S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, Expansive Endomorphisms on the Infinite-Dimensional Torus, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 2020, Volume 54, Issue 4, 17–36

https://www.mathnet.ru/eng/faa3767

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 4, с. 17–36

УДК 517.926+517.938

Растягивающие эндоморфизмы на бесконечномерном торе[1]

© 2020. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассматривается некоторый естественный класс растягивающих эндоморфизмов $G \in C^1$, действующих из $\mathbb{T}^\infty$ в $\mathbb{T}^\infty$, где $\mathbb{T}^\infty$ — бесконечномерный тор (прямое произведение счетного числа окружностей с топологией равномерной покоординатной сходимости). Интересующие нас эндоморфизмы допускают представление в виде суммы линейного растягивающего отображения и периодической добавки. Устанавливаются следующие стандартные факты из гиперболической теории: топологическая сопряженность растягивающего эндоморфизма G из нашего класса с линейным эндоморфизмом тора, структурная устойчивость отображения G, справедливость для G на $\mathbb{T}^\infty$ свойства топологического перемешивания.

DOI: https://doi.org/10.1134/faa3767

§ 1. Постановка задачи и описание результатов

История развития гиперболической теории и основные ее достижения подробно описаны в обзоре [1] и монографиях [2], [3]. В настоящей статье некоторые результаты этой теории, касающиеся так называемых растягивающих отображений, распространяются на бесконечномерный случай.

Прежде всего, дадим соответствующие определения. В связи с этим рассмотрим банахово пространство ℓ_∞, состоящее из бесконечномерных векторов

$$\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots), \qquad \varphi_{(k)} \in \mathbb{R},\ k \geqslant 1,\ \sup_{k\geqslant 1} |\varphi_{(k)}| < \infty$$

(здесь и далее символом colon обозначаются различные вектор-столбцы). Считаем, что в ℓ_∞ задана произвольная норма, эквивалентная стандартной норме

$$\|\varphi\| = \sup_{k\geqslant 1} |\varphi_{(k)}|. \tag{1.1}$$

Следует сразу отметить, что в дальнейшем (если не оговорено противное) одним и тем же символом $\|\cdot\|$ будем обозначать как норму в ℓ_∞, так и индуцированные этой нормой операторные нормы (из контекста всегда будет ясно, о какой именно норме идет речь).

Бесконечномерным тором $\mathbb{T}^\infty$ назовем множество вида

$$\mathbb{T}^\infty = \{\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots) \in \ell_\infty : 0 \leqslant \varphi_{(k)} \leqslant 2\pi \ (\operatorname{mod} 2\pi),\ k \geqslant 1\}, \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10055).

снабженное метрикой

$$\rho(\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}}) = \inf_{l\in\mathbb{Z}^\infty} \|\overline{\varphi} - \overline{\overline{\varphi}} + 2\pi l\| \quad \text{для любых } \overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}} \in \mathbb{T}^\infty. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbb{Z}^\infty$ — целочисленная решетка

$$\{l = \mathrm{colon}(l_1, \dots, l_k, \dots) \in \ell_\infty : l_k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant 1\},$$

а в качестве $\overline{\varphi}$, $\overline{\overline{\varphi}}$ под знаком нормы фигурируют не сами точки $\overline{\varphi}, \overline{\overline{\varphi}} \in \mathbb{T}^\infty$, а их «поднятия» из $\mathbb{T}^\infty$ в ℓ_∞, для которых мы сохранили прежние обозначения. Поскольку упомянутые поднятия определяются с точностью до аддитивных добавок вида $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}^\infty$, то метрика (1.3) не зависит от их конкретного выбора. Заметим также, что в силу определения (1.1) сходимость по данной метрике совпадает с равномерной покоординатной сходимостью.

