М. Блажак, Обратные бигамильтоновы разделимые цепочки, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 171–181

DOI: 10.4213/tmf1937

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 122, № 2
февраль, 2000

 М. Блажак*

ОБРАТНЫЕ БИГАМИЛЬТОНОВЫ РАЗДЕЛИМЫЕ ЦЕПОЧКИ

Для любой заданной разделимой бигамильтоновой цепочки предложена процедура построения соответствующей обратной цепочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотроим конечномерную гамильтонову систему, заданную гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + V(q) + c\beta(q), \tag{1}$$

где (q_i, p_i), $i = 1, \ldots, N$, – координаты и сопряженные импульсы, а c – дополнительная координата Казимира. Предположим, что в расширенном фазовом пространстве $M \ni (q, p, c)$ $(\dim M = 2N + 1)$ система (1) принадлежит бигамильтоновой цепочке

$$\begin{aligned} \pi_0 \nabla h_0 &= 0, \\ \pi_0 \nabla h_1 &= K_1 = \pi_1 \nabla h_0, \\ &\ldots \\ \pi_0 \nabla h_r &= K_r = \pi_1 \nabla h_{r-1}, \\ &\ldots \\ \pi_0 \nabla h_N &= K_N = \pi_1 \nabla h_{N-1}, \\ 0 &= \pi_1 \nabla h_N, \end{aligned} \tag{2}$$

где $h_0 = c,\ h_1 = H$.

Матрицы

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \pi_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \overline{K}_1 \\ -\overline{K}_1^T & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

образуют пару вырожденных совместимых матриц Пуассона в пространстве M, а матрицы

$$\theta_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & D \end{pmatrix} \tag{4}$$

*Physics Department, A. Mickiewicz University, Poznań, Poland

суть невырожденные совместимые матрицы Пуассона в $\overline{M} \ni (q,p)$ $(\dim \overline{M} = 2N)$. В выражениях (3), (4) $\overline{K}_1 = \theta_0 \overline{\nabla} h_1$, где $\overline{\nabla}$ – градиентный оператор в $\overline{M}$, а A, B, D зависят от координат (q,p). Заметим, что цепочка начинается с оператора Казимира с π_0 и заканчивается оператором Казимира с π_1. Кроме того, $K_r = \pi_0 \nabla h_r = (\overline{K}_r, 0)^T$, где оператор $\overline{K}_r = \theta_0 \overline{\nabla} h_r$ (∇ – оператор градиента в M, и $\phi = \theta_1 \circ \theta_0^{-1}$) есть оператор Ниженуиса ("наследственный" оператор), но не рекурсивный, поскольку он не инвариантен вдоль любого тока, генерируемого $\overline{K}_r$. Много примеров, относящихся к рассматриваемой ситуации, приведено в работе [1].

В работах [1–3] было показано, что каждая иерархия (2) с матрицей θ_1 вида

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & B(q) \\ -B(q)^T & D(q,p) \end{pmatrix} \tag{5}$$

и, следовательно, с гамильтонианами

$$h_r(q,p,c) = h_r(q,p) + c\beta_r(q) \tag{6}$$

является разделимой. Выражение для θ_1 вида (5) – наиболее общая форма второго тензора Пуассона в случае, если переход $(q,p,c) \to (\lambda,\mu,c)$ от естественных координат к координатам разделения задается точечным преобразованием.

В этой статье будет показано, что для каждой разделимой бигамильтоновой цепочки (2)–(6) существует соответствующая обратная бигамильтонова разделимая цепочка

$$\begin{aligned} \pi_0 \nabla h'_{N+1} &= 0, \\ \pi_0 \nabla h'_N &= K'_N = \pi_{-1} \nabla h'_{N+1}, \\ &\dots \\ \pi_0 \nabla h'_r &= K'_r = \pi_{-1} \nabla h'_{r+1}, \\ &\dots \\ \pi_0 \nabla h'_1 &= K'_1 = \pi_{-1} \nabla h'_2, \\ 0 &= \pi_{-1} \nabla h'_1, \end{aligned} \tag{7}$$

где $h'_{N+1} = h_0 = c$,

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} \theta_{-1} & \overline{K}'_N \\ -\overline{K}'^T_N & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta_{-1} = \theta_0 \circ \theta_1^{-1} \circ \theta_0 = \phi^{-2} \circ \theta_1, \tag{8}$$

$\overline{K}'_N = \theta_0 \overline{\nabla} h'_N$ и

$$h'_r(q,p,c) = h_r(q,p) + c\beta'_r(q), \qquad \beta'_r(q) = \frac{\beta_{r-1}(q)}{\beta_N(q)}, \quad r = 1, \dots, N. \tag{9}$$

Заметим, что соответствующие гамильтонианы и векторные поля в двух цепочках отличаются только частью, зависящей от c.

