



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Лившиц, Достаточное условие слабого перемешивания подстановок и стационарных адических преобразований,
Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 6, 785–793

<https://www.mathnet.ru/mzm4201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

24 апреля 2025 г., 05:52:07



ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СЛАБОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ПОДСТАНОВОК И СТАЦИОНАРНЫХ АДИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. Н. Лившиц

Целью работы является доказательство достаточного условия слабого перемешивания для широкого класса стационарных адических автоморфизмов, введенных в [1] и [2], и подстановочных автоморфизмов, метод основан на результатах [3].

Все пространства последовательностей снабжены слабой топологией.

Следуя [4, 6, 8], определим подстановочный автоморфизм.

1. Исходным объектом является совокупность слов $\mathcal{A} = \{A_i\}_1^n$ в алфавите $Z = \{1, \dots, n\}$. По \mathcal{A} строится матрица [4 — 6] $G_{\mathcal{A}} = (g_{ij})_{i,j=1}^n$, где $g_{ij} \geq 0$ — число вхождений символа j в слово A_i . В дальнейшем предполагается примитивность $G_{\mathcal{A}}$ (т. е. положительность некоторой степени) [7, с. 378].

Определим преобразование $\omega_{\mathcal{A}}$ множества всех конечных слов: $\omega_{\mathcal{A}}: \bigcup_{k=1}^{\infty} Z^k \rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} Z^k$: $\omega_{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_l) = A_{a_1}A_{a_2} \dots A_{a_l}$,

где в правой части стоит соединение слов. Подстановкой называется сужение $\omega_{\mathcal{A}}|_Z$.

Назовем порождающей четверкой такую четверку натуральных чисел (i, j, m, n') , $i \leq n'$, $j + 1 \leq |A_i|$, что существуют символы $a, b, c, d \in Z$, такие, что: 1) c и d являются, соответственно, j и $j + 1$ символами слова

A_i ; 2) слово $\omega_{\mathcal{A}}^m c$ кончается на a и слово $\omega_{\mathcal{A}}^m d$ начинается на b ; 3) $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(a)$ кончается на a и $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(b)$ начинается на b .

Порождающие четверки всегда существуют. Выберем какую-либо из них, и, пользуясь соответствующими ей a и b , определим *последовательность соединений слов*: $\{a\} \{b\}$; $\omega_{\mathcal{A}}^{n'}(\{a\}) \omega_{\mathcal{A}}^{n'}(\{b\})$; $\omega_{\mathcal{A}}^{2n'}(\{a\}) \omega_{\mathcal{A}}^{2n'}(\{b\})$ и т. д. В каждом из соединений $\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(\{a\}) \omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(\{b\})$ пронумеруем символы таким образом, чтобы последний символ $\omega_{\mathcal{A}}^{kn'}(\{a\})$ имел номер 0. По определению a и b последовательность этих соединений — возрастающая в обе стороны последовательность слов, а ее объединение — бесконечная в обе стороны последовательность символов из Z . Обозначим ее через $x(i, j, m, n')$. Рассмотрим слабое замыкание (в пространстве всех бесконечных в обе стороны последовательностей) траектории $x(i, j, m, n')$ относительно двустороннего сдвига. Обозначим его через $X_{\mathcal{A}}$. *Автоморфизмом подстановки* будем называть сдвиг $T: X_{\mathcal{A}} \rightarrow X_{\mathcal{A}}$. При условии примитивности $G_{\mathcal{A}}$ $X_{\mathcal{A}}$ не зависит от выбора порождающей четверки. Известно, что T — строго эргодичен [5].

Определенный в [1, 2] стационарный автоморфизм или адическое преобразование, о котором речь идет ниже, — это тоже символическая динамическая система, однако с иным действием. Пусть снова $Z = \{1, \dots, n\}$ — алфавит, $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ — матрица переходов. Будет считать, что все π_{ij} равны 0 или 1 и что Π примитивна. Адический автоморфизм действует в марковском компакте — пространстве Ω_{Π} бесконечных в одну сторону путей $x_0, x_1, \dots, x_i \in Z$ ($i = 0, 1, \dots$) таких, что $\pi_{x_i x_{i+1}} = 1$. Действие описывается в [1] и [2].

2. По матрице Π адического преобразования строится совокупность слов, аналогичная совокупности слов, определяющей подстановку: $\mathcal{A}_{\Pi} = \{A_i\}_1^n$, где A_i — слово, символы которого есть номера всех ненулевых символов i -го столбца матрицы Π , перечисляемые в порядке возрастания [3].