Далее, опишем необходимый в дальнейшем класс бесконечномерных матриц $\Lambda = (\lambda_{kj})_{k,j=1}^{\infty}$ с целочисленными элементами λ_{kj}. Будем считать, что в каждой строке любой из рассматриваемых матриц содержится лишь конечное число ненулевых элементов и выполнено условие

$$\sup_{k\geqslant 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{kj}| < \infty. \tag{1.4}$$

В этом случае, как нетрудно проверить, матрица Λ порождает в пространстве ℓ_∞ ограниченный линейный оператор. Предполагаем еще, что спектр $\sigma(\Lambda)$ этого оператора удовлетворяет требованию

$$\sigma(\Lambda) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}. \tag{1.5}$$

Любую матрицу с перечисленными свойствами назовем *растягивающей*, а совокупность всех таких матриц обозначим через $\mathrm{Lin}(\ell_\infty)$.

Заметим, что класс $\mathrm{Lin}(\ell_\infty)$ заведомо непуст. Простейшими его представителями являются так называемые диагональные матрицы

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_k, \dots\}, \tag{1.6}$$

где Λ_k — различные конечномерные блоки с целочисленными элементами, размерности которых ограничены при $k \to +\infty$. Предполагаем, естественно, что для матриц (1.6) выполнено условие (1.4). Считаем еще, что спектры $\sigma(\Lambda_k)$ матриц Λ_k таковы, что

$$\sigma(\Lambda_k) \subset \sigma_* \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\} \quad \text{для любого } k \geqslant 1. \tag{1.7}$$

Подчеркнем, что фигурирующее в (1.7) замкнутое и ограниченное множество $\sigma_* \subset \mathbb{C}$ фиксировано, т. е. не зависит от k. В этом случае спектр $\sigma(\Lambda)$ оператора (1.6), задающийся равенством

$$\sigma(\Lambda) = \overline{\bigcup_{k\geqslant 1} \sigma(\Lambda_k)}$$

(черта здесь означает замыкание), обладает свойством (1.5).

Для пояснения причин справедливости приведенной формулы для спектра оператора (1.6) обратим внимание, что любое значение $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\Lambda)$ принадлежит резольвентному множеству данного оператора. Действительно, в этом случае справедливо представление

$$(\lambda I - \Lambda)^{-1} = \operatorname{diag}\{(I_1\lambda - \Lambda_1)^{-1}, \ldots, (I_k\lambda - \Lambda_k)^{-1}, \ldots\},$$

где I — единичный оператор в ℓ_∞, I_k — единичные матрицы тех же размерностей, что и Λ_k. А поскольку очевидным образом

$$\sup_{k\geqslant 1} \|(I_k\lambda - \Lambda_k)^{-1}\| < \infty,$$

то оператор $(\lambda I - \Lambda)^{-1}$ заведомо ограничен в ℓ_∞.

Типовым примером матрицы вида (1.6) служит

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{m_1, \ldots, m_k, \ldots\}, \ \ m_k \in \mathbb{Z}, \ |m_k| \geqslant 2 \text{ при } k \geqslant 1, \ \sup_{k\geqslant 1} |m_k| < \infty. \tag{1.8}$$

Следует, однако, отметить, что класс $\mathrm{Lin}(\ell_\infty)$ не исчерпывается лишь диагональными матрицами. В качестве примера рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что спектр порожденного этой матрицей линейного оператора состоит из одной точки $\lambda = 2$.

Опишем теперь интересующий нас класс вектор-функций $g(\varphi)$, $\varphi \in \ell_\infty$, со значениями в ℓ_∞. Считаем, что все они непрерывны по $\varphi \in \ell_\infty$, их производные Фреше $g'(\varphi)$ непрерывны по $\varphi \in \ell_\infty$ в равномерной операторной топологии (т. е. в топологии операторной нормы на пространстве $L(\ell_\infty)$ ограниченных линейных операторов) и выполняются требования

$$\sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|g(\varphi)\| < \infty, \quad \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|g'(\varphi)\| < \infty, \quad g(\varphi + 2\pi l) \equiv g(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty. \tag{1.9}$$

Предполагаем также, что отображение

$$\varphi \mapsto g(\varphi) \tag{1.10}$$

вполне непрерывно в ℓ_∞ (напомним, что нелинейный оператор называется вполне непрерывным, если он непрерывен и переводит любое ограниченное множество в предкомпактное).

