Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). С. 29-39. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-29-39

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М. Мамажонов

Кокандский государственный педагогический институт имени Мукими, г. Коканд, ул. Туран, 23, Узбекистан
E-mail: bek84-08@mail.ru

В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа вида $\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$ в пятиугольной области. Доказывается однозначная разрешимость этой поставленной задачи методами построения решения, интегральных и дифференциальных уравнений

Ключевые слова. Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, однозначная разрешимость.

MSC 35M12

ABOUT ONE BOUNDARY TASK FOR THE PARABOLO-HYPERBOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER IN PENTAGONAL AREA

M. Mamajonov

Kokand State Pedagogical Institute named after Mukimi, Kokand city, Turan Street, 23, Uzbekistan
E-mail: bek84-08@mail.ru

In this paper, one boundary task for the equation of the fourth order of a parabolo-hyperbolic holotype look $\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$ is put and investigated in pentagonal area. Unequivocal resolvability of this put task is proved by methods of creation of the decision, the integrated and differential equations

Keywords. Differential and integrated equations, method of creation of the decision, boundary task, unequivocal resolvability.

Введение

В настоящей статье ставится и исследуется одна краевая задача для парабологиперболического уравнения четвертого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0 \tag{1}$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$; $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in D_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in D_i,\ i=2,3;\end{cases}$ G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3- прямоугольник с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0, а $a_2,b_2\in R$, $\gamma_2=\frac{b_2}{a_2}$, причем $1<\gamma_2<+\infty$.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{D}$; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области D при $x\neq 0$, $y\neq 0$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\ \ 0\le y\le 1; \tag{2}$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y\le 1; \tag{3}$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_3(y),\ \ 0\le y\le 1; \tag{4}$$

$$u|_{BC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1; \tag{5}$$

$$u|_{DF}=\psi_2(x),\ -1\le x\le -\frac{1}{2}; \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1; \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC}=\psi_4(x),\ -1\le x\le 0; \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC}=\psi_5(x),\ 0\le x\le 1; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{DC}=\psi_6(x),\ -1\le x\le 0; \tag{10}$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=T(x),\ -1\le x\le 1; \tag{11}$$

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=N(x),\ -1\le x\le 1; \tag{12}$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ -1\le x\le 1; \tag{13}$$

$$u_{yyy}(x,+0)=u_{yyy}(x,-0)=\Theta(x),\ 0\le y\le 1; \tag{14}$$

$$u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1; \tag{15}$$

$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1; \tag{16}$$

$$u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_3(y),\ 0\le y\le 1; \tag{17}$$

где

$$T(x) = \begin{cases} \tau_1(x), \ 0 \le x \le 1, \\ \tau_2(x), \ -1 \le x \le 0; \end{cases}$$

$$N(x) = \begin{cases} \nu_1(x), \ 0 \le x \le 1, \\ \nu_2(x), \ -1 \le x \le 0; \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} \mu_1(x), \ 0 \le x \le 1, \\ \mu_2(x), \ -1 \le x \le 0; \end{cases}$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x), \ 0 \le x \le 1, \\ \theta_2(x), \ -1 \le x \le 0; \end{cases}$$

$\varphi_i \ \left(i=\overline{1,3}\right)$, $\psi_j \ \left(j=\overline{1,6}\right)$ - заданные достаточно гладкие функции, τ_i, ν_i, $\mu_i \ (i=\overline{1,3})$, $\theta_j \ (j=1,2)$ - неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=-1$ или $x-y=1$, а $F\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Теорема. *Если* $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$, $\psi_5 \in C^2[0,1]$, $\psi_6 \in C^2[-1,0]$, *причем выполняется условие согласования* $\varphi_1(0)=\psi_1(1), \varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi'_4(0)=-\psi'_3(0)$, *то задача-1 допускает единственное решение.*

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(b_2x-a_2y)+\omega_{12}(x), \ (x,y)\in G_1, \tag{18}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(b_2x-a_2y)+\omega_{i2}(x), \ (x,y)\in G_i \ \ (i=2,3), \tag{19}$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y), \ (x,y)\in G_i \ \left(i=\overline{1,3}\right)$, причем функции $\omega_{i1}(b_2x-a_2y), \ \omega_{i2}(x) \ \left(i=\overline{1,3}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Решение уравнения (19) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) представляется в виде