Подстановка, построенная по \mathcal{A}_{Π} , как и в п. 1, в широком классе случаев метрически изоморфна самому адическому преобразованию.

Для подстановки ниже будут описаны конструкции, ставящие ей в соответствие метрически изоморфные ей адические или обобщенные адические преобразования.

Зафиксировав подстановку (т. е. Z и \mathcal{A}), назовем *допустимой* всякую последовательность, принадлежащую пространству $X_{\mathcal{A}}$ (см. выше); $X_{\mathcal{A}} \ni x = \{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Будем говорить, что подстановка удовлетворяет условию ОДД — однозначной допустимой декодируемости, если всякая допустимая последовательность из $X_{\mathcal{A}}$ единственным образом представляется в виде объединения $\dots A_{i_k} A_{i_{k+1}} \dots$ такого, что $b_0 \in A_{i_0}$ и $\dots i_k i_{k+1} \dots$ тоже допустима. Последовательность $\dots i_k i_{k+1} \dots$ тоже имеет только одно допустимое декодирование по приведенному определению и т. д.

Вполне вероятно, что всякая нециклическая [6] подстановка такова (см. также [9, 10, 12]). Условие ОДД будет предполагаться выполненным.

По набору слов \mathcal{A} строятся две динамические системы типа адического преобразования. Для каждого слова $A_i \in \mathcal{A}$ и любого входящего в него символа j пронумеруем все вхождения символа в том порядке, в каком они встречаются в слове $j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(k)}$. Символ с номером назовем *отмеченным* символом. Через $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ обозначим пространство бесконечных в одну сторону последовательностей отмеченных символов (путей) вида $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots, y_s \in Z$ таких, что при каждом $s > 0$ отмеченный символ $y_{s-1}^{(i_{s-1})}$ соответствует i_{s-1} -му вхождению символа y_{s-1} в слово A_{y_s} .

Преобразование $T_{\mathcal{A}}^1 : \Omega_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1$ определяем следующим образом. Если $A_{y_1} = a_1, \dots, a_r$ и символ, отвечающий $y_0^{(i_0)}$, имеет в слове A_{y_1} номер $s < r$, то $T_{\mathcal{A}}^1(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots) = a_{s+1}^j, y_1^{(i_1)}, y_2^{(i_2)}, \dots$, где для символа a_{s+1} тоже отмечен номер его вхождения j . Если $s = r$, то пусть l — наименьший номер > 0 такой, что символ, отвечающий $y_l^{(i_l)}$, не является последним в слове $A_{y_{l+1}} = b_1, \dots, b_{r'}$, а имеет в нем номер $s' < r'$ (для всех точек, кроме конечного множества $l < \infty$). Тогда

$$T_{\mathcal{A}}^1(y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots) = z_0^{(1)}, z_1^{(1)}, \dots, z_l^{(j)}, y_{l+1}^{(j_{l+1})}, y_{l+2}^{(j_{l+2})},$$

где $z_l = b_{s'+1}$ (j — тоже номер вхождения), каждый из $z_i^1, i < l$, является первым в слове $A_{z_{i+1}}$ ($A_{z_{i+1}}$ не зависит от номера вхождения z_{i+1} в следующее слово). С его помощью в пространстве путей можно определить частич-

ное упорядочение, аналогичное лексикографическому в марковском компакте. Путь $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если существует $m > 0$ такое, что $\Gamma_1 = T_{\mathcal{A}}^{1m} \Gamma_2$. Ясно, что сравнимы таким же образом и конечные пути, имеющие одинаковую длину и одинаковый конец.

Пусть снова \mathcal{A} определяет подстановку, и опишем два множества: $X'_{\mathcal{A}} \subset X_{\mathcal{A}}$ и $\Omega'_{\mathcal{A}} \subset \Omega_{\mathcal{A}}$, каждое из которых является дополнением счетного инвариантного множества, а также взаимнооднозначное соответствие между ними: $\varphi: X'_{\mathcal{A}} \rightarrow \Omega'_{\mathcal{A}}; T_{\mathcal{A}}^1 \circ \varphi = \varphi \circ T$.

Пусть $U_{\mathcal{A}} \subset X_{\mathcal{A}}$ — множество всех $x(i, j, m, n')$, где (i, j, m, n') — порождающая четверка (см. определение подстановки). $U_{\mathcal{A}}$ конечно, хотя множество порождающих четверок счетно. $X'_{\mathcal{A}}$ определим как $X_{\mathcal{A}} - \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i(U_{\mathcal{A}})$, $\Omega'_{\mathcal{A}}$ — как множество таких путей $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots, y_k^{(i_k)}, \dots$, где для бесконечного множества номеров k символ $y_{k-1}^{(i_{k-1})}$ — не первый в слове A_{y_k} и для бесконечного множества номеров k символ $y_{k-1}^{(i_{k-1})}$ — не последний в слове A_{y_k} .

