В. Н. Кублановская, К решению многопараметрических задач алгебры. 2. Метод неполной относительной факторизации и его применение, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2003, том 296, 89–107

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 296, 2003 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ. 2. МЕТОД НЕПОЛНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Введение

В статье продолжаются исследования по применению метода "ранговой" факторизации (см., напр. [1–3]) к решению спектральных задач многопараметрических полиномиальных матриц. Рассматриваются матрицы полного ранга, регулярный и сингулярный, спектры которых не имеют общих точек. Предлагается обобщение метода неполной относительной факторизации (метода НОФ) ранее предложенного (см. [2]) для матриц, спектр которых не зависит по крайней мере от одного из параметров. Приводятся обоснование метода НОФ, его свойства и применения к вычислению базиса нуль-пространства из полиномиальных решений F, базисная матрица которого не содержит нулей минимального полинома, и к вычислению нулей минимального полинома F и им соответствующих собственных векторов.

Статья состоит из введения и четырех параграфов. В §1 приведены некоторые теоретические предпосылки, определения и обозначения. В §2 рассматривается метод неполной относительной факторизации для q-параметрических полиномиальных матриц полного ранга. Приводится обоснование метода и его свойства для матриц, регулярный и сингулярный спектры которой не имеют общих точек. §3 содержит применение метода НОФ к вычислению нулей минимального полинома q-параметрической полиномиальной матрицы и им соответствующих собственных векторов. §4 посвящен построению базисов нуль-пространств из полиномиальных решений q-параметрической полиномиальной матрицы, регулярный спектр базисных матриц которых не содер-

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (02-01-00095) и НШ-2268.2003.1.

жит нулей минимального полинома.

§1. Теоретические предпосылки

1.1. Определения и обозначения.

Введем некоторые обозначения: $\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ есть множество q-параметрических полиномиальных $m \times n$ матриц $F := F(\mu_1, \dots, \mu_q)$ ранга ρ; $f[F]$ – характеристический полином F, т.е. общий наибольший делитель (ОНД) всевозможных миноров порядка ρ матрицы F; $f_k[F]$ есть ОНД всевозможных миноров порядка $\rho - k$ матрицы F. При записи матрицы и полиномов в виде

$$F := F(\lambda, \overline{\mu}) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\overline{\mu})\lambda^k,$$

$$f[F] = f(\lambda, \overline{\mu}) = \sum_{i=0}^{p} a_i(\overline{\mu})\lambda^i,$$

$$f_k[F] := f_k(\lambda, \overline{\mu}) = \sum_{i=0}^{p_k} b_i^{(k)}(\overline{\mu})\lambda^i$$

параметр λ будем называть ведущим, $\overline{\mu}$ есть мультипараметр из дополнительных к λ параметров. Иногда при $\lambda = \mu_i$ мультииндекс из дополнительных параметров будем обозначать $\overline{\mu}_{q-i} := \{\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_q\}$; $N[F]$ есть правое нуль-пространство матрицы F; $N_c[F]$ – нуль-пространство из правых полиномиальных решений F; $N_c[F]_*$ – нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы F в фиксированной точке; $W_0[F]$ – базисная матрица $N_c[F]$: $N_c[F] = \operatorname{span} W_0[F]$. Через $W_0[F]$ будем обозначать базисную матрицу $N_c[F]$, спектр которой не зависит от ведущего параметра. Вычисление $W_0[F]$ можно реализовать применением алгоритма ΔW-q факторизации к матрице F (см. [1]); $\sigma[F]$ – конечный спектр матрицы F, т.е. множество решений системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\rho \\ j_1 \dots j_p \end{pmatrix} = 0, \quad 1 \leqslant i_1 < \dots < i_\rho \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho \leqslant m,$$

левые части которых суть миноры матрицы F; $\sigma_r[F]$ – конечный регулярный спектр F, т.е. множество нулей $f[F]$; $\sigma_s[F]$ – конечный сингулярный спектр F, т.е. дополнение $\sigma_r[F]$ до $\sigma[F]$.

$\varepsilon[F] = \varepsilon(\lambda, \overline{\mu}) = \dfrac{f[F]}{f_1[F]}$ – минимальный полином F, т.е. делитель $f[F]$, нули которого суть точки $\sigma_r[F]$, каждой из которых соответствуют правый и левый ненулевые векторы, не принадлежащие нуль-пространствам из полиномиальных решений матрицы F, и удовлетворяющие уравнениям $F(\lambda, \overline{\mu})x = 0$ и $F^{\intercal}(\lambda, \overline{\mu})y = 0$. В дальнейшем нули $\varepsilon[F]$ и принадлежащие им векторы будем называть собственными значениями и собственными векторами матрицы F. Множество $\sigma_r[F]$ представим в виде

$$\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F],$$

где $\sigma_{r1}[F] = \{(\lambda, \overline{\mu}) \mid \varepsilon[F] = 0\}$, $\sigma_{r2}[F]$ дополняет $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_r[F]$. Обозначим $\mathfrak{M} = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$ множество точек, принадлежащих пересечению множеств $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$; $[F_1, F_2]^{\beta} := \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ – блочное транспонирование.

Представим полиномы $f[F]$ и $f_k[F]$ в виде, так называемой, неполной относительной факторизации:

$$f[F] = \varphi[F]\, g[F]; \quad f_k[F] = \varphi_k[F]\, g_k[F], \tag{1.1}$$

где $g[F]$ и $g_k[F]$ – полиномы от q переменных, каждый из которых является примитивным над кольцом полиномов от $(q-1)$ переменных из множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$; $\varphi[F]$ и $\varphi_k[F]$ – полиномы, нули которых зависят от $(q-1)$ параметров.

1.2. Неполная относительная факторизация для скалярных полиномов.

Представление скалярных полиномов в виде (1.1) можно реализовать алгоритмом неполной относительной факторизации (НОФ). Для определенности рассмотрим алгоритм для полинома $f[F]$. Он состоит из типичных q шагов: начальными данными первого шага являются $\lambda = \mu_1$, $f^{(1)} := f[F]$. Выполняются следующие операции:

(1) полином $f^{(1)}$ записывается в виде

$$f^{(1)}[F] = \sum_{i=0}^{p_1} a_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\lambda^i;$$

(2) находится полином $\delta_1(\overline{\mu}_{q-1})$, т.е. ОНД последовательности $\{a_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\}$ $i = 0, \ldots, p_1$, и равенства

$$a_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1}) = \delta(\overline{\mu}_{q-1})\hat{a}_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1}), \quad i = 0, \ldots, p_1.$$

Здесь $\{\hat{a}_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\}$ есть последовательность взаимно простых полиномов над кольцом полиномов от $(q-1)$ переменных $\mu_2, \dots, \mu_q$.

Результатом выполнения операций (1), (2) является равенство $f[F] = \delta_1(\overline{\mu}_{q-1}) f^{(2)}[F]$, где

$$f^{(2)}[F] = f^{(2)}(\mu_1, \dots, \mu_q) = \sum_{i=0}^{p_1} \hat{a}_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\lambda^i$$

есть полином от q переменных, примитивный над кольцом полиномов от $(q-1)$ переменных $\overline{\mu}_{q-1} = \mu_2, \dots, \mu_q$.