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\omega_{21}(b_2\xi-a_2\eta)+\omega_{22}(\xi)\right]d\xi. \tag{20}$$

Подставляя (20) в условия (7) и (8) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}((b_2-a_2)x+a_2)+\omega_{22}(x)=-\sqrt{2}\psi'_3(x), \ 0\le x\le 1, \tag{21}$$

$$\omega_{21}((b_2+a_2)x+a_2)+\omega_{22}(x)=\sqrt{2}\psi'_4(x), \ -1\le x\le 0. \tag{22}$$

Теперь подставляя (20) в условия (9) и (10), после некоторых выкладок, получим

$$\frac{b_2+a_2}{b_2-a_2}\omega_{21}((b_2+a_2)x+a_2)+\omega_{22}(x)=2\psi_5(x)-2T''(1)+2N'(1)+$$

$$+\frac{2b_2}{b_2-a_2}\omega_{21}(b_2)+2\omega_{22}(1), \ 0\le x\le 1. \tag{23}$$

$$\frac{b_2-a_2}{b_2+a_2}\omega_{21}\left((b_2+a_2)x+a_2\right)+\omega_{22}(x)=2\psi_6(x)-2T''(-1)-2N'(-1)+$$
$$+\frac{2b_2}{b_2+a_2}\omega_{21}(-b_2)+2\omega_{22}(-1),\ -1\leq x\leq 0. \tag{24}$$

Вычитая из (23) равенство (21), находим

$$\omega_{21}\left((b_2+a_2)x+a_2\right)=\frac{b_2-a_2}{a_2}\left[\psi_5(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi'_3(x)\right]-$$
$$-\frac{b_2-a_2}{a_2}\left[T''(1)-N'(1)\right]+\frac{b_2}{a_2}\omega_{21}(b_2)+\frac{b_2-a_2}{a_2}\omega_{22}(1). \tag{25}$$

Подставляя (25) в (21), получим

$$\omega_{22}(x)=-\sqrt{2}\psi'_3(x)-\frac{b_2-a_2}{a_2}\left[\psi_5(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\psi'_3(x)\right]+$$
$$+\frac{b_2-a_2}{a_2}\left[T''(1)-N'(1)\right]-\frac{b_2}{a_2}\omega_{21}(b_2)-\frac{b_2-a_2}{a_2}\omega_{22}(1). \tag{26}$$

Меняя в (25) аргумент $(b_2+a_2)x+a_2$ на b_2x-a_2y и слагая полученное равенство и (26), имеем

$$\omega_{21}(b_2x-a_2y)+\omega_{22}(x)=\frac{b_2-a_2}{a_2}\left[\psi_5\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2-a_2}\right)-\psi_5(x)\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{2}(b_2-a_2)}{2a_2}\left[\psi'_3\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2-a_2}\right)-\psi'_3(x)\right]-\sqrt{2}\psi'_3(x),\ a_2\leq b_2x-a_2y\leq b_2,\ 0\leq x\leq 1. \tag{27}$$

Вычитая из (22) равенство (24), находим

$$\omega_{21}\left((b_2+a_2)x+a_2\right)=\frac{b_2+a_2}{a_2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\psi'_4(x)-\psi_6(x)\right]+$$
$$+\frac{b_2+a_2}{a_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]-\frac{b_2}{a_2}\omega_{21}(-b_2)-\frac{b_2+a_2}{a_2}\omega_{22}(-1). \tag{28}$$

Подставляя (28) в (22), получим

$$\omega_{22}(x)=\sqrt{2}\psi'_4(x)-\frac{b_2+a_2}{a_2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\psi'_4(x)-\psi_6(x)\right]-$$
$$-\frac{b_2+a_2}{a_2}\left[T''(-1)+N'(-1)\right]+\frac{b_2}{a_2}\omega_{21}(-b_2)+\frac{b_2+a_2}{a_2}\omega_{22}(-1). \tag{29}$$

