



Общероссийский математический портал

Е. В. Дегтярёва, Н. Н. Фролов, О полугруппах типа Вейерштрасса и Пуассона,
Дальневост. матем. журн., 2004, том 5, номер 2, 184–194

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

25 марта 2025 г., 19:17:15



УДК 517.985
MSC2000 45A05

© Е.В. Дегтярева, Н.Н. Фролов*

О полугруппах типа Вейерштрасса и Пуассона

Оператор, ставящий начальному условию решение задачи Коши для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, называют оператором Вейерштрасса. Оператор, ставящий граничному условию решение задачи Дирихле для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta u$ в полупространстве $t > 0$, называют оператором Пуассона. В данной заметке изучаются свойства таких операторов с заменой в уравнениях оператора Лапласа Δ на оператор числа частиц квантовой теории поля

$$-N = \sum_i \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Ключевые слова и фразы: *сжимающая, сильно непрерывная полугруппа операторов.*

1. Введение

Рассматриваемые ниже полугруппы операторов будут действовать в пространствах $L_p = L_p(R^n, \mu)$ с гауссовой мерой μ , имеющей плотность относительно лебеговой меры, равную $\frac{d\mu}{dx} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$. Здесь и далее $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n -мерного пространства R^n , $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ — длина вектора x . Норма в L^p определяется обычным образом:

$$\|f\|_p = \left[\int_{R^n} |f(x)|^p \mu(dx) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

и $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p$. Пространство L_2 является гильбертовым со скалярным произведением:

$$(f, g) = \int_{R^n} f(x) \bar{g}(x) \mu(dx) \quad (f, g \in L_2).$$

В L_2 имеется ортонормированный базис $\{h_\alpha(x)\}$, состоящий из полиномов, который получается путем ортогонализации многочленов. В $L_2(R, \mu)$ этот базис представляет собой систему полиномов Эрмита:

$$h_n(t) = (-1)^n (n!)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (t \in R, \quad n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

Легко проверить, что функции $h_n(t)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$h'_n(t) = \sqrt{n} h_{n-1}(t), \quad -h'_n(t) + t h_n(t) = \sqrt{n+1} h_{n+1}(t). \quad (2)$$

* Дальневосточный государственный университет, 690060, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: frolov@imcs.dvgu.ru

В $L_2(R^n, \mu)$ ортонормированным базисом служит система $h_\alpha(x) = h_{\alpha_1}(x_1) \dots h_{\alpha_n}(x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_j \geq 0$ целые. Линейная оболочка, натянутая на $\{h_\alpha\}$, образует плотное множество в любом из пространств L_p ($1 \leq p < \infty$). Ниже эту оболочку обозначаем через \wp . Через \hat{f}_α обозначается коэффициент Фурье функции $f \in L_2$ по системе $\{h_\alpha\}$:

$$\hat{f}_\alpha = \int_{R^n} f(x) h_\alpha(x) \mu(dx).$$

Напомним еще, что ряд Фурье

$$\sum_{\alpha} \hat{f}_\alpha h_\alpha(x)$$

по системе $\{h_\alpha\}$ для любой функции $f \in L_2$ сходится к ней по норме $\|f\|_2$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Nu \quad (t > 0, x \in R^n), \quad u(x, 0) = f(x) \in L_2. \quad (3)$$

Решение ее может быть записано в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{\alpha} \hat{f}_\alpha e^{-|\alpha|t} h_\alpha(x), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (4)$$

сходящегося в L_2 . Это следует из равенства $Nh_\alpha = |\alpha|h_\alpha$, которое является следствием соотношений (2). Введем оператор Вейерштрасса T_t , порожденный решением задачи (3), по формуле $u(x, t) = (T_t f)(x)$. Этот оператор можно представить в интегральной форме. Для этого воспользуемся равенством (см. [1], с. 439)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n h_n(t) h_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}} \exp \left\{ -\frac{\theta^2(t^2 + \tau^2) - 2\theta t\tau}{2(1-\theta^2)} \right\}, \quad |\theta| < 1.$$