(3) Осуществляется переход к выполнению второго шага. В качестве начальных данных для второго шага берутся $\lambda = \mu_2$ и полином $f^{(2)}(\mu_1, \dots, \mu_q)$.

В результате выполнения q шагов будет найдено разложение $f[F]$ вида (1.1), где

$$\begin{gathered} \varphi[F] = \delta_1(\overline{\mu}_{q-1}), \dots, \delta_q(\overline{\mu}_{q-q}); \\ g[F] := f^{(q)}(\mu_1, \dots, \mu_q) = \sum \hat{a}_i^{(q)}(\overline{\mu}_{q-q})\lambda^i, \\ \overline{\mu}_{q-q} := \mu_1, \dots, \mu_{q-1}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Заметим, что некоторые из полиномов $\delta_i(\overline{\mu}_{q-i})$ в разложении (1.2) могут быть константы.

Рассмотренный алгоритм может быть применен для построения НОФ каждого из полиномов $f_k[F]$:

$$f_k[F] = \delta_1^{(k)}(\overline{\mu}_{q-1}), \dots, \delta_q^{(k)}(\overline{\mu}_{q-q}) g_k[F] \equiv \varphi_k[F] g_k[F]. \tag{1.3}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\varphi_k[F] = \delta_1^{(k)}(\overline{\mu}_{q-1}), \dots, \delta_q^{(k)}(\overline{\mu}_{q-q}), \quad g_k(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{p_n} b_i^{(q)}(\overline{\mu}_{q-q})\lambda^i$$

есть полином от q переменных примитивный над кольцом от $(q-1)$ переменных из множества $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Нулями полиномов $\varphi[F]$ и $\varphi_k[F]$ являются соответственно нули полиномов $\delta_i(\overline{\mu}_{q-i})$ и $\delta_i^{(k)}(\overline{\mu}_{q-i})$, $i = 1, \dots, q$, каждый из которых зависит от $(q-1)$ переменных.

Каждый из полиномов $f^{(i)}[F]$, $f_k^{(i)}[F]$, вычисляемых соответственно в процессе НОФ полиномов $f[F]$ и $f_k[F]$, является полиномом от q переменных примитивным над кольцом полиномов от $(q-1)$ переменных.

1.3. Наследственные полиномы.

Пусть $f[F]$ и $f_k[F]$ представлены в виде (1.1), т.е. в виде неполной относительной факторизации: $f[F] = \varphi[F]g[F]$, $f_k[F] = \varphi_k[F]g_k[F]$, где для $k = 1,\dots,n_1-1$ ($n_1 \leqslant \rho$) $f_k[F] \neq \text{const}$, $f_{n_1}[F] = \text{const}$. Из определений $f[F]$ и $f_k[F]$ имеют место включения

$$\{(\lambda,\mu) \mid f_{k-1}[F]=0\} \supseteq \{(\lambda,\mu) \mid f_k[F]=0\}, \quad k=1,\dots,n_1-1, \quad f_0 \equiv f.$$

Тогда из НОФ полиномов $f[F]$ и $f_k[F]$ следуют включения

$$\{(\lambda,\mu) \mid \varphi_{k-1}[F]=0\} \supseteq \{(\lambda,\mu) \mid \varphi_k[F]=0\}, \quad k=1,\dots,u_1-1,$$
$$\varphi_{u_1}[F]=\text{const}, \quad u_1 \leqslant n_1;$$
$$\{(\lambda,\mu) \mid g_{k-1}[F]=0\} \supseteq \{(\lambda,\mu) \mid g_k[F]=0\}, \quad k=1,\dots,v_1-1,$$
$$g_{v_1}[F]=\text{const}, \quad v_1 \leqslant n_1; \qquad \varphi_0[F]=\varphi[F], \quad g_0[F]=g[F].$$

Введем в рассмотрение полиномы

$$\psi_k[F] = \frac{\varphi_{k-1}[F]}{\varphi_k[F]}, \quad k=1,\dots,u_1-1, \quad \varphi_0[F]=\varphi[F]. \tag{1.4}$$

Нетривиальный полином $\psi_k[F]$ будем называть наследственным полиномом порядка k. Последовательность $\{\psi_k[F]\}$, $k=1,\dots,u_1-1$, ($\psi_{u_1}[F]=\text{const}$) нетривиальных полиномов будем называть последовательностью наследственных полиномов.

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered}\varphi_{k-1}[F] = \psi_k[F]\varphi_k[F], \quad k=1,\dots,u_1-1;\\ \varphi[F] \equiv \varphi_0[F] = \psi_1[F]\psi_2[F]\dots\psi_{u_1-1}[F];\\ \varphi_{k-1}[F] = \psi_k[F]\psi_{k+1}[F]\dots\psi_{u_1-1}[F].\end{gathered} \tag{1.5}$$

Полином $\psi_1[F] = \dfrac{\varphi[F]}{\varphi_1[F]}$ будем называть минимальным наследственным полиномом. Каждой точке $\bar{\mu}^*_{q-i}$ множеств $\{\overline{\mu}_{q-i} \mid \varphi[F]=0\}$ сопоставим число $l = l_*[F]$, равное числу наследственных полиномов из последовательности $\{\psi_k[F]\}$, которым эта точка принадлежит. Имеют место соотношения:

$$\bar{\mu}^*_{q-i} \in \bigcap_{k=1}^{q} \{\overline{\mu} \mid \psi_k[F]=0\}; \quad \bar{\mu}^*_{q-i} \notin \{\overline{\mu} \mid \psi_{l+1}[F]=0\}. \tag{1.6}$$

К числу $l_*[F]$ будем ссылаться как к уровню наследственности точки $\bar{\mu}^*_{q-i} \in \{\overline{\mu}_{q-i} \mid \varphi[F] = 0\}$. Очевидно уровень наследственности любого нуля полинома $\varphi[F]$ не меньше единицы; нули полинома $\varphi_k[F]$ имеют уровень наследственности не меньше k; нули полинома $\psi_k[F]$ имеют уровень наследственности, равный k.

Представим $\varepsilon[F]$ в виде

$$\varepsilon[F] = \frac{f[F]}{f_1[F]} = \frac{\varphi[F]}{\varphi_1[F]}\,\frac{g[F]}{g_1[F]} = \psi_1[F]h_1[F], \tag{1.7}$$

где $\psi_1[F] = \dfrac{\varphi[F]}{\varphi_1[F]}$, $h_1[F] = \dfrac{g[F]}{g_1[F]}$; $h_1[F]$ есть полином, нули которого $(\mu^*_1, \ldots, \mu^*_q) \in \sigma_r[F]$, зависят от q параметров; $\psi_1[F]$ есть полином, нули которого $\bar{\mu}^*_{q-i} \in \sigma_r[F]$, $i = 1, \ldots, q$, зависят от $(q-1)$ параметров.

Имеют место следующие утверждения.