Меняя в (28) аргумент $(b_2+a_2)x+a_2$ на b_2x-a_2y и слагая полученное равенство и (29), имеем

$$\omega_{21}(b_2x-a_2y)+\omega_{22}(x)=\sqrt{2}\psi'_4(x)-\frac{b_2+a_2}{a_2}\left[\psi_6\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\right)-\psi_6(x)\right]+$$

$$+\frac{\sqrt{2}\left(b_2+a_2\right)}{2a_2}\left[\psi'_4\left(\frac{b_2x-a_2y-a_2}{b_2+a_2}\right)-\psi'_4\left(x\right)\right],\ -b_2\le b_2x-a_2y\le a_2,\ -1\le x\le 0. \quad (30)$$

Из (27) и (30) следует $\psi'_4\left(0\right)=-\psi'_3\left(0\right)$.

Теперь подставляя (20) в (5), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T\left(x\right)$ и $N\left(x\right)$:

$$T'\left(x\right)+N\left(x\right)=\alpha_1\left(x\right),\ -1\le x\le 1, \quad (31)$$

где $\alpha_1\left(x\right)=\psi'_1\left(\frac{x+1}{2}\right)+\int\limits_0^{\frac{x-1}{2}}\left[\omega_{21}\left(b_2x-\left(b_2+a_2\right)\eta\right)+\omega_{22}\left(x-\eta\right)\right]d\eta$.

а) При $-1\le x\le 0$ уравнение (31) имеет вид

$$\tau'_2\left(x\right)+\nu_2\left(x\right)=\alpha_1\left(x\right),\ -1\le x\le 0. \quad (32)$$

Далее, подставляя (20) в (6), получим соотношение

$$\tau'_2\left(x\right)-\nu_2\left(x\right)=\delta_1\left(x\right),\ -1\le x\le 0, \quad (33)$$

где $\delta_1\left(x\right)=\psi'_2\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int\limits_0^{-\frac{x+1}{2}}\left[\omega_{21}\left(b_2x+\left(b_2-a_2\right)\eta\right)+\omega_{22}\left(x+\eta\right)\right]d\eta$.

Из (32) и (33) находим функции $\tau'_2\left(x\right)$ и $\nu_2\left(x\right)$:

$$\tau'_2\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1\left(x\right)+\delta_1\left(x\right)\right],$$

$$\nu_2\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1\left(x\right)-\delta_1\left(x\right)\right]. \quad (34)$$

Интегрируя первое равенство из (34) от -1 до x, находим

$$\tau_2\left(x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}\left[\alpha_1\left(t\right)+\delta_1\left(t\right)\right]dt+\psi_2\left(-1\right).$$

б) При $0\le x\le 1$ из (31) имеем

$$\tau'_1\left(x\right)+\nu_1\left(x\right)=\alpha_1\left(x\right),\ 0\le x\le 1. \quad (35)$$

Теперь переходя в уравнении (19) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, в силу (11) и (13) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1\left(x\right)$ и $\mu_1\left(x\right)$:

$$\tau''_1\left(x\right)-\mu_1\left(x\right)=\omega_{21}\left(b_2x\right)+\omega_{22}\left(0\right). \quad (36)$$

Дифференцируя уравнение (19) $(i=2)$ по y и переходя в полученном уравнении к пределу при $y\to 0$, в силу (12) и (14) при $0\le x\le 1$, получим соотношение между неизвестными функциями $\nu_1\left(x\right)$ и $\theta_1\left(x\right)$:

$$\nu''_1\left(x\right)-\theta_1\left(x\right)=-a_2\omega'_{21}\left(b_2x\right). \quad (37)$$

Далее, уравнение (18) можно переписать в виде

$$a_2u_{1xxxy}-a_2u_{1xyy}+b_2u_{1xxyy}-b_2u_{1yyy}=0.$$

Переходя в последнем уравнении к пределу при $y \to 0$, получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$:

$$a_2\nu'''_1\ (x) - a_2\mu'_1(x) + b_2\mu''_1(x) - b_2\theta_1(x) = 0. \tag{38}$$

Исключая из (35), (36), (37) и (38) функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и $\theta_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение трижды от 0 до x, имеем

$$\tau'_1(x) + \tau_1(x) = \alpha_2(x) + k_1\frac{x^2}{2} + k_2x + k_3,\ 0 \le x \le 1,$$