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНЫХ БИГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦЕПОЧЕК

Согласно результатам работ [1–3] естественная бигамильтонова цепочка (2)–(6) может быть приведена к представлению Дарбу–Ниженуиса (ДН) посредством канонического точечного преобразования переменных $\varphi\colon (\lambda,\mu)\to(q,p)$. Преобразование φ строится с помощью производящей функции

$$W=\sum_{i=1}^{N}p_i\sigma_i(\lambda)$$

из уравнений

$$q_i=\frac{\partial W}{\partial p_i},\qquad \mu_i=\frac{\partial W}{\partial\lambda_i},\tag{10}$$

где величины $q_i=\sigma_i(\lambda)$ вычисляются из соотношения

$$\beta_r(q)=(-1)^k\sum_{\substack{j_1,\dots,j_r\\ j_1<\dots<j_r}}\lambda_{j_1}\dots\lambda_{j_k}:=\rho_r(\lambda),\quad r=1,\dots,N,\tag{11}$$

а $\beta_0(q)=1:=\rho_0(\lambda)$, где $\rho_r(\lambda)$ – симметричные полиномы (полиномы Виета):

$$\begin{aligned}
\rho_1(\lambda)&=-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_N,\\
\rho_2(\lambda)&=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\dots+\lambda_{N-1}\lambda_N,\\
&\dots\\
\rho_N(\lambda)&=(-1)^N\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_N.
\end{aligned}\tag{12}$$

В координатах ДН цепочка (2) преобразуется в бигамильтонову цепочку Ниженуиса, для которой

$$\begin{aligned}
\pi_0&=\begin{pmatrix}0 & I & 0\\ -I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\pi_1&=\begin{pmatrix}0 & \Lambda & \frac{\partial h_1}{\partial\mu}\\ -\Lambda & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial\lambda}\\ -\left(\frac{\partial h_1}{\partial\mu}\right)^T & \left(\frac{\partial h_1}{\partial\lambda}\right)^T & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda&=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_N),\\
h_r(\lambda,\mu,c)&=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\rho_r}{\partial\lambda_i}\frac{f_i(\lambda_i,\mu_i)}{\Delta_i(\lambda)}+c\rho_r(\lambda)=h_r(q,p,c)\varphi,
\end{aligned}$$

$\rho_r(\lambda)$ задаются уравнениями (11), (12), $\Delta_i(\lambda)=\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)$ и $f_i(\lambda_i,\mu_i)$ – произвольные гладкие функции. Координаты ДН (λ,μ) являются координатами разделения в том смысле, что для произвольного гамильтониана (13) можно решить соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби [1, 3]. Заметим, что в ДН-координатах оператор Ниженуиса ϕ диагонален:

$$\phi = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Применим к бигамильтоновой цепочке в ДН-координатах каноническое преобразование

$$\psi : \qquad \lambda_i = \frac{1}{\bar{\lambda}_i}, \qquad \mu_i = -\bar{\lambda}_i^2 \bar{\mu}_i. \tag{15}$$

Получим

$$\begin{gathered} \rho_r(\lambda) = \frac{\rho_{N-r}(\bar{\lambda})}{\rho_N(\bar{\lambda})} := \bar{\rho}_{N+1-r}(\bar{\lambda}), \\ \bar{\rho}_{N+1-r}(\bar{\lambda}) = (-1)^r \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r \\ j_1<\cdots<j_r}} \frac{1}{\bar{\lambda}_{j_1}\ldots\bar{\lambda}_{j_r}}, \\ \frac{\partial \rho_r(\lambda)}{\partial \lambda_i} = -\frac{\bar{\lambda}_i}{\rho_N(\bar{\lambda})} \frac{\partial \rho_{N+1-r}(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}_i}, \\ \Delta_i(\lambda) = -\frac{\Delta_i(\bar{\lambda})}{\rho_N(\bar{\lambda})} \frac{1}{\bar{\lambda}_i^{N-2}}, \end{gathered} \tag{16}$$