Полагая $\theta = e^{-t}$, подставляя в (4) выражение для \hat{f}_α , меняя затем порядок интегрирования и суммирования в (4), что возможно для $f \in \wp$, получаем:

$$\begin{aligned} T_t f &= \int_{R^n} f(y) \sum_{\alpha} e^{-|\alpha|t} h_\alpha(x) h_\alpha(y) \mu(dy) = \\ &= \int_{R^n} \exp \left\{ -\frac{|xe^{-t} - y|^2}{2(1-e^{-2t})} \right\} [2\pi(1-e^{-2t})]^{-\frac{n}{2}} f(y) dy = \\ &= \int_{R^n} f(xe^{-t} - z\sqrt{1-e^{-2t}}) \mu(dz) \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Nu \quad (t > 0, x \in R^n), \quad u(x, 0) = f(x) \in L_2. \quad (6)$$

Решение ее может быть записано в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{\alpha} \hat{f}_\alpha e^{-t\sqrt{|\alpha|}} h_\alpha(x), \quad (7)$$

сходящегося в L_2 . Введем оператор Пуассона V_t , порожденный решением задачи (6), по формуле $u(x, t) = (V_t f)(x)$. Этот оператор можно выразить через T_t . Для этого воспользуемся равенством (см. [2], с. 76)

$$e^{-|\xi|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \eta^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\eta - \frac{\xi^2}{4\eta} \right\} d\eta.$$

Полагая $\xi = t\sqrt{|\alpha|}$, подставляя в (7) выражение для \hat{f}_α , меняя порядок интегрирования и суммирования в (7), для $f \in \wp$ получаем

$$\begin{aligned} V_t f &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \eta^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} \sum_{\alpha} \hat{f}_\alpha e^{-\frac{|\alpha|t^2}{4\eta}} h_\alpha(x) d\eta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \eta^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} T_{\frac{t^2}{4\eta}} f(x) d\eta = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4s}} T_s f(x) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Ниже изучаются свойства введенных здесь операторов T_t , V_t , которые существенно используются в теории мультипликаторов Эрмита пространств L_p [3].

2. Свойства полугруппы T_t

Из формулы (5) вытекает, что операторы T_t ($t > 0$) ограничены в L_∞ : $\|T_t f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Кроме того, они ограничены также в L_1 :

$$\begin{aligned} \|T_t f\|_1 &\leq \int_{R^n} \mu(dx) \int_{R^n} |f(y)| \exp \left\{ -\frac{|xe^{-t}-y|^2}{2(1-e^{-2t})} \right\} [2\pi(1-e^{-2t})]^{-\frac{n}{2}} dy = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} |f(y)| \exp \left\{ -\frac{|y|^2}{2} \right\} dy = \|f\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда, по интерполяционной теореме М. Рисса-Торина, следует, что операторы T_t ограничены в любом L_p : $\|T_t f\|_p \leq \|f\|_p$ ($t > 0$, $1 \leq p \leq \infty$).

Одним из основных результатов данной заметки является доказательство более сильной оценки:

$$\left\| \sup_{t>0} |T_t f| \right\|_p \leq c \|f\|_p \quad (1 < p \leq \infty) \quad (9)$$

с постоянной независимой от $f \in L_p$.

Отметим, что при $p = \infty$ неравенство (9) очевидно, так как $|T_t f| \leq \|f\|_\infty$ ($t > 0$). При $p = 1$ неравенство (9) неверно. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть семейство функций $f_z(x) = e^{xz}$ ($x \in R$, $z > 0$), для которого, как легко подсчитать,

$$\|f_z\|_1 = e^{\frac{z^2}{2}}, \quad T_t f_z = \exp \left\{ \frac{z^2}{2} (1 - e^{-2t}) + xze^{-t} \right\}.$$

Отсюда получаем

$$\sup_{t>0} |T_t f_z| = \begin{cases} e^{\frac{z^2}{2}}, & x \leq 0 \\ e^{\frac{z^2+x^2}{2}}, & 0 \leq x \leq z \\ e^{xz}, & x \geq z \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\left\| \sup_{t>0} |T_t f_z| \right\|_1 = \left(1 + \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{\frac{z^2}{2}} = \left(1 + \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \right) \|f_z\|_1.$$

Таким образом, постоянную c в неравенстве (9), для данного случая, нельзя выбрать независимой от z .

Для доказательства неравенства (9) нам потребуется ряд лемм и утверждение о свойствах максимальной функции. Далее рассматривается случай $n = 1$.