где

$$\alpha_2(x) = -\frac{a_2}{b_2 - a_2}\alpha_1(x) + \frac{b_2}{b_2 - a_2}\int\limits_0^x \alpha_1(t)\,dt - \frac{a_2}{b_2 - a_2}\int\limits_0^x (x-t)\,\omega_{22}(t)\,dt +$$

$$+\frac{b_2}{b_2 - a_2}\int\limits_0^x \omega_{21}(b_2t)\,dt + \frac{b_2}{b_2 - a_2}\int\limits_0^x \omega_{22}(t)\,dt.$$

Теперь решая последнее уравнение при условиях $\tau_1(1) = \varphi_1(0)$, $\tau'_1(1) = \varphi'_1(0) - \sqrt{2}\psi_3(1)$, $\tau_1(0) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}[\alpha_1(t) + \delta_1(t)]\,dt + \psi_2(-1)$, $\tau'_1(0) = \frac{1}{2}[\alpha_1(0) + \delta_1(0)]$,

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) = \int\limits_0^x \exp(t-x)\,\alpha_2(t)\,dt + k_1\left[\frac{x^2}{2} - x + 1 - \exp(-x)\right] +$$

$$+k_2[x - 1 + \exp(-x)] + k_3[1 - \exp(-x)] + k_4\exp(-x),$$

где

$$k_4 = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0}[\alpha_1(t) + \delta_1(t)]\,dt + \psi_2(-1),$$

$$k_3 = \frac{1}{2}[\alpha_1(0) + \delta_1(0)] - \alpha_2(0) + k_4,$$

$$k_2 = \frac{1}{e-3}\left[k_3 + k_4 - 2\varphi_1(0) + (e-2)\left[\varphi'_1(0) - \sqrt{2}\psi_3(1)\right] - (e-2)\,\alpha_2(1) + \int\limits_0^1 \exp(t)\,\alpha_2(t)\,dt\right],$$

$$k_1 = 2\varphi_1(0) + 2\left[\varphi'_1(0) - \sqrt{2}\psi_3(1)\right] - 2\alpha_2(1) - 2k_3 - 2k_2.$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Переходяя в уравнениях (19) $(i=2)$ и (19) $(i=3)$ к пределу при $y \to 0$ с учетом условий (11), (13), получим

$$\omega_{31}(b_2x) + \omega_{32}(x) = \omega_{21}(b_2x) + \omega_{22}(x). \tag{39}$$

Теперь дифференцируя уравнения (19) $(i=2)$ и (19) $(i=3)$ по y и переходя в полученном уравнении к пределу при $y \to 0$, с учетом (12) и (13), имеем

$$\omega'_{31}\left(b_2x\right) = \omega'_{21}\left(b_2x\right).$$

Интегрируя это равенство от 0 до x и производя замену $b_2x \sim b_2x - a_2y$, находим

$$\omega_{31}\left(b_2x - a_2y\right) = \omega_{21}\left(b_2x - a_2y\right) - \omega_{21}\left(0\right) + \omega_{31}\left(0\right),\ -b_2 \le b_2x - a_2y \le 0.$$

Подставляя это равенство в (39), находим

$$\omega_{32}\left(x\right) = \omega_{22}\left(x\right) + \omega_{21}\left(0\right) - \omega_{31}\left(0\right),\ -1 \le x \le 0.$$

Слагая последние две равенства, находим

$$\omega_{31}\left(b_2x - a_2y\right) + \omega_{32}\left(x\right) = \omega_{21}\left(b_2x - a_2y\right) + \omega_{22}\left(x\right). \tag{40}$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx} - u_{3yy} = \Omega_{31}\left(b_2x - a_2y\right) + \Omega_{32}\left(x\right),\ (x, y) \in G_3, \\ u_3\left(x, 0\right) = T_2\left(x\right),\ u_{3y}\left(x, 0\right) = N_2\left(x\right),\ -2 \le x \le 1, \\ u_3\left(-1, y\right) = \varphi_2\left(y\right),\ u_{3x}\left(-1, y\right) = \varphi_3\left(y\right),\ u_3\left(0, y\right) = \tau_3\left(y\right),\ 0 \le y \le 1, \end{cases}$$

где $\Omega_{31}\left(b_2x - a_2y\right) = \omega_{31}\left(b_2x - a_2y\right)$, при $-b_2 \le b_2x - a_2y \le 0$, $\Omega_{32}\left(x\right) = \omega_{32}\left(x\right)$, $T_2\left(x\right) = \tau_2\left(x\right)$, $N_2\left(x\right) = \nu_2\left(x\right)$ при $-1 \le x \le 0$, а вне этих промежутков они пока неизвестны.