следовательно,

$$\bar{h}_{N+1-r}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, c) = h_r(\lambda, \mu, c)\psi, \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{h}_r(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, c) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \rho_r(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}_i} \frac{\bar{f}_i(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i)}{\Delta_i(\bar{\lambda})} + c\bar{\rho}_r(\bar{\lambda}), \\ \bar{f}_i(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i) = \bar{\lambda}_i^{N-1} f_i\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_i}, -\bar{\lambda}_i^2 \bar{\mu}_i\right), \end{gathered} \tag{18}$$

и $\bar{\pi}_0 = \pi_0$,

$$\begin{gathered} \bar{\pi}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Lambda}^{-1} & \dfrac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\mu}} \\ -\bar{\Lambda}^{-1} & 0 & -\dfrac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\lambda}} \\ -\left(\dfrac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\mu}}\right)^T & \left(\dfrac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\lambda}}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\Lambda}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_1}, \ldots, \frac{1}{\bar{\lambda}_N}\right). \end{gathered} \tag{19}$$

Можно заметить, что

$$\begin{gathered} \bar{\rho}_1(\lambda) = (-1)^N \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_N}, \\ \ldots \\ \bar{\rho}_{N-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_3} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{N-1}\lambda_N}, \\ \bar{\rho}_N(\lambda) = -\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \cdots - \frac{1}{\lambda_N}. \end{gathered} \tag{20}$$

В работах [1, 2] такая цепочка была названа обратной цепочкой Ниженуиса и была доказана ее разделимость.

В силу произвольности функций $\bar f_i(\bar\lambda_i,\bar\mu_i)$ такая же обратная цепочка Ниженуиса существует для $\bar f_i(\bar\lambda_i,\bar\mu_i)=f_i(\bar\lambda_i,\bar\mu_i)$. Пусть теперь $\bar\lambda_i:=\lambda_i,\ \bar\mu_i:=\mu_i$. Справедливо следующее утверждение. Заданной цепочке Ниженуиса (2), где

$$\begin{gathered}\pi_1=\begin{pmatrix}0 & \Lambda & \frac{\partial h_1}{\partial\mu}\\ -\Lambda & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial\lambda}\\ -\left(\frac{\partial h_1}{\partial\mu}\right)^T & \left(\frac{\partial h_1}{\partial\lambda}\right)^T & 0\end{pmatrix},\\ h_0=c,\\ h_r=h_r(\lambda,\mu)+c\rho_r(\lambda),\quad r=1,\dots,N,\end{gathered}\tag{21}$$

можно, следуя описанной ниже процедуре, сопоставить обратную цепочку Ниженуиса (7), где

$$\begin{gathered}\pi_{-1}=\begin{pmatrix}0 & \Lambda^{-1} & \frac{\partial h'_N}{\partial\mu}\\ -\Lambda^{-1} & 0 & -\frac{\partial h'_N}{\partial\lambda}\\ -\left(\frac{\partial h'_N}{\partial\mu}\right)^T & \left(\frac{\partial h'_N}{\partial\lambda}\right)^T & 0\end{pmatrix},\\ h'_r=h_r(\lambda,\mu)+c\bar\rho_r(\lambda),\qquad r=1,\dots,N,\\ h'_{N+1}=c.\end{gathered}\tag{22}$$

Прежде всего заменим все функции $h_r(\lambda,\mu,c)$ на $h'_r(\lambda,\mu,c)$, полученные из h_r, а функции $\rho_r(\lambda)$ на $\bar\rho_r(\lambda)=\rho_{r-1}(\lambda)/\rho_N(\lambda)$. Затем заменим матрицу π_1 на π_{-1}, подставляя

$$\theta_{-1}=\phi^{-2}\theta_1=\begin{pmatrix}0 & \Lambda^{-1}\\ -\Lambda^{-1} & 0\end{pmatrix}$$

вместо

$$\theta_1=\begin{pmatrix}0 & \Lambda\\ -\Lambda & 0\end{pmatrix}$$

и меняя h_1 на h'_N в последней строке и последнем столбце. В правильности обратной бигамильтоновой цепочки (7) можно также убедиться прямым вычислением.