1) Каждому нулю $(\mu^*_1, \ldots, \mu^*_q)$ полинома $h_1[F]$ соответствуют ненулевые постоянные векторы x_* и ξ_*, удовлетворяющие в рассматриваемом нуле уравнениям $F(\lambda, \mu)x = 0$ и $F^{\intercal}(\lambda, \mu)\xi = 0$. При этом выполняются соотношения: $x_* \notin \operatorname{span} W_0[F]_* \equiv N_c[F]_*$; $\xi_* \notin \operatorname{span} W_0[F^{\intercal}]_* \equiv N_c[F^{\intercal}]_*$, $(\mu^*_1, \ldots, \mu^*_q) \notin \sigma[W_0(F)]$, $(\mu^*_1, \ldots, \mu^*_q) \notin \sigma[W_0(F^{\intercal})]$.

2) Каждому нулю $\bar{\mu}^*_{q-i}$ полинома $\psi_1[F]$ соответствуют ненулевые постоянные векторы y_* и η_*, удовлетворяющие в рассматриваемом нуле уравнениям $F(\lambda, \mu)y = 0$ и $F^{\intercal}(\lambda, \mu)\eta = 0$. При этом выполняются соотношения: $y_* \notin N_c[F]_*$; $\eta_* \notin N_c[F^{\intercal}]_*$, $(\lambda, \bar{\mu}^*_{q-i}) \notin \sigma[W_0(F)]$, $(\lambda, \bar{\mu}^*_{q-i}) \notin \sigma[W_0(F^{\intercal})]$.

Множество $\sigma_r[F]$ может быть представлено в виде

$$\begin{gathered} \sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \cup \sigma_{r2}[F] \colon \sigma_{r1}[F] = \{(\lambda, \mu) \mid \varepsilon[F] = 0\} = \\ = \{(\lambda, \mu) \mid h_1[F] = 0\} \cup \{\overline{\mu} \mid \psi_1[F] = 0\}; \\ \sigma_{r2}[F] = \{\overline{\mu} \mid \varphi_1[F] = 0\}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

§2. Неполная относительная факторизация матрицы

Неполной относительной факторизацией (НОФ) q-параметрической полиномиальной матрицы F полного ранга ($q \geqslant 2$) называются разложения F видов

$$F = \widehat{F}P \quad \text{для} \quad F \in \mathcal{F}^{m\times n}_n; \tag{2.1}$$

$$F = \overline{P}\,\overline{F} \quad \text{для} \quad F \in \mathcal{F}^{m\times n}_m. \tag{2.2}$$

Здесь каждая из матриц $\widehat{F}$ и $\overline{F}$ зависят от q параметров и являются соответственно полного столбцового и полного строчного рангов. Матрицы P и $\overline{P}$ суть регулряные размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, каждая зависит от q параметров. При этом точки спектров $\sigma[P]$ и $\sigma[\overline{P}]$ зависят от $(q-1)$ параметров: $P = \prod_{k=q}^{1} \nabla_k^{\intercal}$, $\overline{P} = \prod_{k=1}^{q} \overline{\nabla}_k$, $\nabla_k = \nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$, $\overline{\nabla}_k = \overline{\nabla}_k(\overline{\mu}_{q-k})$, где ∇_k и $\overline{\nabla}_k$ суть $n \times n$ и $m \times m$ регулярные матрицы, каждая из которых зависит от $(q-1)$ параметров.

2.1. Алгоритм вычисления НОФ матрицы $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$.

Алгоритм вычисления (2.1) состоит из q типичных шагов, соответствующих выбору ведущего параметра $\lambda = \mu_k$, и начальной матрицы $F_k(\lambda, \overline{\mu}_{q-k})$. Порядок выбора ведущего параметра произвольный. Для определенности будем выбирать λ в последовательности $\mu_1, \ldots, \mu_q$. Рассмотрим первый шаг. В качестве ведущего параметра выбирается $\lambda = \mu_1$, вспомогательными являются параметры $\overline{\mu}_{q-1} := \mu_2, \ldots, \mu_q$. Матрица $F_1 := F^{\intercal}$ представляется в виде $F_1 = \sum_{i=0}^{s_1} C_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\lambda^i$. Выполняются следующие операции.
(1) Формируется $n \times (s_1+1)m$ матрица

$$\mathfrak{A}_1 := \mathfrak{A}_1(\overline{\mu}_{q-1}) = \left[C_{s_1}^{(1)}, C_{s_i-1}^{(1)}, \ldots, C_0^{(1)}\right], \quad C_k^{(1)} = C_k^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1}),$$

зависящая от $(q-1)$ параметров.

(2) К матрице $\mathfrak{A}_1$ применяется алгоритм ∇V-$(q-1)$-факторизации: $\mathfrak{A}_1 = \nabla_1 V_1$. Здесь $\nabla_1 = \nabla_1(\overline{\mu}_{q-1})$ – регулярная $n \times n$ матрица, $V = V(\overline{\mu}_{q-1})$ есть $n\times(s_1+1)m$ матрица, $\sigma_r[\nabla_1] \subseteq \sigma_r[\mathfrak{A}_1]$, $\sigma_s^+[\mathfrak{A}_1] = \sigma_s^+[V_1]$.

Результатом выполнения первого шага (операции (1), (2)) будут получены равенства

$$F_1 = F_1(\mu_1, \ldots, \mu_q) = \mathfrak{A}_1(\overline{\mu}_{q-1})\Lambda_1(\lambda) = \nabla_1(\overline{\mu}_{q-1})F_2, \quad F_2 = V_1\Lambda_1,$$

где $\Lambda_1 := \left[\lambda^{s_1} I_m, \lambda^{s_1-1} I_m, \ldots, \lambda^0 I_m\right]^B$ есть однопараметрическая $(s_1+1)m \times m$ матрица полного столбцового ранга, I_m – единичная $m \times m$ матрица.

В качестве начальных данных для второго шага берутся $\lambda = \mu_2$, $\overline{\mu}_{q-2} := \mu_1, \mu_3, \ldots, \mu_q$. В результате выполнения q шагов будет получено разложение $F^{\intercal} = \nabla_1(\overline{\mu}_{q-1})\nabla_2(\overline{\mu}_{q-1})\ldots\nabla_q(\overline{\mu}_{q-1})F_{q+1}$ или, так называемая левая неполная относительная факторизация матрицы F вида (2.1), где $\widehat{F} = F_{q+1}^{\intercal}$, $P = \prod\limits_{k=q}^{1} \nabla_k^{\intercal}$, $\nabla_k = \nabla(\overline{\mu}_{q-1})$.

2.2. Алгоритм вычисления НОФ матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$.

Алгоритм состоит из q типичных шагов. На первом шаге в качестве ведущего параметра выбирается $\lambda = \mu_1$, вспомогательными являются параметры $\overline{\mu}_{q-1}$. Матрица $\overline{F}_1 = F$ записывается в виде $\overline{F}_1 = F(\lambda, \overline{\mu}_{q-1}) = \sum_{i=0}^{t_1} \bar{C}_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\lambda^i$. Выполняются следующие операции.

(1) Формируется $m \times (t_1+1)n$ матрица $\overline{\mathfrak{A}}_1(\overline{\mu}_{q-1}) = [\bar{C}_{t_1}^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1}), \ldots, \bar{C}_0^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})]$.