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_3\left(x, y\right) = u_{31}\left(x, y\right) + u_{32}\left(x, y\right) + u_{33}\left(x, y\right) + u_{34}\left(x, y\right), \tag{41}$$

где $u_{31}\left(x, y\right)$ —решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx} - u_{31yy} = 0, \\ u_{31}\left(x, 0\right) = T_2\left(x\right),\ u_{31y}\left(x, 0\right) = 0,\ -2 \le x \le 1, \\ u_{31}\left(-1, y\right) = \varphi_2\left(y\right),\ u_{31}\left(0, y\right) = \tau_3\left(y\right),\ 0 \le y \le 1; \end{cases} \tag{42}$$

$u_{32}\left(x, y\right)$ —решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx} - u_{32yy} = 0, \\ u_{32}\left(x, 0\right) = 0,\ u_{32y}\left(x, 0\right) = N_2\left(x\right),\ -2 \le x \le 1, \\ u_{32}\left(-1, y\right) = 0,\ u_{32}\left(0, y\right) = 0,\ 0 \le y \le 1; \end{cases} \tag{43}$$

$u_{33}\left(x, y\right)$ —решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx} - u_{33yy} = \Omega_{31}\left(b_2x - a_2y\right), \\ u_{33}\left(x, 0\right) = 0,\ u_{33y}\left(x, 0\right) = 0,\ -2 \le x \le 1, \\ u_{33}\left(-1, y\right) = 0,\ u_{33}\left(0, y\right) = 0,\ 0 \le y \le 1; \end{cases} \tag{44}$$

$u_{34}\left(x, y\right)$ —решение задачи

$$\begin{cases} u_{34xx} - u_{34yy} = \Omega_{32}\left(x\right), \\ u_{34}\left(x, 0\right) = 0,\ u_{34y}\left(x, 0\right) = 0,\ -2 \le x \le 1, \\ u_{34}\left(-1, y\right) = 0,\ u_{34}\left(0, y\right) = 0,\ 0 \le y \le 1. \end{cases} \tag{45}$$

Методом продолжения находим решения задач (42)-(45). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right], \tag{46}$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\tau_3(x)-\tau_2(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt, \tag{47}$$

где

$$N_2(x)=\begin{cases}-\nu_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ -\nu_2(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{31}(b_2\xi-a_2\eta)\,d\xi. \tag{48}$$

Первые два условия задачи (44) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье условие, находим

$$\int\limits_0^y\Omega_{31}(b_2(y-1)-(b_2+a_2)\eta)\,d\eta+\int\limits_0^y\Omega_{31}(b_2(-1-y)+(b_2-a_2)\eta)\,d\eta=0. \tag{49}$$

Производя некоторые преобразования и дифференцируя полученное уравнение, после некоторых выкладок, имеем

$$\frac{2a_2^2}{b_2^2-a_2^2}\Omega_{31}(-b_2-a_2y)-\frac{b_2}{b_2-a_2}\Omega_{31}(b_2(-1-y))=\frac{b_2}{b_2+a_2}\omega_{31}(b_2(y-1)). \tag{50}$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (44), имеем

$$\int\limits_0^y\Omega_{31}(b_2y-(b_2+a_2)\eta)\,d\eta+\int\limits_0^y\Omega_{31}((b_2-a_2)\eta-b_2y)\,d\eta=0.$$

Дифференцируя это уравнение, после некоторых преобразований, находим

$$\Omega_{31}(b_2y)=\frac{2a_2^2}{b_2(b_2-a_2)}\omega_{31}(-a_2y)-\frac{b_2+a_2}{b_2-a_2}\omega_{31}(-b_2y). \tag{51}$$

Решение задачи (45) имеет вид

$$u_{34}(x,y)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(\xi)\,d\xi, \tag{52}$$

где

$$\Omega_{32}(x)=\begin{cases}-\omega_{32}(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \omega_{32}(x),\ -1\le x\le 0,\\ -\omega_{32}(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Из этого соотношения следует $\omega_{32}(-1)=0$, $\omega_{32}(0)=0$.