Совокупность вектор-функций с перечисленными свойствами обозначим через $C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$, а норму в пространстве $C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ зададим равенством

$$\|g\|_{C^1_{\mathrm{per}}} = \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|g(\varphi)\| + \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|g'(\varphi)\|. \tag{1.11}$$

В силу условий (1.9) правая часть из (1.11) заведомо конечна, а само пространство $C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$, как нетрудно убедиться, является банаховым.

Введенные выше пространства $\mathrm{Lin}(\ell_\infty)$ и $C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ порождают соответствующий класс отображений, действующих на торе (1.2). А именно, фиксируем произвольно $\Lambda \in \mathrm{Lin}(\ell_\infty)$ и $g(\varphi) \in C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ и рассмотрим отображение

$$G\colon \varphi \mapsto G(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi) \pmod{2\pi}, \tag{1.12}$$

где вектор $\Lambda\varphi+g(\varphi) \pmod{2\pi}$ представляет собой естественную проекцию исходного вектора $\Lambda\varphi + g(\varphi)$ из ℓ_∞ на тор $\mathbb{T}^\infty$. Иными словами,

$$\Lambda\varphi + g(\varphi) \pmod{2\pi} = p(\Lambda\varphi + g(\varphi)), \tag{1.13}$$

где

$$p(\varphi) = \mathrm{colon}\left(\varphi_{(1)} - 2\pi\left\lfloor\frac{\varphi_{(1)}}{2\pi}\right\rfloor, \ldots, \varphi_{(k)} - 2\pi\left\lfloor\frac{\varphi_{(k)}}{2\pi}\right\rfloor, \ldots\right) \in \mathbb{T}^\infty$$
$$\text{для любого } \varphi = \mathrm{colon}(\varphi_{(1)}, \ldots, \varphi_{(k)}, \ldots) \in \ell_\infty, \tag{1.14}$$

а через $\lfloor\,\cdot\,\rfloor$ обозначена целая часть числа.

Отдельно остановимся на известных определениях растягивания, структурной устойчивости и топологического перемешивания (см., например, [2], [3]), адаптированных к нашему случаю. В связи с этим введем в рассмотрение линейный оператор $DG(\varphi) = \Lambda + g'(\varphi)\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ (дифференциал), а также операторы $D(G^n(\varphi))$, $n \in \mathbb{N}$, задающиеся равенствами

$$D(G^n(\varphi)) = DG(\varphi_{n-1}) \circ DG(\varphi_{n-2}) \circ \cdots \circ DG(\varphi_0), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.15}$$

где $\varphi_j = G^j(\varphi)$, $j \geqslant 0$. Обратим внимание, что формула (1.15) вытекает из известного цепного правила дифференцирования сложного отображения, примененного к C^1-гладкому оператору $G^n(\varphi)$.

Определение 1.1. Будем говорить, что отображение (1.12) — *растягивающий эндоморфизм*, если найдутся такие постоянные $c > 0$, $\mu > 1$, что

$$\|D(G^n(\varphi))\xi\| \geqslant c\mu^n\|\xi\| \quad \text{для любых } \varphi \in \mathbb{T}^\infty,\ \xi \in \ell_\infty \text{ и } n \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Следует особо отметить, что вопрос о представлении произвольного растягивающего отображения G бесконечномерного тора в виде суммы линейного ограниченного оператора и периодической добавки является открытым. В связи с этим мы сознательно ограничили наше рассмотрение содержательным подклассом растягивающих эндоморфизмов, имеющих вид (1.12). Связано это с двумя обстоятельствами. Во-первых, и это главное, только для таких эндоморфизмов удается установить приводимые ниже классические результаты о топологической сопряженности, структурной устойчивости и топологическом перемешивании. Во-вторых, введенный нами класс эндоморфизмов позволяет привести и проанализировать некоторые конкретные примеры растягивающих эндоморфизмов. В связи с последним обстоятельством мы, в частности, предполагаем, что фигурирующий в (1.12) линейный оператор Λ допускает матричное представление. Хотя от этого требования можно и отказаться, считая, что Λ — произвольный ограниченный в ℓ_∞ линейный оператор, преобразующий в себя целочисленную решетку $\mathbb{Z}^\infty$ и удовлетворяющий требованию (1.5).