Для $f \in L_1(R, \mu)$ введем максимальную функцию формулой

$$Mf(x) = \sup_{z < x < y} \frac{1}{\mu(z, y)} \int_z^y |f(\eta)| \mu(d\eta),$$

где $\mu(z, y)$ равно μ -мере интервала (z, y) при $z < y$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

а) Если $f \in L_1(R, \mu)$, то при любом $\lambda > 0$

$$\mu\{x : Mf(x) > \lambda\} \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1. \quad (10)$$

б) Если $f \in L_p$ ($1 \leq p < \infty$), то $Mf(x)$ — μ -почти всюду конечна.

в) Если $f \in L_p$ ($1 < p \leq \infty$), то $Mf \in L_p$ и $\|Mf\|_p \leq c_p \|f\|_p$.

Доказательство. Утверждение б) при $p = 1$ вытекает из а), а при $p > 1$ из в). Утверждение в) следует из а), с использованием конструкции, описанной в [2], с. 17. Остановимся на доказательстве утверждения а).

Пусть $E_\lambda = \{x : Mf(x) > \lambda\}$. Мера μE_λ — есть точная верхняя грань μ -мер содержащихся в E_λ компактов K . Поэтому достаточно доказать неравенство $\mu K \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1$ для любого компакта $K \subset E_\lambda$.

Для каждого $x \in K$ при некоторых $y = y(x)$ и $z = z(x)$ ($z < x < y$) выполнено неравенство

$$\int_z^y |f(\eta)| \mu(d\eta) > \lambda \mu(z, y). \quad (11)$$

Интервалы $(z(x), y(x))$, $x \in K$ покрывают K . Выберем из них конечную систему (z_j, y_j) ($j = \overline{1, n}$), покрывающую K и такую, чтобы в этой системе интервалов пересекались только соседние интервалы. Тогда интервалы с четными и отдельно с нечетными номерами образуют две системы непересекающихся интервалов. По крайней мере одна из них (например, с четными номерами) содержит часть K с μ -мерой $\geq \frac{1}{2} \mu K$. Таким образом,

$$\mu K \leq 2 \sum_j \mu(z_{2j}, y_{2j}). \quad (12)$$

Из (11) тогда получаем

$$\int_{z_{2j}}^{y_{2j}} |f(\eta)| \mu(d\eta) > \lambda \mu(z_{2j}, y_{2j}).$$

Суммируя это неравенство по j , с учетом (12), получаем оценку

$$\mu K \leq \frac{2}{\lambda} \sum_j \int_{z_{2j}}^{y_{2j}} |f(\eta)| \mu(d\eta) \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1,$$

из которой, как было отмечено выше, следует оценка (10).

Лемма 1. Пусть $0 \leq \varphi$ — μ -измеримая функция на R , удовлетворяющая неравенству $\varphi(x) \leq ce^{\frac{x^2}{2}}$. Тогда справедлива оценка:

$$\mu\{x : \varphi(x) > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda}$$

с той же постоянной c , что и в неравенстве для φ .

Доказательство. Очевидно $\{x : \varphi > \lambda\} \subset \{x : e^{\frac{x^2}{2}} > \frac{\lambda}{c}\}$. Можно считать, что $\lambda > c$. Тогда

$$\mu\{x : \varphi > \lambda\} \leq \mu\left\{x : e^{\frac{x^2}{2}} > \frac{\lambda}{c}\right\} = \mu\left\{x : |x| > \sqrt{2 \ln \frac{\lambda}{c}}\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2 \ln \frac{\lambda}{c}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся неравенством (см. [4], с. 121)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x + \sqrt{\frac{8}{\pi} + x^2}} \quad (x \geq 0).$$

Имеем:

$$\mu\{x : \varphi > \lambda\} \leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{2 \ln \frac{\lambda}{c}}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} = e^{-\ln \frac{\lambda}{c}} = \frac{c}{\lambda}.$$

Лемма 2. Существует такая постоянная $c > 0$, что при всех ξ ($0 < \xi < 1$) справедливо неравенство

$$\mu\left(x, \frac{x}{\xi}\right) \leq c \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x \geq 0).$$

Доказательство вытекает из цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} \mu\left(x, \frac{x}{\xi}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\frac{x}{\xi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x(\frac{1}{\xi}-1)} e^{-xy-\frac{y^2}{2}} dy \leq \\ &\leq e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x(\frac{1}{\xi}-1)} e^{-xy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1 - e^{-x^2(\frac{1}{\xi}-1)}}{x} \leq c \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{aligned}$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\eta>0} \frac{1-e^{-\eta^2}}{\eta}$.