(2) К $\overline{\mathfrak{A}}_1$ применяется метод ∇V-$(q-1)$ факторизации

$$\overline{\mathfrak{A}}_1 = \overline{\nabla}_1 \overline{V}_1,$$

где $\overline{\nabla}_1 = \overline{\nabla}_1(\overline{\mu}_{q-1})$ – регулярная $m \times m$ матрица, $\overline{V}_1 = \overline{V}_1(\overline{\mu}_{q-1})$ – $m \times (t_1+1)n$ матрица полного строчного ранга: $\sigma_r[\overline{\nabla}_1] \subseteq \sigma_r[\overline{\mathfrak{A}}_1]$, $\sigma_s^+[\overline{\mathfrak{A}}_1] = \sigma_s^+[\overline{V}_1]$. Результатом первого шага будут получены равенства $\overline{F}_1 := \overline{F}_1(\mu_1, \ldots, \mu_q) = \overline{\mathfrak{A}}_1(\overline{\mu}_{q-1})\overline{\Lambda}_1(\lambda)$, $\overline{F}_1 = \overline{\nabla}_1 \overline{F}_2$, $\overline{F}_2 = \overline{V}_1 \overline{\Lambda}_1$, где $\overline{\Lambda}_1 = [\lambda^{t_1} I_n, \ldots, \lambda^0 I_n]^B$ есть однопараметрическая полного столбцового ранга матрица размеров $(t_1+1)n \times n$.

В качестве начальных данных для второго шага берутся $\lambda = \mu_2$, $\overline{\mu} = \overline{\mu}_{q-2}$, $F_2 = F_2(\lambda, \overline{\mu}_{q-2})$. В результате выполнения q шагов будет получено разложение (2.2), где $\overline{F} = \overline{F}_{q+1}$, $\overline{P} = \prod\limits_{k=1}^{q} \overline{\nabla}_k(\overline{\mu}_{q-1})$.

2.3. Обоснование и свойства НОФ-метода.

Теорема. 1) *Если регулярный и сингулярный спектры q-параметрической матрицы $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$ не имеют общих точек ($\mathfrak{M}[F] = \varnothing$), то правая неполная относительная факторизация* (2.1) *матрицы F имеет следующие свойства.*

$\bullet\rfloor$ $P := \prod\limits_{k=q}^{1} \nabla_k^{\intercal}(\overline{\mu}_{q-1})$ *есть регулярная q-параметрическая $n \times n$ матрица, собственные значения которой зависят от $(q-1)$ параметров:* $\det P = \prod \det \nabla_k$. *Каждой правой собственной паре $\bar{\mu}_{q-k}^*$; $y_*^{(k)}$ матрицы $\nabla_k^{\intercal}$ соответствует собственная пара $(\lambda, \bar{\mu}_{q-k}^*)$; $y_*^{(k)}$ матрицы F. При этом точки спектра матрицы P совпадают с нулями минимального наследственного полинома $\psi_1[F]$ матрицы F.*

•⌋ $\widehat{F}$ *есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга n, имеющая следующие спектральные свойства:* $\sigma_s^-[\hat{F}] = \sigma_s^-[F]$, *множество* $\sigma_r[\widehat{F}]$ *есть объединение нулей полиномов* $\varphi_1[F]$ *и* $g[F]$.

2) *Если регулярный и сингулярный спектры q-параметрической полиномиальной матрицы* $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ *не имеют общих точек* $\{\mathfrak{M}[F] = \varnothing\}$, *то левая неполная относительная факторизация* (2.2) *матрицы* $\overline{F}$ *имеет следующие свойства.*

•⌋ $\overline{P} = \prod\limits_{k=1}^{q} \overline{\nabla}_k(\overline{\mu}_{q-1})$ *есть регулярная q-параметрическая $m \times m$ матрица, собственные значения которой зависят от $(q-1)$ параметров:* $\det \overline{P} = \prod\limits_{k=1}^{q} \det \nabla_k = 0$. *Каждой левой собственной паре* $\bar{\mu}_{q-k}^*$, $\eta_*^{\intercal}$ *матрицы* ∇_k *соответствует левая собственная пара* $(\lambda, \bar{\mu}_{q-k}^*)$, $\eta_*^{(k)}$ *матрицы* $F(\lambda, \mu)$. *При этом собственные значения матрицы* $\overline{P}$ *совпадают с нулями полинома* $\psi_1[F]$.

•⌋ $\overline{F}$ *есть q-параметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица, ранга m, имеющая следующие спектральные свойства* $\sigma_s^+[\overline{F}] = \sigma_s^+[F]$; *множество* $\sigma_r[\overline{F}]$ *есть объединение нулей полиномов* $\varphi_1[\overline{F}]$ *и* $g[\overline{F}]$.

Следствие. *Спектры матриц* $\nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$ *(матриц* $\overline{\overline{\nabla}}_k(\overline{\mu}_{q-k})$*)* $k = 1, \ldots, q$ *не пересекаются. Спектр матрицы* $\nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$ *(матрицы* $\overline{\overline{\nabla}}_k(\overline{\mu}_{q-k})$*) не зависит от параметра* μ_k *и совпадает с точками цилиндрического многообразия регулярного спектра* $\sigma_{r1}[F]$ *матрицы* F *в пространстве* $\mathbb{C}^q$ *относительно параметра* μ_k.

Рассмотрим леммы, на базе которых будет построено доказательство теоремы для случая $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$.

Лемма 1[1]**.** 1) *Пусть* $G = G_1G_2$, *где* G, G_1 *и* G_2 *суть q-параметрические полиномиальные матрицы рангов* ρ, ρ_1 *и* ρ_2 *соответственно. Тогда имеют место следующие утверждения.*

•⌋ *Если* $\rho = \rho_1 = \rho_2$, *то* $\sigma_r[G] \supseteq \sigma_r[G_i]$, $i = 1, 2$.

•⌋ *Если, по крайней мере, одна из матриц (скажем* G_1*) является регулярной и* $\sigma_r[G_1] \cap \sigma_r[G_2] = \varnothing$, *то* $\sigma_r[G]$ *есть объединение* $\sigma_r[G_1]$ *и* $\sigma_r[G_2]$.

2) *Пусть F есть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица и* $N_c[F] \neq \varnothing$. *Тогда* $\sigma_s^+[F] = \sigma_s^-[W_0(F)]$, $W_0(F)$ *есть базисная матрица* $N_c[F]$.

[1] Доказательство леммы см. в [4]

Лемма 2. *Пусть* $F := F(\lambda, \overline{\mu}) = \sum_{k=0}^{1} \lambda^k C_k(\overline{\mu}) = V(\overline{\mu})\Lambda(\lambda)$, *где* $F \in \mathcal{F}_n^{n\times m}$ *зависит от* q *параметров,* $V(\overline{\mu}) = [C_s(\mu), \dots, C_0(\mu)] \in \mathcal{F}_n^{n\times N}$, $N = (s+1)m$, $V(\overline{\mu})$ *зависит от* $(q-1)$ *параметров* $\Lambda(\lambda) = [\lambda^s I_m, \lambda^{s-1} I_m, \dots, I_m]^B \subset \mathcal{F}_m^{N\times m}$, $\Lambda(\lambda)$ *– однопараметрическая полиномиальная матрица. Пусть* $U := W_0[F^T]$ *– базисная матрица* $N_c[F^T]$, *так что* $U \in \mathcal{F}_{n_1}^{m\times n_1}$, $n_1 = m - n$. *Тогда имеют место следующие утверждения*

$$\sigma[W_0(V)] \supseteq \sigma[\Lambda U] \supseteq \sigma[U].$$

При этом

$$\sigma[U] = \sigma[\Lambda U], \tag{2.3}$$

если точки множества $\sigma[U] \equiv \sigma[W_0(F^{\intercal})]$ *не зависят от параметра* λ.