Выполним теперь обратное преобразование $\varphi^{-1}\colon(q,p)\to(\lambda,\mu)$, возвращаясь к естественным координатам (q,p). В результате получим соответствующие бигамильтонову и обратную бигамильтонову цепочки (2) и (7) в координатах (q,p,c), причем обратная бигамильтонова цепочка строится по такому же рецепту, т.е.

$$\begin{gathered}h_r=h_r(q,p)+c\beta_r(q)\Rightarrow h'_r=h_r(q,p)+c\frac{\beta_{r-1}(q)}{\beta_N(q)},\\ \pi_1=\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_0\overline{\nabla}h_1\\ -(\theta_0\overline{\nabla}h_1)^T & 0\end{pmatrix},\\ \Downarrow\\ \pi_{-1}=\begin{pmatrix}\theta_0\circ\theta_1^{-1}\circ\theta_0 & \theta_0\overline{\nabla}h'_N\\ -\left(\theta_0\overline{\nabla}h'_N\right)^T & 0\end{pmatrix},\end{gathered}\tag{23}$$

где величина, обратная к θ_1 в выражениии (5), имеет вид

$$\theta_1^{-1} = \begin{pmatrix} (B^{-1})^T \circ D \circ B^{-1} & -(B^{-1})^T \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

и

$$\theta_0 \circ \theta_1^{-1} \circ \theta_0 = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ -(B^{-1})^T & -(B^{-1})^T \circ D \circ B^{-1} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Заметим, что обе цепочки (2) и (7), заданные в естественных координатах, могут быть преобразованы к бигамильтонову виду Ниженуиса (13), причем каноническое преобразование φ может быть получено из соотношения $\rho_r(\lambda) = \beta_r(q)$, $r = 1, \ldots, N$, в первом случае и из соотношения $\rho_r(\lambda) = \beta_{N-r}(q)/\beta_N(q)$, $r = 1, \ldots, N$, во втором. Конечно, обе цепочки могут быть преобразованы и к виду обратной цепочки Ниженуиса, однако с точки зрения разделимости можно ограничиться рассмотрением только "прямых" цепочек Ниженуиса.

Сделаем следующее замечание. Рассмотрим множество расширенных функций

$$h_r(\lambda, \mu; a, b) = h_r(\lambda, \mu) + a\beta_r(\lambda) + b\beta'(\lambda). \tag{26}$$

Из этих функций могут быть одновременно построены бигамильтоновы и обратные бигамильтоновы иерархии. В первом случае величина $a := c$ трактуется как переменная Казимира, а b – как параметр, во втором случае a рассматривается в качестве параметра, а $b := c$ – в качестве переменной Казимира.

3. ПРИМЕРЫ

Чтобы проиллюстрировать сказанное выше, приведем некоторые примеры бигамильтоновых и обратных бигамильтоновых цепочек в естественных координатах (q, p, c).

Пример 1. *Расширение системы Хенона–Хейлеса, соответствующее одному оператору Казимира.*

Рассмотрим интегрируемый случай системы Хенона–Хейлеса, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1 q_2^2.$$

Ее первое расширение с одним оператором Казимира имеет вид [4]

$$(q_1)_{tt} = -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 + c, \qquad (q_2)_{tt} = -q_1 q_2 \tag{27}$$

и принадлежит бигамильтоновой цепочке

$$\begin{aligned} \pi_0 \nabla h_0 &= 0, \\ \pi_0 \nabla h_1 &= K_1 = \pi_1 \nabla h_0, \\ \pi_0 \nabla h_2 &= K_2 = \pi_1 \nabla h_1, \\ 0 &= \pi_1 \nabla h_2, \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$
\begin{aligned}
&h_0 = c,\\
&h_1 = h_1(q,p) + c\beta_1(q) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1q_2^2 - cq_1,\\
&h_2 = h_2(q,p) + c\beta_2(q) = \frac{1}{2}q_2p_1p_2 - \frac{1}{2}q_1p_2^2 + \frac{1}{16}q_2^4 +\\
&\qquad + \frac{1}{4}q_1^2q_2^2 - \frac{1}{4}cq_2^2,\\
&\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1 & \frac{1}{2}q_2 & p_1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}q_2 & 0 & p_2\\ -q_1 & -\frac{1}{2}q_2 & 0 & \frac{1}{2}p_2 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_1}\\ -\frac{1}{2}q_2 & 0 & -\frac{1}{2}p_2 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\\ -p_1 & -p_2 & \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Построение соответствующей обратной бигамильтоновой цепочки в соответствии с процедурой, описанной в предыдущем разделе, приводит к следующим результатам:

$$
\begin{aligned}
\pi_0\nabla h_3' &= 0,\\
\pi_0\nabla h_2' &= K_2' = \pi_{-1}\nabla h_3',\\
\pi_0\nabla h_1' &= K_1' = \pi_{-1}\nabla h_2',\\
0 &= \pi_{-1}\nabla h_1',
\end{aligned}
\tag{29}
$$

где

$$
\begin{aligned}
h_1' &= h_1(q,p) - \frac{4}{q_2^2}c,\\
h_2' &= h_2(q,p) + \frac{4q_1}{q_2^2}c,\\
h_3' &= c,
\end{aligned}
$$

$$
\pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{q_2} & \frac{1}{2}q_2p_2\\ 0 & 0 & \frac{2}{q_2} & -\frac{4q_1}{q_2^2} & \frac{1}{2}q_2p_1 - q_1p_2\\ 0 & -\frac{2}{q_2} & 0 & \frac{2p_2}{q_2^2} & -\frac{\partial h_2'}{\partial q_1}\\ -\frac{2}{q_2} & \frac{4q_1}{q_2^2} & -\frac{2p_2}{q_2^2} & 0 & -\frac{\partial h_2'}{\partial q_2}\\ -\frac{1}{2}q_2p_2 & -\frac{1}{2}q_2p_1 + q_1p_2 & \frac{\partial h_2'}{\partial q_1} & \frac{\partial h_2'}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Уравнения Ньютона, связанные с естественным гамильтонианом h_1', имеют вид

$$
(q_1)_{tt} = -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2, \qquad (q_2)_{tt} = -q_1q_2 - \left(\frac{2}{q_2}\right)^3 c. \tag{30}
$$

Это есть не что иное, как второе хорошо известное расширение [5] рассмотренной системы Хенона–Хейлеса с одним оператором Казимира. Обе системы (27) и (30) могут быть переведены в цепочку Нижениуса (13) соответствующими преобразованиями

$$q_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad p_1 = \frac{\lambda_1\mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2\mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1},$$
$$q_2 = 2\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}, \qquad p_2 = \sqrt{-\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)$$

и

$$q_1 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}, \qquad p_1 = \lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda_1\mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2\mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right),$$
$$q_2 = \frac{2}{\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}, \qquad p_2 = -\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1^2\mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2^2\mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right).$$

Пример 2. *Расширение задачи Кеплера на плоскости с одним оператором Казимира.*

Рассмотрим классическую задачу о частице, движущейся на плоскости под воздействием потенциала Кеплера и добавочного однородного силового поля. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$h_1(q,p,c) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{a}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - cq_2, \qquad a = \text{const}. \tag{31}$$

Существует второй независимый интеграл движения

$$h_2(q,p,c) = -\frac{1}{2}q_2p_1^2 + \frac{1}{2}q_1p_1p_2 + \frac{1}{2}\frac{aq_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{1}{4}cq_1^2, \tag{32}$$

который вместе с интегралом $h_0 = c$ позволяет построить бигамильтонову цепочку (28) со второй структурой Пуассона в виде

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}q_1 & p_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}q_1 & q_2 & p_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}q_1 & 0 & -\frac{1}{2}p_1 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \\ -\frac{1}{2}q_1 & -q_2 & \frac{1}{2}p_1 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \\ -p_1 & -p_2 & \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная бигамильтонова цепочка (29) задана для функций

$$h_1'(q,p,c) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{a}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{4}{q_1^2}c,$$
$$h_2'(q,p,c) = -\frac{1}{2}q_2p_1^2 + \frac{1}{2}q_1p_1p_2 + \frac{1}{2}\frac{aq_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + \frac{4q_2}{q_1^2}c,$$
$$h_3' = c$$