Подставляя (46), (47), (48) и (52) в (41), получим

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{31}(b_2\xi-a_2\eta)\,d\xi-\int\limits_0^y d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(\xi)\,d\xi. \qquad (53)$$

Дифференцируя (53) по x и полагая в полученном равенстве $x\to -1$, после длинных вычислений, находим

$$\Omega_{31}(b_2(-1-y))=\frac{2a_2}{b_2}\left[\tau''{}_2(y-1)-\varphi''{}_2(y)+\nu'{}_2(y-1)-\varphi'{}_3(y)-\omega_{32}(y-1)\right]-\omega_{31}(b_2(y-1)).$$

Подставляя последнее равенство в (50), после некоторых выкладок, получим

$$\Omega_{31}(-b_2-a_2y)=\frac{b_2+a_2}{a_2}\left[\tau''{}_2(y-1)-\varphi''{}_2(y)+\nu'{}_2(y-1)-\varphi'{}_3(y)-\omega_{32}(y-1)\right]-$$

$$-\frac{b_2}{a_2}\omega_{31}(b_2(y-1)).$$

Дифференцируя (53) по x и полагая в полученном равенстве $x\to 0$, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y)=\tau'{}_3(y)+\beta_1(y),\ 0\le y\le 1, \qquad (54)$$

где

$$\beta_1(y)=\tau'{}_2(-y)-\nu_2(-y)+\int\limits_{-y}^{0}\omega_{32}(z)\,dz+\frac{b_2}{b_2-a_2}\int\limits_{-y}^{-\frac{a_2}{b_2}y}\omega_{31}(b_2z)\,dz.$$

Теперь переходим в область G_1. Переходя в уравнении (18) к пределу при $y\to 0$ в силу условий (11) и (12) при $0\le x\le 1$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_2x)+\omega_{12}(x)=\tau''{}_1(x)-\nu_1(x), \qquad (55)$$

где введено обозначение

$$\omega_{11}(b_2x-a_2y)=\begin{cases}\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_2x-a_2y),\ 0\le b_2x-a_2y\le b_2,\\ \overline{\omega}_{11}(b_2x-a_2y),\ -a_2\le b_2x-a_2y\le 0,\end{cases}$$

причем $\overline{\overline{\omega}}_{11}(0)=\overline{\omega}_{11}(0)$.

Дифференцируя уравнение (18) по y и переходя в полученном уравнении к пределу при $y \to 0$, в силу (12) и (13) при $0 \le x \le 1$, затем интегрируя полученное уравнение от 0 до x, после некоторых преобразований, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_2 x) = -\frac{b_2}{a_2}\int\limits_0^x \left[\nu''_1(z) - \mu_1(z)\right]dz + \overline{\overline{\omega}}_{11}(0),\ 0 \le x \le 1. \tag{56}$$

Подставляя последнее равенство в (55), получим

$$\omega_{12}(x) = \tau''_1(x) - \nu_1(x) + \frac{b_2}{a_2}\int\limits_0^x \left[\nu''_1(z) - \mu_1(z)\right]dz - \overline{\overline{\omega}}_{11}(0),\ 0 \le x \le 1. \tag{57}$$

Меняя в (56) аргумент $b_2 x$ на $b_2 x - a_2 y$, затем слагая полученное равенство и (57), находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{12}(x) = \tau''_1(x) - \nu_1(x) + \frac{b_2}{a_2}\int\limits_{x-\frac{a_2}{b_2}y}^{x} \left[\nu''_1(z) - \mu_1(z)\right]dz,\ 0 \le b_2 x - a_2 y \le b_2. \tag{58}$$

Теперь переходя в уравнениях (18) и (19) $(i = 3)$ к пределу при $x \to 0$ в силу условий (15) и (17), находим

$$\mu_3(y) - \tau'_3(y) = \overline{\omega}_{11}(-a_2 y) + \omega_{12}(0),\ \mu_3(y) - \tau''_3(y) = \omega_{31}(-a_2 y) + \omega_{32}(0).$$

