



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Stepanov, Second-order arithmetic and the consistency of first-order theories, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 179–180

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

January 22, 2025, 14:09:52



**АРИФМЕТИКА 2-го ПОРЯДКА И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ
ТЕОРИЙ 1-го ПОРЯДКА**

В. И. Степанов

Известно, что предложение con_{PA} , выражающее непротиворечивость пеановской арифметики 1-го порядка PA, недоказуемо в PA, но доказуемо в арифметике 2-го порядка A_2 [1], [2].

В настоящей работе показывается, что аналог 2-й теоремы Гёделя о неполноте имеет место для теорий, задаваемых множеством нелогических аксиом любого уровня арифметической иерархии Клини — Мостовского [2]. При этом предложения, выражающие непротиворечивость соответствующих теорий, доказуемы в A_2 .

Пусть L — язык арифметики 1-го порядка PA [2], [3]. Предполагается фиксированной гёделева нумерация языка L , и запись $\ulcorner \varphi \urcorner$ означает нумерал, соответствующий номеру формулы φ . Термы imp , Sub имеют обычный смысл: для любых формул φ, ψ и любого $n \in \omega$ в PA доказуемы формулы $\text{imp}(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner) = \ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner$, $\text{Sub}(\ulcorner \varphi(x) \urcorner, \bar{n}) = \ulcorner \varphi(\bar{n}) \urcorner$. Следуя [3], [4], вместо $\text{Sub}(\ulcorner \varphi(x) \urcorner, x)$ пишем $\ulcorner \varphi(x) \urcorner$.

Для любого $n > 0$ в качестве нелогических аксиом теории $T(n)$ возьмем множество Π_n^0 -предложений языка L , истинных в стандартной интерпретации $(\omega, +, \cdot)$, и аксиомы PA [3], [4]. Как известно [4], [1], имеется Π_n^0 -формула $\text{Tr}_n(x)$ такая, что для любой Π_n^0 -формулы $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ выполняется условие

$$(1) \quad PA \vdash \varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \text{Tr}_n(\ulcorner \varphi(x_1, \dots, x_k) \urcorner).$$

Предикат доказуемости для $T(n)$ задается следующим образом:

$$\text{Prf}_{T(n)}(x, y) \equiv \text{Seg}(x) \ \& \ \forall u \leq \text{lh}(x) (L A x_{PA}((x)_u) \vee$$

$$\vee A x_{PA}((x)_u) \vee \text{Tr}_n((x)_u) \vee \exists z, v < u ((x)_z =$$

$$= \text{imp}((x)_v, (x)_u) \vee (x)_u = \text{Gen}((x)_z) \ \& \ \text{Form}((x)_z) \ \& \ y = (x)_{\text{lh}(x)},$$

$$\text{Prf}_{T(n)}(y) \equiv \exists x \text{Prf}_{T(n)}(x, y), \quad \text{con}_{T(n)} \equiv \neg \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner),$$

где Seg , $L A x_{PA}$, $A x_{PA}$, Form , imp , Gen , lh , $(x)_u$ — соответствующие примитивно-рекурсивные формулы и термы [3], [4].

Т е о р е м а 1. *Для любых формул φ, ψ справедливы соотношения:*

$$1) \quad T(n) \vdash \varphi \Rightarrow T(n) \vdash \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \urcorner),$$

$$2) \quad PA \vdash \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \urcorner) \ \& \ \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \psi \urcorner),$$

$$3) \quad PA \vdash \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \urcorner) \rightarrow \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner),$$

$$4) \quad T(n) \not\vdash \text{con}_{T(n)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Если $T \vdash \varphi$, то по определению $\text{Prf}_{T(n)}(y)$ имеем $(\omega, +, \cdot) \models \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \urcorner)$. Поскольку $\text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ эквивалентно в PA \sum_{n+1} -предложению, следовательно, $\text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ доказуемо в $T(n)$.

2) Следует из теоремы 4.6 работы [3].

3) Используя (1), для Π_n^0 -формулы $\varphi(y)$ имеем

$$PA \vdash \varphi(y) \rightarrow \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \varphi(y) \urcorner).$$

Отсюда

$$PA \vdash \exists y \varphi(y) \rightarrow \text{Prf}_{T(n)}(\ulcorner \exists y \varphi(y) \urcorner).$$

4) Доказывается аналогично классическому случаю, используя 1)–3).

В языке арифметики 2-го порядка A_2 имеется формула $\text{Tr}(x)$ (истинностная формула для PA) такая, что для любой формулы φ языка L имеем

$$A_2 \vdash \varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \text{Tr}(\ulcorner \varphi(x_1, \dots, x_k) \urcorner).$$

Учитывая, что в A_2 доказуема формула

$$\text{Tr}_n(x) \rightarrow \text{Tr}(x),$$

аналогично [1] доказывается

Л е м м а.

$$A_2 \vdash \text{Pr}_{T(n)}(x) \rightarrow \text{Tr}(x).$$

Применяя лемму, получим

$$A_2 \vdash \neg \text{Tr}(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner) \rightarrow \neg \text{Pr}_{T(n)}(\ulcorner \bar{0} = \bar{1} \urcorner).$$

Следовательно, $A_2 \vdash \text{con}_{T(n)}$.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Для любого $n > 0$

$$A_2 \vdash \text{con}_{T(n)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Такеутти. Теория доказательств.— М.: Мир, 1978.
- [2] Дж. Шенфилд. Математическая логика.— М.: Наука, 1975.
- [3] S. Feferman. Arithmetization of metamathematic in general setting.— Fund. Math., 1960, 49, p. 35—92.
- [4] Handbook of Mathematical logic.— N.H.P.C., 1977.
- [5] K. Gödel. Veber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Math. Phys., 1931, 38, p. 173—198.

Московский государственный
университет

Поступило в Правление общества
16 апреля 1982 г.