и второго тензора Пуассона в форме

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\frac{q_2}{q_1^2} & \frac{2}{q_1} & \frac{1}{2}q_2p_1 - q_1p_2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{q_1} & 0 & \frac{1}{2}q_2p_2 \\ \frac{4q_2}{q_1^2} & -\frac{2}{q_1} & 0 & -2\frac{p_1}{q_1^2} & -\frac{\partial h_2'}{\partial q_1} \\ -\frac{2}{q_1} & 0 & 2\frac{p_1}{q_1^2} & 0 & -\frac{\partial h_2'}{\partial q_2} \\ -\frac{1}{2}q_2p_1 + q_1p_2 & -\frac{1}{2}q_2p_2 & \frac{\partial h_2'}{\partial q_1} & \frac{\partial h_2'}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. *Расширение системы Гарнье на плоскости с одним оператором Казимира.*

Эта система имеет гамильтониан

$$H \equiv h_1(q,p) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2)^2 - \frac{1}{2}(\alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_2^2),$$

где $\alpha_1 \neq \alpha_2$ – действительные положительные константы. Как хорошо известно, эта классическая система является разделимой в эллиптических координатах Якоби. Вторая независимая константа движения имеет вид

$$\begin{aligned} h_2(q,p) = -\frac{1}{2}\alpha_2 p_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 p_2^2 + \frac{1}{4}(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 - \\ -\frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2)(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2). \end{aligned}$$

Известная [6] бигамильтонова цепочка (28) задается соотношениями

$$\begin{aligned} h_0 &= c, \\ h_1(q,p,c) &= h_1(q,p) + c\left[\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) - (\alpha_1+\alpha_2)\right], \\ h_2(q,p,c) &= h_2(q,p) + c\left[\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2)\right], \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 - \frac{1}{2}q_1^2 & -\frac{1}{2}q_1q_2 & p_1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}q_1q_2 & \alpha_2 - \frac{1}{2}q_2^2 & p_2 \\ \frac{1}{2}q_1^2 - \alpha_1 & \frac{1}{2}q_1q_2 & 0 & \frac{1}{2}q_2p_1 - \frac{1}{2}q_1p_2 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \\ \frac{1}{2}q_1q_2 & \frac{1}{2}q_2^2 - \alpha_2 & \frac{1}{2}q_1p_2 - \frac{1}{2}q_2p_1 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \\ -p_1 & -p_2 & \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная цепочка имеет вид

$$\begin{aligned} h_1'(q,p,c) &= h_1(q,p) + c\frac{1}{\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2)}, \\ h_2'(q,p,c) &= h_2(q,p) + c\frac{\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2) - (\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2)}, \\ h_3' &= c, \end{aligned}$$

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha_2 - \frac{1}{2}q_2^2}{|B|} & \frac{1}{2}\frac{q_1q_2}{|B|} & \frac{\partial h_2'}{\partial p_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{q_1q_2}{|B|} & \frac{\alpha_1 - \frac{1}{2}q_1^2}{|B|} & \frac{\partial h_2'}{\partial p_1} \\ -\frac{\alpha_2 - \frac{1}{2}q_2^2}{|B|} & -\frac{1}{2}\frac{q_1q_2}{|B|} & 0 & \frac{\frac{1}{2}q_1p_2 - \frac{1}{2}q_2p_1}{|B|} & -\frac{\partial h_2'}{\partial q_1} \\ -\frac{1}{2}\frac{q_1q_2}{|B|} & -\frac{\alpha_1 - \frac{1}{2}q_1^2}{|B|} & \frac{\frac{1}{2}q_2p_1 - \frac{1}{2}q_1p_2}{|B|} & 0 & -\frac{\partial h_2'}{\partial q_2} \\ -\frac{\partial h_2'}{\partial p_1} & -\frac{\partial h_2'}{\partial p_2} & \frac{\partial h_2'}{\partial q_1} & \frac{\partial h_2'}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$|B| = \alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2).$$

Пример 4. *Расширение эллиптических разделимых потенциалов с одним оператором Казимира.*

В предыдущем примере рассмотрен частный случай целого семейства бигамильтоновых систем, разделимых введением обобщенных эллиптических координат [7]. В работах [1, 3] было доказано, что любая естественная система гамильтонианов

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + V(q) + \frac{1}{2}c(q,q), \tag{33}$$