Если $x \in X'_{\mathcal{A}}$, $x = \dots b_{-k}, \dots, b_0, \dots, b_k, \dots$, т.е., как легко видеть, существует единственная (отвечающая последовательным допустимым декодированиям) последовательность элементов $Z: y_0, y_1, y_2, \dots$, где $b_0 = y_0$, y_0 — символ слова $\omega_{\mathcal{A}}(y_1) = A_{y_1}$, y_k — символ слова $\omega_{\mathcal{A}}(y_{k+1}) = A_{y_{k+1}}$ и т. д., для бесконечного множества номеров k y_k — не первый символ $A_{y_{k+1}}$ и для бесконечного множества номеров k — не последний (в противном случае $x \in \bigcup_{-\infty}^{\infty} T^i U_{\mathcal{A}}$). В качестве $\varphi(x)$ берем путь $y_0^{(i_0)}, y_1^{(i_1)}, \dots$ с фиксацией номеров вхождения символов y_k в слова $\omega(y_{k+1})$. Очевидно, что φ биективно и измеримо по любой вероятностной борелевской инвариантной мере. Из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение:

$T_{\mathcal{A}}^1$ имеет единственную борелевскую инвариантную вероятностную меру, и φ является метрическим изоморфизмом между T и $T_{\mathcal{A}}^1$.

Тем самым мы дали определение одноэргодичности для не всюду определенного отображения $T_{\mathcal{A}}^1$ (естественно обобщаемое для произвольных адических отображений). Специфично и определение минимальности — дол-

жна требоваться всюду плотность всех элементов разбиения на траектории, что в нашем случае имеет место.

Заметим, что для адического преобразования с матрицей Π имеет место равенство $(\Omega_{\Pi}, T) = (\Omega_{\mathcal{A}\Pi}^1, T_{\mathcal{A}\Pi}^1)$, которое можно считать попросту определением адического преобразования. Если подстановка с набором слов \mathcal{A}_{Π} удовлетворяет требованию ОДД, то она метрически изоморфна (Ω_{Π}, T) .

Определим теперь динамическую систему $T_{\mathcal{A}}^2: \Omega_{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^2$, точнее, класс эквивалентных определяющих ее адических преобразований.

Пусть $N = \sum_1^n |A_i|$. Приведем элементы алфавита $Z' = \{1, \dots, N\}$ во взаимно однозначное соответствие с множеством пар натуральных чисел вида (f, g) , где $1 \leq f \leq n$, $1 \leq g \leq |A_f|$: $l \rightarrow \{f_l, g_l\}$, $1 \leq l \leq N$. К соответствию будем предъявлять единственное требование: для каждого $q: 1 \leq q \leq n$ на множестве $\{(q, s); 1 \leq s \leq |A_q|\}$ соответствие должно быть строго монотонным по s . Определим матрицу

$$\Pi = \{\pi_{ij}\}_{i,j=1}^N = \begin{cases} \pi_{ij} = 1, & \text{если в слове } A_{f_j} \text{ символом с номером } g_i \\ & \text{является } f_i, \\ \pi_{ij} = 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве $\Omega_{\mathcal{A}}^2$ примем марковский компакт Ω_{Π} .

Динамическая система $T_{\mathcal{A}}^2: \Omega_{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^2$ определяется как адическое преобразование марковского компакта Ω_{Π} . Это определение корректно, потому что с точностью до тривиального изоморфизма, являющегося гомеоморфизмом, наша динамическая система не зависит от выбора соответствия, определяющего Π . Впрочем, можно считать, что мы имеем дело не с классом изоморфных динамических систем, а с адическим преобразованием, если в определении адического преобразования требовать упорядоченности не всего пространства состояний Z' , а каждого из подмножеств вида $Y_q \subset Z': y_q = \{s \in Z' \mid \pi_{sq} = 1\}$, $1 \leq q \leq N$. Ясно также, что все эти преобразования эквивалентны $T_{\mathcal{A}}^1: \Omega_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1$.