Для дальнейшего сделаем в операторе T_t замену $e^{-t} = \xi$. Тогда

$$T_t = \tilde{T}_\xi f = \int_R f(y) \exp\left\{-\frac{(x\xi - y)^2}{2(1-\xi^2)}\right\} [2\pi(1-\xi^2)]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Лемма 3. Существует постоянная $c > 0$ такая, что при всех ξ ($0 < \xi < 1$) справедлива оценка:

$$|\tilde{T}_\xi f| \leq \left[1 + \frac{\mu\left(|x|, \frac{|x|}{\xi}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right] Mf(x). \quad (13)$$

Доказательство. Поскольку

$$-\frac{(x\xi - y)^2}{2(1 - \xi^2)} = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{(x - \xi y)^2}{2(1 - \xi^2)}, \quad (14)$$

то $\tilde{T}_\xi f$ можно представить в виде

$$\tilde{T}_\xi f = e^{\frac{x^2}{2}} \int_R f(y) \exp \left\{ -\frac{(x - \xi y)^2}{2(1 - \xi^2)} \right\} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \mu(dy). \quad (15)$$

Положим

$$I_x(y) = \int_x^y |f(z)| \mu(dz).$$

Тогда из (15), интегрированием по частям, находим

$$e^{-\frac{x^2}{2}} |\tilde{T}_\xi f| \leq \int_R I'(y) \exp \left\{ -\frac{(x - \xi y)^2}{2(1 - \xi^2)} \right\} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \mu(dy) \leq - \int_R I_x(y) d\varphi_x(y),$$

где $\varphi_x(y) = (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \xi y)^2}{2(1 - \xi^2)} \right\}$.

Из определения максимальной функции Mf вытекают оценки:

$$\begin{aligned} I_x(y) &\leq \mu(x, y) Mf(x) & (y > x), \\ -I_x(y) &\leq \mu(y, x) Mf(x) & (y < x). \end{aligned}$$

Пусть $x \geq 0$. Тогда $\frac{x}{\xi} > x$. Используя предыдущие неравенства, имеем:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} |\tilde{T}_\xi f| &\leq \int_{-\infty}^x (-I_x(y)) d\varphi_x(y) - \int_x^{\frac{x}{\xi}} I_x(y) d\varphi_x(y) + \int_{\frac{x}{\xi}}^{\infty} I_x(y) d(-\varphi_x(y)) \leq \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^x \mu(y, x) d\varphi_x(y) + \int_{\frac{x}{\xi}}^{\infty} \mu(x, y) d(-\varphi_x(y)) \right] Mf(x). \end{aligned}$$

Вновь интегрируя по частям и учитывая равенство (14), получаем:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} |\tilde{T}_\xi f| &\leq \left[\int_R \varphi_x(y) \mu(dy) + \frac{\mu(x, \frac{x}{\xi})}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] Mf(x) \leq \\ &\leq \left[\frac{\mu(x, \frac{x}{\xi})}{\sqrt{1 - \xi^2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \int_R \exp \left\{ -\frac{(x\xi - y)^2}{2(1 - \xi^2)} \right\} [2\pi(1 - \xi^2)]^{-\frac{1}{2}} dy \right] Mf(x) = \\ &= \left[\frac{\mu(x, \frac{x}{\xi})}{\sqrt{1 - \xi^2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right] Mf(x). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка (13) при $x \geq 0$.

