливанов М. К. Разложение по квадратам, симплектические и пуассоновы структуры, ассоциированные с задачей Штурма–Лиувилля. 1 // Теорет. и матем. физика. — 1987. — Т. 72, № 3. — С. 323–339.

[23] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля // Теорет. и матем. физика. — 1974. — Т. 21, № 2. — С. 160–173.

[24] Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

[25] Калякин Л. А. Асимптотика двойного интеграла типа Фурье из теории возмущений солитонов // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 6. — С. 1010–1024.

[26] Калякин Л. А. Асимптотика одного интеграла, возникающего в теории возмущений солитонов КдФ // Математ. заметки. — 1991. — Т. 50, № 5. — С. 32–42.

[27] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.

[28] Киселев О. М. Асимптотика кинка возмущенного уравнения Sin–Gordon // Теорет. и матем. физика. — 1992. — Т. 93, № 1. — С. 39–48.

[29] Доброхотов С. Ю. Резонансная поправка к адиабатически возмущенному конечнозонному почти периодическому решению уравнения Кортевега–де Фриза // Математ. заметки. — 1988. — Т. 44, № 4. — С. 551–554.

[30] Калякин Л. А. Асимптотика первой поправки в возмущении N-солитонного решения уравнения КдФ // Математ. заметки. — 1995. — Т. 58, № 2. — С. 204–217.

[31] Калякин Л. А. К задаче о первой поправке в теории возмущения солитонов // Математ. сборник. — 1995. — Т. 186, № 7. — С. 51–75.

Статья поступила в редакцию в марте 1997 г.