Пусть T — подстановочный автоморфизм, построенный по подстановке, определяемой набором слов \mathcal{A} , или адический автоморфизм, определяемый матрицей Π . Обоз-

начим через $f_T(t) = t^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i$ характеристический полином матрицы $G_{\mathcal{A}}$ (соответственно матрицы Π). Дальнейшие рассуждения будут проводиться для случая (более общего) преобразования $T_{\mathcal{A}}^1: \Omega_{\mathcal{A}}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{A}}^1$, являющегося при выполнении ОДД обобщенным адическим представлением подстановочного преобразования.

Сформулируем очевидное утверждение. Пусть $P_1 = = y_0^{(i_0)}, \dots, y_l$ и $P_2 = z_0^{(j_0)}, \dots, z_l$ — два пути длины l , причем

$$y_0 = z_0, \quad y_l = z_l, \quad P_1 < P_2. \quad (1)$$

Определим последовательность натуральных чисел $N_m(P_1, P_2)$ следующим образом: для любой принадлежащей $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ последовательности (пути) $x_0^{(s_0)}, \dots, x_m^{(s_m)}, y_0^{(i_0)}, \dots, y_l^{(i_l)}, x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})}, \dots$ имеет место

$$\begin{aligned} T_{N_m(P_1, P_2)}(x_0^{(s_0)}, \dots, x_m^{(s_m)}, y_0^{(i_0)}, \dots, y_l^{(i_l)}, x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})}, \dots) = \\ = x_0^{(s_0)}, \dots, x_m^{(s_m)}, z_0^{(j_0)}, \dots, z_l^{(j_l)}, x_{m+l+2}^{(s_{m+l+2})}, \dots \end{aligned}$$

Ясно, что от выбора x_i число $N_m(P_1, P_2)$ не зависит. Наше утверждение состоит в том, что $N_m(P_1, P_2)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$N_{m+n}(P_1, P_2) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i N_{m+i}(P_1, P_2).$$

Сформулируем основную теорему работы.

ТЕОРЕМА. Пусть для подстановочного автоморфизма T с условием ОДД (для стационарного адического или обобщенного адического преобразования) все корни характеристического полинома $f_T(t)$ лежат вне круга $B = \{z \mid |z| < 1\}$ и существуют два пути P_1, P_2 одинаковой длины с условием (1) такие, что ни для какого номера m_0 при $m > m_0$ все $N_m(P_1, P_2)$ в совокупности не имеют общего делителя, большего единицы. Тогда соответствующий автоморфизм обладает слабым перемешиванием.

Доказательство теоремы. Теорема вытекает из приводимых ниже предложения и леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если последовательность целых чисел N_m удовлетворяет рекуррентному соотношению $N_{m+n} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i N_{m+i}$, где α_i — рациональные коэффициенты полинома $t^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i$ с корнями по модулю ≥ 1 , и не существует такого номера m_0 , начиная с которого все

N_m в совокупности имеют общий делитель > 1 , то не существует и такого нецелого λ , что

$$e^{2\pi i N_m \lambda} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1.$$

При доказательстве случай с рациональным λ рассматривается с помощью условия отсутствия общего делителя N_m , случай с иррациональным — по аналогии с [11, с. 166].

А именно, $N_m \lambda$ — последовательность, удовлетворяющая тому же рекуррентному соотношению; начиная с некоторого места, ему же удовлетворяет последовательность $\beta_m \rightarrow 0$, где $\beta_m = -R_m + N_m \lambda$ (R_m — ближайшее целое к $N_m \lambda$), что противоречит предположению о корнях полинома.

ЛЕММА. Если строго эргодическая подстановка (стационарный адический автоморфизм) с условием ОДД имеет собственное значение $e^{2\pi i \lambda}$ и P_1, P_2 — два пути одинаковой длины, удовлетворяющие (1), то

$$e^{2\pi i N_m(P_1, P_2)\lambda} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы. Из совместимости инвариантной меры с топологической структурой $\Omega_{\mathcal{A}}^1$ вытекает утверждение — аналог теоремы о «точках плотности» теории функций вещественной переменной.

Пусть $C \subset \Omega_{\mathcal{A}}^1$ — измеримое множество $\mu(C) > 0$. Тогда для почти всякой точки x существует последовательность цилиндрических множеств $V_1^x > \dots > V_j^x > \dots \ni x$, отвечающих путям, начинающимся в момент 1, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C \cap V_n^x) / \mu V_n^x = 1.$$

Из этого утверждения следует, что если U — собственная функция автоморфизма T с собственным значением $e^{2\pi i \lambda}$, то для произвольных положительных последовательностей $\epsilon_k \rightarrow 0$, $\delta_k \rightarrow 0$ можно выбрать последовательность множеств A_k , $\mu(A_k) > 0$, и цилиндров B_k таких, что колебание функции U на $A_k \leq \epsilon_k$ и

$$\mu(B_k \cap A_k) / \mu A_k > 1 - \delta_k.$$

Из примитивности $G_{\mathcal{A}}$ и свойств меры μ следует существование таких констант $D > 0$ и $M > 0$, что если Y_{m, P_i} — множество таких x , для которых координаты с $m + 2$

по $m + l + 2$ образуют путь P_i ($i = 1, 2$), то для любых n_1, n_2 с $n_2 - n_1 > M$ и любого пути B длины n_1 $\mu(Y_{n_2, P_i} \cap B) \geq D \mu B$, где B — цилиндрическое множество, соответствующее B .