Пусть теперь $x < 0$. Тогда $\frac{x}{\xi} < x$. Действуя, как и при $x \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x^2}{2}} |\tilde{T}_\xi f| &\leq \int_{-\infty}^{\frac{x}{\xi}} -I_x(y) d\varphi_x(y) - \int_{\frac{x}{\xi}}^x I_x(y) d\varphi_x(y) + \int_x^\infty I_x(y) d(-\varphi_x(y)) \leq \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{\frac{x}{\xi}} \mu(y, x) d\varphi_x(y) + \int_x^\infty \mu(x, y) d(-\varphi_x(y)) \right] Mf(x). \end{aligned}$$

После интегрирования по частям, правая часть последнего неравенства будет равна

$$\left[\frac{\mu(\frac{x}{\xi}, x)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \int_{-\infty}^{\frac{x}{\xi}} \varphi_x(y) \mu(dy) + \int_x^\infty \varphi_x(y) \mu(dy) \right] Mf(x) \leq \left[\frac{\mu(\frac{x}{\xi}, x)}{\sqrt{1-\xi^2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right] Mf(x).$$

Поскольку $\mu(\frac{x}{\xi}, x) = \mu(|x|, \frac{|x|}{\xi})$ при $x < 0$, то последнее неравенство сводится к (13).

Теорема 2. При любых p ($1 < p \leq \infty$) существует постоянная $c > 0$, независимая от $f \in L_p(R, \mu)$, при которой справедлива оценка (9).

Доказательство. Из формулы (15) вытекает, что

$$|T_t f| = |\tilde{T}_\xi f| \leq e^{\frac{x^2}{2}} (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_1.$$

Поэтому при любом δ ($0 < \delta < 1$)

$$\sup_{0 < \xi \leq \delta} |\tilde{T}_\xi f| \leq e^{\frac{x^2}{2}} (1 - \delta^2)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_1.$$

При помощи леммы 1, из этой оценки получаем

$$\mu\{x : \sup_{0 < \xi \leq \delta} |\tilde{T}_\xi f| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} (1 - \delta^2)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_1.$$

Последнее неравенство показывает, что полуаддитивный оператор $\sup_{0 < \xi \leq \delta} |\tilde{T}_\xi f|$ имеет слабый тип (1, 1). Кроме того, он ограничен в $L_\infty(R, \mu)$: $\left\| \sup_{0 < \xi \leq \delta} |\tilde{T}_\xi f| \right\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Поэтому, по теореме Марцинкевича, он ограничен в любом $L_p(R, \mu)$:

$$\left\| \sup_{0 < \xi \leq \delta} |\tilde{T}_\xi f| \right\|_p \leq c(p, \delta) \|f\|_p \quad (1 < p \leq \infty). \quad (16)$$

Далее, согласно лемме 3, при любом ξ : ($0 < \xi < 1$) имеет место неравенство (13). Если в нем заменить μ -меру интервала $(|x|, \frac{|x|}{\xi})$ на величину из леммы 2, то придем к неравенству

$$|\tilde{T}_\xi f| \leq \left[1 + \frac{c}{\sqrt{\xi(1+\xi)}} \right] Mf(x).$$

Отсюда, в силу теоремы 1 о свойствах максимальной функции, получаем

$$\left\| \sup_{\delta < \xi < 1} |\tilde{T}_\xi f| \right\|_p \leq \left[1 + \frac{c}{\sqrt{\delta}} \right] c_p \|f\|_p.$$

Это неравенство, вместе с неравенством (16), приводит к утверждению теоремы 2.

Приведем еще ряд свойств операторов T_t :

1. Совокупность $\{T_t, t > 0\}$ образует сжимающую, сильно непрерывную полугруппу операторов в любом L_p ($1 \leq p < \infty$). Это означает, что выполнены соотношения:

$$T_{t+\tau} = T_t T_\tau, \quad \|T_t f\|_p \leq \|f\|_p \quad \text{и} \quad \|T_t f - f\|_p \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0).$$

Первое соотношение легко следует из представления (4), а последнее из того, что оно верно для $f \in \wp$ (см. (4)), что \wp плотно в L_p и что справедлива оценка $\|T_t\| \leq 1$.

2. Имеет место неравенство:

$$\|T_t f - \hat{f}_0\|_p \leq e^{-c(p)t} \|f - \hat{f}_0\|_p \quad (1 < p < \infty, c(p) > 0).$$

Действительно, из (4) вытекает, что

$$\|T_t f - \hat{f}_0\|_2 \leq e^{-t} \|f - \hat{f}_0\|_2.$$

Поскольку

$$\|T_t f - \hat{f}_0\|_p = \|T_t(f - \hat{f}_0)\|_p \leq \|f - \hat{f}_0\|_p \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

то из этих двух неравенств, при помощи интерполяционной теоремы, получаем свойство 2.