Определение 1.2. Отображение (1.12) назовем C^1*-структурно устойчивым*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой функции $\Delta(\varphi) \in C^1_{\text{per}}(\ell_\infty)$, $\|\Delta\|_{C^1_{\text{per}}} < \varepsilon$, соответствующее возмущенное отображение

$$G_\Delta\colon \varphi \mapsto G_\Delta(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi) + \Delta(\varphi) \pmod{2\pi} \tag{1.17}$$

топологически сопряжено с невозмущенным отображением G.

Определение 1.3. Отображение (1.12) является C^1*-сильно структурно устойчивым*, если, во-первых, оно C^1-структурно устойчиво и, во-вторых, найдется такое $\varepsilon > 0$, что при всех $\Delta \in C^1_{\text{per}}(\ell_\infty)$, $\|\Delta\|_{C^1_{\text{per}}} < \varepsilon$, определено семейство гомеоморфизмов $\tau_\Delta\colon \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}^\infty$ со следующими свойствами:

$$G_\Delta = \tau_\Delta^{-1} \circ G \circ \tau_\Delta, \quad \tau_\Delta \to \mathrm{id}, \quad \tau_\Delta^{-1} \to \mathrm{id} \quad \text{при } \|\Delta\|_{C^1_{\text{per}}} \to 0. \tag{1.18}$$

Здесь id — тождественный оператор на торе $\mathbb{T}^\infty$, а сходимость предполагается равномерной по $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$.

Определение 1.4. Свойство *топологического перемешивания* означает существование для любых двух непустых открытых множеств $U, V \subset \mathbb{T}^\infty$ такого натурального $n_0 = n_0(U, V)$, что $G^n(U) \cap V \neq \varnothing$ при всех $n \geqslant n_0$.

Как оказывается, для введенного нами класса отображений (1.12) сохраняется известный результат Шуба [4], состоящий в следующем.

Теорема 1.1. *Предположим, что эндоморфизм* (1.12) *является растягивающим. Тогда он топологически сопряжен со своей линейной частью, т.е. с линейным эндоморфизмом*

$$L\colon \varphi \mapsto \Lambda\varphi \pmod{2\pi}. \tag{1.19}$$

Из сформулированной теоремы, представляющей собой основной результат данной статьи, нетрудно получить C^1-структурную устойчивость любого растягивающего отображения G. Однако, как показывает дополнительный анализ, справедливо и более сильное утверждение.

Теорема 1.2. *Каждый растягивающий эндоморфизм* (1.12) *тора* (1.2) *обладает свойством C^1-сильной структурной устойчивости.*

Еще одним стандартным свойством, присущим растягивающим отображениям, является топологическое перемешивание. В бесконечномерном случае указанное свойство сохраняется. А именно, имеет место следующая

Теорема 1.3. *В рамках условий теоремы* 1.1 *эндоморфизм* (1.12) *является топологически перемешивающим.*

Доказательства приведенных теорем содержатся в §2. При обосновании теоремы 1.1 используется подход, основанный на методах функционального анализа. Суть этого подхода состоит в том, что, во-первых, сначала определяется полусопрягающий эндоморфизм как неподвижная точка некоторого нелинейного оператора в соответствующем функциональном пространстве; во-вторых, отдельно устанавливается, что полученный на этом пути эндоморфизм на самом деле есть гомеоморфизм, сопрягающий отображения (1.12) и (1.19).

В случае теоремы 1.2 ситуация аналогичная. При ее обосновании выявляется характер зависимости упомянутого выше сопрягающего гомеоморфизма от периодической добавки $g(\varphi)$, что, в свою очередь, сводится к анализу некоторых функциональных уравнений. Что же касается теоремы 1.3, то она вытекает из теоремы 1.1 и из свойства топологического перемешивания для растягивающего линейного эндоморфизма (1.19) (наличие такого свойства у отображения (1.19) проверяется отдельно).