Доказательство. Из равенства $FU = 0$ или (что то же) $V(\Lambda U) = 0$ с учетом, что $N_c[V] \supseteq N_c[\Lambda U]$ $(\dim N_c[V] = N - n, \dim N_c(\Lambda U) = n_1)$ следует включение

$$\sigma[W_0(V)] \supseteq \sigma[W_0(\Lambda U)].$$

Докажем справедливость включения $\sigma[\Lambda U] \supseteq \sigma[U]$.

По определению конечного спектра q-параметрической полиномиальной матрицы $(q \geqslant 1)$

•⌋ множество $\sigma[U]$ состоит из решения системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) вида

$$U\begin{pmatrix} 1 & 2\dots n_1 \\ j_1 & j_2\dots j_{n_1} \end{pmatrix} = 0 \quad 1 \leqslant j_1 < \dots < j_{n_1} \leqslant m; \tag{2.4}$$

•⌋ множество $\sigma[\Lambda U]$ состоит из решений СНАУ вида

$$\Lambda U\begin{pmatrix} 1 & 2\dots n_1 \\ k_1 & k_2\dots k_{n_1} \end{pmatrix} = 0 \quad 1 \leqslant k_1 < \dots < k_{n_1} \leqslant N. \tag{2.5}$$

Из вида матрицы $\Lambda U = [\lambda^s U, \lambda^{s-1} U, \dots, U]^B$ следует, что решение СНАУ (2.5) состоят из решений системы нелинейных алгебраических уравнений, зависящих от λ, и решений СНАУ (2.4). Отсюда

$$\sigma[\Lambda U] \supseteq \sigma[U].$$

При этом равенство (2.3) будет выполняться, если базисные матрицы $W_0[F]$ и $W_0[V]$ соответственно подпространств $N_c[F]$ и $N_c[V]$ выбираются так, что точки их спектров $\sigma[W_0(F)]$ и $\sigma[W_0(V)]$ не зависят от параметра λ. Лемма доказана.

Лемма 3. *В условиях метода НОФ имеют место следующие утверждения.*

1°. $\sigma[\nabla_i] \cap \sigma[\nabla_j] = \varnothing$ *при* $i \neq j$.

2°. *Любая собственная пара* μ^*_{q-k}; $y^{(k)}_*$ *матрицы* $\nabla^{\intercal}_k(\overline{\mu}_{q-k})$ *является собственной парой матрицы* P.

3°. *Спектр матрицы* ∇_k *не пересекается со спектром матрицы* $W_0[\hat{F}^{\intercal}]$.

Справедливость 1° следует из несовпадения точек $\bar{\mu}^*_{q-i}$ и $\bar{\mu}^*_{q-j}$ при $i \neq j$. Здесь $\bar{\mu}^*_{q-i}$ и $\bar{\mu}^*_{q-j}$ суть точки $\sigma[\nabla_i]$ и $\sigma[\nabla_j]$ соответственно.

Докажаем справедливость 2°. Пусть $\bar{\mu}^*_{q-k}$; $y^{(k)}_*$ есть собственная пара $\nabla^{\intercal}_k(\overline{\mu}_{q-k})$. Надо доказать справедливость равенства $P(\mu_k, \bar{\mu}^*_{q-k})y^{(k)}_* = 0$. Учитывая произвольный выбор последовательности ведущих параметров при исчерпывании делителй $\nabla_i(\overline{\mu}_{q-i})$ из преобразуемой матрицы в методе НОФ, можем для люого фиксированного шага k матрицу P представить в виде

$$P(\mu_k, \overline{\mu}_{q-k}) = \Big[\prod_{i\neq k} \nabla^{\intercal}_i(\overline{\mu}_{q-i})\Big] \nabla^{\intercal}_k(\overline{\mu}_{q-k}),$$

так что имеем

$$P(\mu_k, \bar{\mu}^*_{q-k})y^{(k)}_* = \Big[\prod_{i\neq k} \nabla^{\intercal}_i(\overline{\mu}_{q-i})\Big] \nabla^{\intercal}_k(\bar{\mu}^*_{q-k})y^{(k)}_* = 0.$$

При этом с учетом свойства 1° можем утверждать, что спектр матрицы $\prod\limits_{i\neq k} \nabla^{\intercal}_i(\overline{\mu}_{q-i})$ не содержит точки $\bar{\mu}^*_{q-k}$. Из сказанного следует справедливость свойства 2°.

Перейдем к доказательству свойства 3°. Сначала докажем, что при условии $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ для $F \in \mathcal{F}^{m\times n}_n$ имеют место следующие соотношения на каждом шаге k $(k = 1, \dots, q)$ метода НОФ:

$$N_c[F^{\intercal}] = N_c[F_k] = N_c[\hat{F}^{\intercal}] \quad (F_1 = F^{\intercal}). \tag{2.6}$$

$$\sigma_r[F_k] \supseteq \sigma_r[F_{k+1}], \quad \sigma^+_s[F_k] = \sigma^+_s[F_{k+1}], \tag{2.7}$$

$$\mathfrak{M}[F_k] = \varnothing, \quad \mathfrak{M}[\mathfrak{A}_k] = \varnothing, \tag{2.8}$$

$$\sigma_r[V_k] = \varnothing, \quad \sigma_r[\mathfrak{A}_k] = \sigma_r[\nabla_k], \quad \sigma_s^+[\mathfrak{A}_k] = \sigma_s^+[V_k], \tag{2.9}$$

$$\sigma[W_0(F_k)] = \sigma[W_0(V_k\Lambda_k)] = \sigma[W_0(V_k)], \tag{2.10}$$

$$\sigma[\nabla_k] \cap \sigma[W_0(V_k)] = \varnothing. \tag{2.11}$$

Справедливость (2.6) и (2.7) следует из леммы 1 и равенств $F_k = \nabla_k F_{k+1}$, $F_1 = F^{\intercal}$, $F_{q+1}^{\intercal} = \widehat{F}$. Действительно, с четом, что ∇_k – регулярная матрица имеем $\sigma_r[F_k] \supseteq \sigma_r[F_{k+1}]$. Далее $N_c[F_k] = N_c[F_{k+1}]$, так что $W_0(F_k) = W_0(F_{k+1})$, а следовательно, $\sigma_s^+[W_0(F_k)] = \sigma_s^+[W_0(F_{k+1})]$. По лемме 1 $\sigma_s^-[W_0(F_k)] = \sigma_s^+[F_k]$, $\sigma_s^-[W_0(F_{k+1})] = \sigma_s^+[F_{k+1}]$. Справедливость $\mathfrak{M}[F_k] = \varnothing$ следует из условия $\mathfrak{M}[F] = \varnothing$ и включения $\mathfrak{M}[F_k] \subseteq \mathfrak{M}[F]$, выполняемого в силу (2.7). Докажем, что $\mathfrak{M}[\mathfrak{A}_k] = \varnothing$. С учетом, что $\mathfrak{A}_k = \nabla_k V_k$, где ∇_k – регулярная матрица, имеем $N_c[\mathfrak{A}_k] = N_c[V_k]$, так что

$$\sigma_s^+[\mathfrak{A}_k] = \sigma_s^+[V_k]. \tag{2.12}$$

По лемме 1 имеем $\sigma_s^+[V_k] = \sigma_s^-[W_0(V_k)]$. С учетом $F_k = V_k\Lambda_k$ по лемме 2 находим $\sigma[W_0(V_k)] = \sigma[W_0(F_k)]$, так что $\sigma_s^-[W_0(V_k)] = \sigma_s^-[W_0(F_k)]$. Отсюда с учетом леммы 1 имеем

$$\sigma_s^-[W_0(V_k)] = \sigma_s^+[V_k] = \sigma_s^-[W_0(F_k)] = \sigma_s^+[F_k]. \tag{2.13}$$