Исключая из этих последних двух соотношений функцию $\mu_3(y)$, после некоторых выкладок, получим

$$\overline{\omega}_{11}(b_2 x - a_2 y) = \left[\tau''_3\left(y - \frac{b_2}{a_2}x\right) - \tau'_3\left(y - \frac{b_2}{a_2}x\right)\right] + \gamma_1\left(y - \frac{b_2}{a_2}x\right) + \overline{\overline{\omega}}_{11}(0),$$
$$-a_2 \le b_2 x - a_2 y \le 0, \tag{59}$$

где

$$\gamma_1\left(y - \frac{b_2}{a_2}x\right) = \omega_{31}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{32}(0) - \tau''_1(0) + \nu_1(0).$$

Слагая (57) и (59), получим

$$\overline{\omega}_{11}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{12}(x) = \left[\tau''_3\left(y - \frac{b_2}{a_2}x\right) - \tau'_3\left(y - \frac{b_2}{a_2}x\right)\right] + \gamma_2(x,y),\ -a_2 \le b_2 x - a_2 y \le 0, \tag{60}$$

где

$$\gamma_2(x,y) = \gamma_1\left(y - \frac{b_2}{a_2}x\right) + \tau''_1(x) - \nu_1(x) + \frac{b_2}{a_2}\int\limits_0^x \left[\nu''_1(z) - \mu_1(z)\right]dz.$$

Далее, записываем решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (2), (11) при $0 \le x \le 1$ и (15):

$$u_1(x,y) = \int\limits_0^y \tau_4(\eta)\,G_\xi(x,y;0,\eta)\,d\eta - \int\limits_0^y \varphi_1(\eta)\,G_\xi(x,y;1,\eta)\,d\eta +$$

$$+\int\limits_0^1 \tau_1(\xi)\, G(x,y;\xi,0)\, d\xi - \int\limits_0^y d\eta \int\limits_0^{\frac{a_2}{b_2}\eta} \left[\overline{\omega}_{11}(b_2\xi - a_2\eta) + \omega_{12}(\xi)\right] G(x,y;\xi,\eta)\, d\xi -$$

$$-\int\limits_0^y d\eta \int\limits_{\frac{a_2}{b_2}\eta}^1 \left[\overline{\overline{\omega}}_{11}(b_2\xi - a_2\eta) + \omega_{12}(\xi)\right] G(x,y;\xi,\eta)\, d\xi. \tag{61}$$

Дифференцируя (61) по x и полагая $x \to 0$, с учетом равенств (54), (58), (60), после длинных вычислений, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau'_3(y)$:

$$\tau'_3(y) + \int\limits_0^y K(y,\eta)\, \tau'_3(\eta)\, d\eta = g(y),\; 0 \le y \le 1, \tag{62}$$

где $K(y,\eta)$, $g(y)$ – известные функции, причем $K(y,\eta)$ имеет слабую особенность $\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(y)$ – непрерывная функция, а

$$\left.\begin{array}{r} G(x,y;\xi,\eta) \\ N(x,y;\xi,\eta) \end{array}\right\} = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \mp \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения Фурье.

Решая уравнение (62), находим функцию $\tau'_3(y)$, тем самым и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\overline{\omega}_{11}(b_2x - a_2y) + \omega_{12}(x)$, $T_2(x)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Замечание. В работе [1] был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа в области с одной линией изменения типа.

Список литературы

[1] Джураев Т. Д., Мамажанов М., “Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа”, *Дифференциальные уравнения*, **200**:1 (1986), 25–31. [Dzhuraev T. D., Mamazhanov M., “Kraevye zadachi dlya odnogo klassa uravnenij chetvertogo poryadka smeshannogo tipa”, *Differencial'nye uravneniya*, **200**:1 (1986), 25–31].

Для цитирования: Мамажонов М. Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в пятиугольной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 4(24). C. 29-39. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-29-39

For citation: Mamajonov M. About one boundary task for the parabolo-hyperbolic equation of the fourth order in pentagonal area, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **24**: 4, 29-39. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-29-39

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.05.2018