допускающая в расширенном фазовом пространстве $M \ni (q,p,c)$ бигамильтонову формулировку

$$\begin{pmatrix} q \\ p \\ c \end{pmatrix}_t = \pi_0 \nabla h_1 = \pi_1 \nabla h_0, \tag{34}$$

где π_0 – каноническая структура Пуассона (13),

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & A - \frac{1}{2}q\otimes q & \frac{\partial h_1}{\partial p} \\ -A + \frac{1}{2}q\otimes q & \frac{1}{2}p\otimes q - \frac{1}{2}q\otimes p & -\frac{\partial h_1}{\partial q} \\ -\left(\frac{\partial h_1}{\partial p}\right)^T & \left(\frac{\partial h_1}{\partial q}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$A = \operatorname{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$, α_i – положительные константы, $h_0 = c$, $h_1 = H + c\rho_1(\alpha)$, является разделимой в обобщенных эллиптических координатах. Эта бигамильтонова формулировка приводит к цепочке (2) коммутирующих бигамильтоновых векторных полей, причем

$$\begin{gathered} h_r(q,p,c;\alpha) = h_r(q,p;\alpha) + c\beta_r(q;\alpha), \\ \beta_r(q;\alpha) = \rho_r(\alpha) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r-1}\rho_k(\alpha)(q, A^{r-k-1}q), \quad r = 1,\dots,N-1, \\ \beta_N(\alpha) = \rho_N(\alpha)\left[1 - \frac{1}{2}(q, A^{-1}q)\right], \\ h_r(q,p;\alpha) = \sum_{k=0}^{r}\rho_k(\alpha)\bar{h}_{r-k}, \qquad \bar{h}_s = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^{s-1}R_i, \\ R_i = \sum_{i\neq j}\frac{q_ip_j - q_jp_i}{\alpha_i - \alpha_j} + p_i^2 + V_i(q), \qquad \sum_{i=1}^{N}V_i(q) = V(q), \end{gathered} \tag{36}$$

$\{H, R_i\}_{\pi_0} = 0$, $i = 1,\dots,N$, и $\rho_r(\alpha)$ суть полиномы Виета от α. В формулах (33), (36) $(.,.)$ означает скалярное произведение.

Тогда в соответствии с нашей процедурой разделимая в эллиптических координатах обратная бигамильтонова цепочка (7)–(9) для расширения потенциалов имеет вид

$$h_r'(q,p,c;\alpha) = h_r(q,p;\alpha) + c\frac{\beta_{r-1}(q;\alpha)}{\beta_N(q;\alpha)}, \tag{37}$$

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} & \frac{\partial h_N}{\partial p} \\ -B^{-1} & -B^{-1}\left(\frac{1}{2}p\otimes q - \frac{1}{2}q\otimes p\right)B^{-1} & -\frac{\partial h_N}{\partial q} \\ -\left(\frac{\partial h_N}{\partial p}\right)^T & \left(\frac{\partial h_N}{\partial p}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

где

$$B = A - \frac{1}{2}q\otimes q,$$
$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\left[\partial_\alpha |B| + \frac{1}{2}(\partial_\alpha q \otimes \partial_\alpha q)|A|\right],$$
$$\partial_\alpha = \mathrm{diag}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\alpha_N}\right),$$
$$|B| = |A| - \frac{1}{2}(q, \partial_\alpha |A| q).$$

Заметим, что теперь естественный гамильтониан в обратной иерархии имеет вид

$$H' = h'_1(q,p,c) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + V(q) + \frac{c}{\rho_N(\alpha)[1-(q, A^{-1}q)]}. \tag{39}$$

Пример 3 относился к частному случаю рассмотренной в примере 4 системы при $N = 2$ и

$$V(q) = \frac{1}{4}(q,q)^2 - \frac{1}{2}(q, Aq).$$

Список литературы

[1] *M. Błaszak*. Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
[2] *M. Błaszak*. Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 25.
[3] *M. Błaszak*. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 3213.
[4] *M. Błaszak, S. Rauch-Wojciechowski*. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 1693.
[5] *M. Antonowicz, S. Rauch-Wojciechowski*. Phys. Lett. A. 1992. V. 163. P. 167.
[6] *M. Antonowicz, S. Rauch-Wojciechowski*. Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 455.
[7] *S. Rauch-Wojciechowski*. Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 149.