Из (2.9) и (2.10) имеем

$$\sigma_s^+[\mathfrak{A}_k] = \sigma_s^+[F_k]. \tag{2.14}$$

Далее из равенства $F_k = \mathfrak{A}_k\Lambda_k$, где $\operatorname{rank}[F_k] = \operatorname{rank}[\mathfrak{A}_k]$, по лемме 1 имеем $\sigma_r[\mathfrak{A}_k] \subseteq \sigma_r[F_k]$. Отсюда с учетом (2.7) имеем $\mathfrak{M}[\mathfrak{A}_k] \subseteq \mathfrak{M}[F_k]$, где $\mathfrak{M}[F_k] = \varnothing$, так что $\mathfrak{M}[\mathfrak{A}_k] = \varnothing$ и справедливость (2.8) установлена. Справедливость (2.9) следует из свойств ∇V-факторизации и $\mathfrak{M}[\mathfrak{A}_k] = \varnothing$. Согласно свойств ∇V-факторизации матрицы $\mathfrak{A}_k$ имеем $\sigma_r[\mathfrak{A}_k] = \sigma[\nabla_k]$, $\sigma_r[V_k] = \varnothing$. Равенство $\sigma_s^+[\mathfrak{A}_k] = \sigma_s^+[V_k]$ следует из совпадения $N_c[\mathfrak{A}_k]$ и $N_c[V_k]$. Так что $\sigma_s^-[W_0(\mathfrak{A}_k)] = \sigma_s^-[W_0(V_k)]$. Тогда по лемме 1 имеем $\sigma_s^+[\mathfrak{A}_k] = \sigma_s^+[V_k]$. Справедливость (2.9) устанлвлена. Справедливость (2.10) следует из (2.6), леммы 2 и равенства $F_k = \nabla_k V_k \Lambda_k$. Для доказательства (2.11) достаточно установить справедливость равенств

$$\sigma[\nabla_k] \cap \sigma_s^-[W_0(V_k)] = \varnothing \tag{2.15}$$

$$\sigma[\nabla_k] \cap \sigma_r[W_0(V_k)] = \varnothing. \tag{2.16}$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств, полученных с учетом (2.8), (2.9), равенства $W_0[\mathfrak{A}_k] = W_0[V_k]$ и леммы 1

$$\varnothing = \sigma_r[\mathfrak{A}_k] \cap \sigma_s^+[\mathfrak{A}_k] = \sigma[\nabla_k] \cap \sigma_s^+[V_k] = \sigma[\nabla_k] \cap \sigma_s^-[W_0(V_k)].$$

Отсюда следует справедливость (2.15). Перейдем к доказательству (2.16). Из (2.9) находим $\sigma_r[\mathfrak{A}_k] = \sigma[\nabla_k]$, где $\nabla_k = \nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$ есть регулярная матрица от $(q-1)$ параметров $\overline{\mu}_{q-k}$. Каждой точке $\bar{\mu}^*_{q-k} \in \sigma[\nabla_k]$ соответствует ненулевой постоянный вектор $y_*^{(k)} : \nabla_k^{\intercal}(\bar{\mu}^*_{q-k})y_*^{(k)} = 0$. При этом по построению спектр матрицы ∇_k не зависит от точек спектра матрицы $W_0[V_k] = W_0[\mathfrak{A}_k]$, так что $\sigma[\nabla_k] \cap \sigma[W_0(V_k)] = \varnothing$, а следовательно $\sigma[\nabla_k] \cap \sigma_r[W_0(V_k)] = \varnothing$. Справедливость (2.16) установлена.

Вернемся к доказательству свойства 3° леммы 3. Из (2.6) имеем $W_0[F_k] = W_0(F_1) \equiv W_0(F^{\intercal})$, так что $\sigma[W_0(F_k)] = \sigma[W_0(F^{\intercal})]$. Отсюда с учетом (2.15) и (2.16) следует

$$\sigma[\nabla_k] \cap \sigma[W_0(F^{\intercal})] = \varnothing.$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. По построению $P = \prod_{k=q}^{1} \nabla_k^{\intercal}$, $\nabla_k := \nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$ – регулярная полиномиальная матрица от $(q-1)$ параметров $\overline{\mu}_{q-k}$. При этом $\sigma[P]$ состоит из нулей $\bar{\mu}^*_{q-k}$ полиномов $\det \nabla_k = 0$, $k = 1, \ldots, q$.

Докажем справедливость равенства

$$\bigl\{\overline{\mu} \mid \det P = 0\bigr\} = \bigl\{\overline{\mu} \mid \psi_1[F] = 0\bigr\}. \tag{2.17}$$

Пусть $(\lambda, \bar{\mu}^*) \in \sigma[P]$, т.е. имеет место равенство

$$P(\lambda, \bar{\mu}^*)y_* = 0 \quad y_* \neq 0 : \tag{2.18}$$

$(\lambda, \bar{\mu}^*)$; y_* есть собственная пара матрицы P. Докажем, что $\overline{\mu}_*$ есть нуль полинома $\psi_1[F]$, т.е. имеют место соотношения

$$F(\lambda, \overline{\mu}_*)y_* = 0, \quad y_* \neq 0 \quad y_* \notin N_c[F^{\intercal}]_*, \quad (\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \sigma[W_0(F^{\intercal})].$$

С учетом леммы 3, где свойство 3° справедливо для любого $k = 1, \ldots, q$, имеем $\sigma[\nabla_k] \cap \sigma[W_0(F^{\intercal})] = \varnothing$. Отсюда $\sigma[P] \cap \sigma[W_0(F^{\intercal})] = \varnothing$, что с учетом (2.18) и равенства $F = \widehat{F}P$ дает $F(\lambda, \overline{\mu}_*)y_* = 0$,

$y_* \neq 0$, $(\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \sigma_r[\widehat{F}]$, $y_* \notin N_c[F^\intercal]_*$. Из сказанного следует что $\overline{\mu} = \overline{\mu}_*$ есть нуль полинома $\psi_1[F]$, так что имеет место включение

$$\sigma[P] \subseteq \{\overline{\mu} \mid \psi_1[F] = 0\}. \tag{2.19}$$

Докажем обратное включение

$$\{\overline{\mu} \mid \psi_1[F] = 0\} \subseteq \sigma[P]. \tag{2.20}$$

Пусть $\overline{\mu}_*$ есть нуль полинома $\psi_1[F]$. Надо доказать, что $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ есть нуль полинома $\det P$. Для этого достаточно установить, что $(\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \sigma[\widehat{F}]$.