Отсюда и из определения $N_m(P_1, P_2)$ следует, что если для цилиндра B_k длина пути, его порождающего, суть N_k и $D > 2\delta_k$, то при $m > N_k + M \mid e^{2\pi i N_m(P_1, P_2)\lambda} - 1 \mid \leq \varepsilon_k$.

Лемма и тем самым теорема доказаны.

В качестве примера может быть рассмотрена подстановка $0 \rightarrow 001 \ 1 \rightarrow 10110$ из работы [4], где несколько иной метод эквивалентной подстановки не дал возможности установить слабое перемешивание. Теорема настоящей работы применима для этого и наряду с методом [4] для других примеров [4]. Достаточно взять пути $P_1 = 0^10$ и $P_2 = 0^20$. В этом случае [4]

$$N_m(P_1, P_2) = \frac{1}{3} (2 \cdot 4^n + 1) \text{ (корни } f_T(t) \text{ суть } 1 \text{ и } 4).$$

Результаты о дискретном спектре подстановок (полученные несколько иным методом), из которых вытекает аналогичная теорема о слабом перемешивании, содержатся в работе [12], вышедшей, когда статья была сдана в печать. Методом, описанным в статье, может быть доказано и утверждение из [12] (полученное независимо автором) о том, что всякая измеримая собственная функция почти всюду совпадает с непрерывной функцией. Непрерывная собственная функция строится также путем продолжения с всюду плотной траектории с учетом аргумента о том, что сходимость в вышедшей лемме экспоненциальна, и очевидного для примитивной матрицы существования натурального M такого, что для любых двух бесконечных путей вида

$$x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n'}^{(i_{n'})}, y_1^{(k_1)}, y_2^{(k_2)}, \dots,$$

$$x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n'}^{(i_{n'})}, z_1^{(l_1)}, z_2^{(l_2)}, \dots$$

существуют две последовательности натуральных чисел $N_k, L_k, N_{k-1} < L_k < N_k < L_{k+1}, \mid N_{k+1} - N_k \mid, \mid L_{k+1} - L_k \mid <$

$\langle M$, и путь

$$x_1^{(i_1)}, \dots, x_{n'}^{(i_{n'})}, t_1^{(r_1)}, t_2^{(r_2)}, \dots \in \Omega_{\mathcal{A}}^1, \\ t_{N_k} = y_{N_k}, t_{L_k} = z_{L_k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ленинградское научно-производственное
объединение медицинской лабораторной
техники

Поступило
28.04.86
Переработанный вариант
11.04.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В е р ш и к А. М. Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения // ДАН СССР. 1981. Т. 259, № 3. С. 526—529.
- [2] В е р ш и к А. М. Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 72—82.
- [3] Л и в ш и ц А. Н. О спектрах адических преобразований марковских компактов // УМН. 1987. Т. 42, вып. 3. С. 189—190.
- [4] D e k k i n g F. M., K e a n e M. Mixing properties of substitutions // ZFW, 1978. V. 42. P. 23—33.
- [5] M i c h e l P. Coincidence values and spectra of substitutions // ZFW. 1978. V. 42. P. 205—207.
- [6] K a m a e T. A topological invariant of substitution minimal sets // Journ. Math. Soc. of Japan. 1972. V. 24, № 2. P. 285—305.
- [7] Г а н т м а х е р Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [8] G o t t s h a l k W. H. Substitutions minimal sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. P. 467—491.
- [9] M a r t i n J. C. Substitution minimal flows // Amer. Journ. of Math. 1971. V. 93, № 2. P. 503—526.
- [10] M a r t i n J. C. Minimal flows arising from substitutions of non-constant length // Math. Syst. Theor. March. 1973. V. 7, № 1. P. 73—82.
- [11] К а с с е л с Дж. В. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
- [12] H o s t B. Valeurs propres des systemes dynamiques definiés par des substitutions de longueur variable // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1986. V. 6. P. 529—540.