3. Операторы T_t сохраняют положительность: $T_t f \geq 0$ μ -почти всюду, если $f \geq 0$ μ -почти всюду.

Данное свойство следует из интегрального представления оператора T_t (5).

4. T_t обладают свойством гиперсжимаемости: если $p, q > 1$ и $e^{-2t} \leq \frac{p-1}{q-1}$, то T_t является сжимающим оператором из L_p в L_q (см. [5], с. 523).

5. T_t усиливает положительность: если $f \geq 0$ и $\mu\{x : f > 0\} > 0$, то $T_t f > 0$ μ -почти всюду (см. [5], с. 526).

6. Оператор T_t самосопряжен в L_2 и изометричен на конусе неотрицательных функций из L_1 :

$$(T_t f, g) = (f, T_t g) \quad (f, g \in L_2); \quad \|T_t f\|_1 = \|f\|_1 \quad (f \geq 0, f \in L_1). \quad (17)$$

Первое равенство в (17) следует из представления (4), второе — из выражения (15).

7. Справедлива оценка

$$\|T_t f\|_{W_p^s} \leq ct^{-\frac{s}{2}} \|f\|_p \quad (s = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Здесь пространство $W_p^s(R^n, \mu)$ определяется как пополнение \wp по норме

$$\|f\|_{W_p^s} = \left(\sum_{k=0}^s \int_{R^n} \|D^k f\|_2^p \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\text{где } \|D^k f\|_2^2 = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right)^2 = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^\alpha} \right|^2.$$

Для доказательства оценки (18) воспользуемся формулой (1). Если $f \in \wp$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} &= (-1)^k \sqrt{\alpha!} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right)^k \int_{R^n} f(y) h_\alpha \left(\frac{xe^{-t}-y}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{|xe^{-t}-y|^2}{2(1-e^{-2t})} \right\} [2\pi(1-e^{-2t})]^{-\frac{n}{2}} dy. \end{aligned}$$

Отсюда, для любой финитной числовой последовательности a_α , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a_\alpha \frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} &= (-1)^k \sqrt{k!} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right)^k \times \\ &\times \int_{R^n} f(y) \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \left(\frac{xe^{-t}-y}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right) \exp \left\{ -\frac{|xe^{-t}-y|^2}{2(1-e^{-2t})} \right\} [2\pi(1-e^{-2t})]^{-\frac{n}{2}} dy. \end{aligned}$$

Применим к интегралу справа неравенство Гельдера. Тогда

$$\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a_\alpha \frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} \right| \leq \sqrt{k!} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right)^k (T_t |f|^p)^{\frac{1}{p}} I, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} I^q &= \int_{R^n} \left| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \left(\frac{xe^{-t}-y}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right) \right|^q \exp \left\{ -\frac{|xe^{-t}-y|^2}{2(1-e^{-2t})} \right\} [2\pi(1-e^{-2t})]^{-\frac{n}{2}} dy = \\ &= \left\| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \right\|_q^q, \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right). \end{aligned}$$

Известно [3], что для любого полинома $Q_k \in \wp$ степени k имеет место неравенство

$$\|Q_k\|_q \leq c_{k,q} \|Q_k\|_2, \quad c_{k,q} = \max\{1, (q-1)^{\frac{k}{2}}\}.$$

Применим его для оценки I :

$$I = \left\| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \right\|_q \leq c_{k,q} \left\| \sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\frac{k!}{\alpha!}} a_\alpha h_\alpha \right\|_2 = c_{k,q} \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |a_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставим полученную оценку для I в (19) и перейдем затем в (19) к точной верхней грани по всем наборам $\{a_\alpha\}$, удовлетворяющих неравенству $\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |a_\alpha|^2 \leq 1$. Получим

$$\|D^k T_t f\|_2 = \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left| \frac{\partial^k T_t f}{\partial x^\alpha} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{k!} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right)^k c_{k,q} (T_t |f|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Возводя это неравенство в степень p , а затем интегрируя по R^n с мерой μ , приходим к оценке

$$\int_{R^n} \|D^k T_t f\|_2^p \mu(dx) \leq \left[\sqrt{k!} \left(\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \right)^k c_{k,q} \right]^p \|f\|_p^p,$$

из которой следует доказываемое неравенство (18).