Доказательство от противного. Допустим $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \sigma[\widehat{F}]$. Мыслимы две ситуации: (а) $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \sigma_{r1}[\widehat{F}]$ и (б) $(\lambda, \overline{\mu}_*) \in \sigma_{r2}[\widehat{F}]$. Рассмотрим ситуацию (а). По условию, с учетом свойств минимального наследственного полинома $\psi_1[F]$, имеем

$$F(\lambda, \overline{\mu}_*)x_* = 0 \quad x_* \neq 0, \quad x_* \notin N_c[F^\intercal]_*, \quad (\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \sigma[W_0(F^\intercal)]. \tag{2.21}$$

Тогда справедливо равенство

$$\widehat{F}(\lambda, \overline{\mu}_*)P(\lambda, \overline{\mu}_*)x_* = 0, \quad \text{причем} \quad z(\lambda) := P(\lambda, \overline{\mu}_*)x_* \neq 0.$$

Отсюда $(\lambda, \overline{\mu}_*) \notin \sigma_{r1}[\widehat{F}]$, так как $z(\lambda)$ есть полиномиальный вектор, так что ситуация (а) не выполнима.

Рассмотрим ситуацию (б). Пусть $(\lambda, \mu_*) \in \sigma_{r2}[\widehat{F}]$, т.е. $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ принадлежит множеству $\sigma_r[\widehat{F}] \cap \sigma[W_0(\hat{F}^\intercal)]$. Но тогда $(\lambda, \overline{\mu}_*)$ есть общая точка $\sigma[W_0(\hat{F}^\intercal)]$ и $\sigma[W_0(F^\intercal)]$, так как $N_c[\hat{F}^\intercal] = N_c[F^\intercal]$. Последнее противоречит условию (2.21). Противоречие доказывает справедливость включения (2.20).

Перейдем к доказательству спектральных свойств матрицы $\widehat{F}$. Справедливость равенства $\sigma_s^-[\widehat{F}] = \sigma_s^-[F]$ следует из леммы 3 с учетом, что $\widehat{F} := F_{q+1}^\intercal$. Справедливость $\sigma_r[\widehat{F}] \cap \sigma[P] = \varnothing$ следует из доказанного выше совпадения нулей полиномов $\psi_1[F]$ и $\det P$ и соотношения $\sigma_r[\widehat{F}] \cap \{\overline{\mu} \mid \psi_1[F] = 0\} = \varnothing$, установленного при доказательстве первого пункта теоремы. Из сказанного, с учетом леммы 1, заключаем, что $\sigma_r[\widehat{F}]$ дополняет $\sigma[P]$ до конечного регулярного спектра $\sigma_r[F]$ матрицы F. Отсюда $\sigma_r[\widehat{F}]$ состоит из объединения нулей полиномов $\varphi_1[F]$ и $g[F]$. Справедливость теоремы для $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$ установлена.

Доказательство свойств НОФ матрицы $F \in \mathcal{F}_m^{m\times n}$ проводится аналогично.

§3. Вычисление собственных значений и собственных векторов

Под собственными значениями q-параметрической полиномиальной матрицы F понимаются нули ее минимального полинома $\varepsilon[F]$:

$$\varepsilon[F] = \frac{f[F]}{f_1[F]} = \frac{\varphi[F]g(F)}{\varphi_1[F]g_1[F]} = \psi_1[F]h_1[F],$$

где $\psi_1[F] = \frac{\varphi[F]}{\varphi_1[F]}$ – минимальный наследственный полином матрицы F, $h_1[F] = \dfrac{g[F]}{g_1[F]}$; $f[F] = \varphi[F]g[F]$ и $f_1[F] = \varphi_1[F]g_1[F]$ есть неполная относительная факторизация соответственно полиномов $f[F]$ и $f_1[F]$. Задача состоит в вычислении нулей полинома $\varepsilon[F]$ и им соответствующих собственных векторов, используя метод НОФ. Для определенности будем предполагать $F \in \mathcal{F}_n^{m\times n}$. Нули $\varepsilon[F]$ представим в виде 3-х групп: нули $\psi_1[F]$, нули системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

$$\begin{cases} \psi_1[F] = 0, \\ h_1[F] = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

и нули $h_1[F]$, не принадлежащие СНАУ (3.1). Решение задачи будем проводить в три стадии, соответствующие указанным выше группам.

Первая стадия определяет нули $\psi_1[F] = 0$ применением к матрице F правой неполной относительной факторизации $F = \widehat{F}P$, $P = \prod\limits_{k=q}^{1} \nabla_k^{\intercal}$, где $\nabla_k = \nabla_k(\overline{\mu}_{q-k})$ – регулярные матрицы, спектр которых не зависит от параметра μ_k. Согласно теореме из §2 собственные пары $\bar{\mu}^*_{q-k}; y_*^{(k)}$ матриц $\nabla_k^{\intercal}$, $k = 1,\dots,q$, образуют искомые на первой стадии собственные пары матрицы F : $F(\lambda,\bar{\mu}^*_{q-k})y_*^{(k)} = 0$, $y_*^{(k)} \neq 0$, $y_*^{(k)} \notin N_c[F^{\intercal}]_*$.

Вторая стадия вычисляет решения СНАУ (3.1), т.е. собственные значения $(\lambda_{ki},\bar{\mu}^*_{q-k})$ однопараметрической полиномиальной матрицы $\widehat{F}(\lambda,\bar{\mu}^*_{q-k})$ для каждого фиксированного нуля $\bar{\mu}^*_{q-k}$ полинома $\psi_1[F]$, вычисленного на первой стадии. Задача решается любым из методов вычисления собственных значений однопараметрической полиномиальной матрицы. Собственные векторы x_* и y_*, соответствующие фиксированному собственному значению $(\lambda_{ki}, \bar{\mu}^*_{q-k}) \equiv (\mu^*_1, \dots, \mu^*_q)$ матриц F и F^{T} находятся применением алгоритма ΔW-0 разложения к постоянным матрицам $F(\mu^*_1, \dots, \mu^*_q)$ и $F^{\mathsf{T}}(\mu^*_1, \dots, \mu^*_q)$:

$$F(\mu^*_1, \dots, \mu^*_q)W^{(1)} = [\Delta^{(1)}, 0],$$

$$F^{\mathsf{T}}(\mu^*_1, \dots, \mu^*_q)W^{(2)} = [\Delta^{(2)}, 0].$$

Последний столбец ортогональной матрицы $W^{(1)}$ является искомым правым собственным вектором x_*; последний столбец ортогональной матрицы $W^{(2)}$ является искомым левым собственным вектором матрицы F.

Для реализации третьей стадии следует предварительно исчерпать из регулярного спектра $\sigma_r[\widehat{F}]$ матрицы $\widehat{F}$, найденные спектральные характеристики на второй стадии. Для этого выполняются следующие операции для каждого фиксированного собственного значения $(\lambda_{ik}, \bar{\mu}^*_{q-k})$.

(1) Находится ΔW-0 разложение постоянной матрицы $\widehat{F}(\lambda_{ik}, \bar{\mu}^*_{q-k})$:

$$\widehat{F}(\lambda_{ik}, \bar{\mu}^*_{q-k})W = [\Delta, 0],$$

где W – ортогональная матрица, Δ – матрица полного столбцового ранга, 0 – нулевой стобец.

(2) Вычисляется полиномиальная матрица

$$\Phi_k := \widehat{F}_k(\lambda, \overline{\mu})W, \quad \widehat{F}_1 = \widehat{F}.$$

(3) Вычисляется полином δ_k, т.е. ОНД последнего столбца матрицы Φ_k.

(4) Формируется матрица $\widehat{F}_{k+1} = \Phi_k \text{block diag}\{I_{n-1}, \delta_k^{-1} e_n\}$.

Выполнение операций (1)–(4) заканчивается на конечном шаге, когда все собственные значения $(\lambda_{ik}, \bar{\mu}^*_{q-k})$, найденные на второй стадии, будут исчерпаны из спектра матрицы $\widehat{F}$. Результирующую матрицу обозначим $\widetilde{F}$. Очевидно регулярный спектр матрицы $\widetilde{F}$ совпадает с нулями полинома $h_1[F]$, подлежащими вычислению на третьей стадии.

Для выполнения третьей стадии предлагаются два способа вычисления искомых нулей полинома $h_1[F]$.

Первый способ требует выполнения следующих операций.

(1) Вычисляется ΔW-q факторизация матрицы $\tilde{F}^{\intercal}$: $\tilde{F}^{\intercal}\widetilde{W} = [\widetilde{\Delta}, 0]$, где $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_0]$, $\widetilde{W}_0 = N_c[\tilde{F}^{\intercal}]$; $\widetilde{\Delta} = \tilde{F}^{\intercal}\widetilde{W}_1$ – регулярная матрица.

(2) Вычисляется $\det\widetilde{\Delta}$ и находится его неполная относительная факторизация

$$\det\widetilde{\Delta} = p_1(\overline{\mu})p_2(\lambda, \overline{\mu}).$$

(3) Формируется матрица $\Phi := [p_1 I, \widetilde{\Delta}]$ и находится ∇V-факторизация Φ:

$$\Phi = \nabla V, \quad V = [V_1, V_2], \quad \text{так что} \quad \widetilde{\Delta} = \nabla V_2, \; p_1 I = \nabla V_1.$$

Отсюда с учетом, что $\sigma_r[\Phi] = \sigma_r[\nabla]$ и $\{\overline{\mu} \mid p_1(\overline{\mu}) = 0\} = \sigma_r[W_1]$, следует, что $\sigma_r[V_2]$ дополняет $\sigma_r[\Phi]$ до $\sigma_r[\widetilde{\Delta}]$. Принимая во внимание, что $\sigma_r[\widetilde{F}]$ не содержит собственных значений $\bar{\mu}^*_{q-k}$, не зависящих от μ_k, $k = 1, \ldots, q$, имеем $\sigma_r[V_2] = \sigma_r[\widetilde{F}]$. Другими словами, регулярный спектр матрицы V_2 дополняет регулярный спектр матрицы $\widetilde{W}_1$ до регулярного спектра матрицы $\widetilde{\Delta} = \tilde{F}^{\intercal}\widetilde{W}_1$. Отсюда нули $\det V_2 = 0$ дают искомые решения третьей сиадии.

Второй способ требует выполнения следующих операций.

(1) Находится полином $p_3(\overline{\mu})$, т.е. любой минор матрицы $\widetilde{W}_1$.

(2) Формируется матрица $\widetilde{\Phi} := [p_3 I, \widetilde{\Delta}]$ и вычисляется ее ∇V-факторизация

$$\widetilde{\Phi} = \nabla V, \quad V = [V_1, V_2], \quad \text{так что} \quad p_3 I = \nabla V_1, \; \widetilde{\Delta} = \nabla V_2.$$

Здесь множество $\sigma_r[\widetilde{\Phi}]$ совпадает с нулями характеристического полинома $f[\widetilde{W}_1]$ матрицы $\widetilde{W}$.

(3) Вычисляются нули $\det V_2 = 0$, которые суть искомые собственные значения третьей стадии.

Вычисление собственных векторов матриц F и $F^{\intercal}$, соответствующих нулям полинома $h_1[F]$, полученным на третьей стадии, проводится применением ΔW-0 разложения к матрицам $F(\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$ и $F^{\intercal}(\mu_1^*, \ldots, \mu_q^*)$ аналогично тому, как это сделано выше на второй стадии.

§4. Построение базисов

Пусть $F \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $N_c[F]$ и $N_c[F^{\intercal}]$ суть правое и левое нуль-пространства из полиномиальных решений матрицы F. Для определенности рассмотрим задачу построения базиса $N_c[F]$, спектр базисной матрицы $\widehat{W}_0 := \widehat{W}_0[F]$ которого не имеет собственных значений или, другими словами, не содержит нулей минимального полинома ($\varepsilon[\widehat{W}_0] = \mathrm{const}$).

Алгоритм вычисления $\widehat{W}_0$ сосоит из двух стадий.

На первой стадии находится базисная матрица $W_0 = W_0[F]$, спектр которой не зависит, по крайней мере, от одного параметра λ, выбранного в качестве ведущего при записи F в виде матричного полинома. Матрица W_0 находится применением к F алгоритма ΔW-q-разложения [1]:

$$FW = [\Delta, 0],$$

где 0-нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица, $W := [W_1, W_0]$ – регулярная матрица, последние $(n-\rho)$ столбцы которой образуют матрицу W_0.

На второй стадии матрица W_0 преобразуется в матрицу $\widehat{W}_0$. Задача решается применением метода неполной относительной факторизации к матрице W_0:

$$W_0 = \widehat{W}_0 \widehat{P}.$$

В условиях метода НОФ столюцы матрицы $\widehat{W}_0$ образуют искомый базис $N_c[F]$.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (2002), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *К решению многопараметрических задач алгебры.* 1. *Методы вычисления наследственных полиномов и их применения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 143–162.
3. В. Н. Кублановская, *Методы и алгориты решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 7–329.
4. В. Б. Хазанов, *О собственных порождающих векторах многопараметрической матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **245** (1998), 165–186.

Kublanovskaya V. N. To solving multiparameter problems of algebra. 2. The method of partial relative factorization and its applications.

For a q-parameter ($q \geqslant 2$) polynomial matrix of full rank whose regular and singular spectra have no points in common, a method for computing its partial relative factorization into a product of two matrices with disjoint spectra is suggested. One of the factors is regular and is represented as a product of q matrices with disjoint spectra. The spectrum of each of the factors is independent of one of the parameters and forms in the space $\mathbb{C}^q$ a cylindrical manifold w.r.t. this parameter. The method is applied to computing zeros of the minimal polynomial with the corresponding eigenvectors. An application of the method to computing a basis of the null-space of polynomial solutions of the matrix that contains no zeros of its minimal polynomial is considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 февраля 2003 г.