3. Свойства полугруппы V_t .

Свойства операторов V_t ($t > 0$), в силу равенств (8), можно получить из соответствующих свойств операторов T_t ($t > 0$). В частности, справедливы следующие утверждения:

1. Совокупность $\{V_t, t > 0\}$ образует сжимающую, сильно непрерывную полугруппу операторов в любом L_p ($1 \leq p < \infty$).

Полугрупповое свойство вытекает из (7); остальные соотношения — из формулы (8) и соответствующих соотношений для полугруппы T_t (см. свойство 1 для T_t).

2. *Имеет место оценка*

$$\|V_t f - \hat{f}_0\|_p \leq e^{-c(p)t} \|f - \hat{f}_0\|_p \quad (1 < p < \infty, c(p) > 0),$$

доказательство которой, с использованием (7), проходит по той же схеме, что и доказательство аналогичного свойства для T_t .

3. *Операторы V_t сохраняют положительность*, что следует из (8) и аналогичного свойства для T_t .

4. *Операторы V_t усиливают положительность*, что доказывается тем же способом, что и аналогичное свойство для T_t .

5. *Для оператора V_t справедливы соотношения (17) с заменой в них T_t на V_t* . Они получаются из (8) и соответствующих соотношений для T_t .

6. *Имеет место оценка*

$$\|V_t f\|_{W_p^s} \leq ct^{-s} \|f\|_p.$$

Данная оценка вытекает из (8) и оценки (18).

7. *Справедливо неравенство*

$$\left\| \sup_{t>0} |V_t f| \right\|_p \leq c \|f\|_p \quad (1 < p \leq \infty),$$

которое следует из (8) и аналогичного неравенства для T_t .

8. *Полугруппа V_t является аналитической в любом пространстве L_p ($1 \leq p < \infty$)*.

Действительно, из формулы (8) следует

$$\frac{d}{dt} V_t f = \frac{1}{t} V_t f + t \int_0^\infty \varphi'_t(s, t) T_s f ds,$$

где $\varphi(s, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} s^{-3/2} e^{-t^2/4s}$. Поскольку $\varphi'_t \leq 0$, то для $f \geq 0$ имеем $\frac{d}{dt} V_t f \leq \frac{1}{t} V_t f$ и поэтому

$$\left\| t \frac{d}{dt} V_t f \right\|_p \leq \|V_t f\|_p \leq \|f\|_p.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\left\| t \frac{d}{dt} V_t f \right\|_p \leq 2 \|f\|_p$$

для произвольной функции $f \in L_p$. Из нее, согласно известной теореме К. Иосиды (см. [6], с. 351), следует аналитичность полугруппы V_t .

Аналитичность V_t в L_p позволяет, используя общую теорему (см. [7], с.273), получить оценку:

$$\|(\sqrt{N})^n V_t f\|_p = \|V_t^{(n)} f\|_p \leq c_n t^{-n} e^{\omega t} \|f\|_p \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Эта оценка, в частности, показывает, что функция $\mu(\alpha) = |\alpha|^{n/2} e^{-t\sqrt{|\alpha|}}$ является мультипликатором Эрмита в пространствах L_p ($1 \leq p < \infty$) (см. [3]).

Список литературы

1. Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1951. 635 с.
2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
3. Клевчишин Ю.А., Фролов Н.Н. Мультипликаторы эрмитовых разложений в пространствах L_p // ДВ Мат. сб. 1996, вып. 2, С. 86–95.
4. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
5. Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. К.: Наукова думка, 1988. 680 с.
6. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
7. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 1 сентября 2004 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028)

Degtyareva E.V., Frolov N.N. On the semigroups of operators Weierstrass and Poisson type. Far Eastern Mathematical Journal. 2004. V. 5. № 2. P. 184–194.

ABSTRACT

In this paper properties of transforms by a Weierstrass and Poisson type are considered. Those transforms are generated of differential problems. In those problems Laplace operators are change on number operators in quantum field theory.

Key words: *strong continues semi-groups of bounded linear operators.*