§ 2. Обоснование результатов

2.1. Доказательство теоремы 1.1. Во всех дальнейших построениях существенную роль играет отображение

$$\widetilde{G}\colon \varphi \mapsto \widetilde{G}(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi), \tag{2.1}$$

действующее из ℓ_∞ в ℓ_∞ и являющееся поднятием эндоморфизма (1.12) из $\mathbb{T}^\infty$ в ℓ_∞. А именно, нам потребуется следующая

Лемма 2.1. *При выполнении условий теоремы 1.1 оператор (2.1) диффеоморфно отображает пространство ℓ_∞ на ℓ_∞ и удовлетворяет неравенствам*

$$\|\widetilde{G}^n(\varphi_1) - \widetilde{G}^n(\varphi_2)\| \geqslant c\mu^n\|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty \text{ и } n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

где c, μ — постоянные из (1.16).

Доказательство. Убедимся сначала в том, что $\widetilde{G}$ отображает ℓ_∞ на все пространство ℓ_∞. В связи с этим фиксируем произвольно элемент $z \in \ell_\infty$, рассмотрим уравнение $\widetilde{G}(\varphi) = z$ и выполним в нем замену $\varphi = \Lambda^{-1}z + \Delta$ (в силу условия (1.5) на спектр оператора Λ обратный оператор Λ^{-1} заведомо существует). В результате для отыскания Δ приходим к уравнению вида

$$\Delta = -\Lambda^{-1}g(\Lambda^{-1}z + \Delta). \tag{2.3}$$

Опираясь на свойства (1.9) и тот факт, что оператор (1.10) вполне непрерывен, заключаем, что по переменной Δ правая часть уравнения (2.3) порождает в ℓ_∞ волне непрерывный оператор, преобразующий в себя шар с центром в нуле радиуса

$$r = \|\Lambda^{-1}\| \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|g(\varphi)\|.$$

Таким образом, в силу принципа Шаудера упомянутое уравнение допускает хотя бы одно решение $\Delta \in \ell_\infty$, а значит, справедливо соотношение $\widetilde{G}(\ell_\infty) = \ell_\infty$.

Покажем теперь, что при любом $\varphi \in \ell_\infty$ непрерывно обратим дифференциал $D\widetilde{G}(\varphi)\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ отображения (2.1). В связи с этим привлечем вытекающие из (1.13) равенства

$$D\widetilde{G}(\varphi) = DG(p(\varphi)), \quad G^n(p(\varphi)) = p(\widetilde{G}^n(\varphi)) \quad \text{для любых } \varphi \in \ell_\infty \text{ и } n \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

где p — проекция (1.14). Подставляя, далее, соотношения (2.4) в (1.15), (1.16), приходим к выводу, что условие растягивания (1.16) эквивалентно требованию

$$\|D\widetilde{G}(\varphi_{n-1})\circ D\widetilde{G}(\varphi_{n-2})\circ\cdots\circ D\widetilde{G}(\varphi_0)\xi\| \geqslant c\mu^n\|\xi\| \quad \text{для любых } \varphi\in\ell_\infty,\ \xi\in\ell_\infty \text{ и } n\in\mathbb{N}, \tag{2.5}$$

где $\varphi_j = \widetilde{G}^j(\varphi)$, $j\geqslant 0$.

При $n=1$ неравенство (2.5) приобретает вид

$$\|\Lambda(I+A(\varphi))\xi\| \geqslant c\mu\|\xi\| \quad \text{для любых } \varphi\in\ell_\infty \text{ и } \xi\in\ell_\infty, \tag{2.6}$$

где $A(\varphi)=\Lambda^{-1}g'(\varphi)$ и I — единичный оператор в ℓ_∞. В свою очередь, из (2.6) следует, что число $\lambda=-1$ заведомо не является собственным значением оператора $A(\varphi)$. А так как отображение (1.10) вполне непрерывно, то данный оператор компактен, а значит, указанное значение регулярно для $A(\varphi)$. Таким образом, уравнение $D\widetilde{G}(\varphi)\xi = z$ при любом $z\in\ell_\infty$ имеет единственное решение $\xi=(I+A(\varphi))^{-1}\Lambda^{-1}z\in\ell_\infty$, что и доказывает непрерывную обратимость оператора $D\widetilde{G}(\varphi)$.

Итак, мы установили, что оператор $\widetilde{G}$ отображает ℓ_∞ на ℓ_∞ и представляет собой локальный диффеоморфизм (это вытекает из обратимости дифференциала $D\widetilde{G}(\varphi)$ и теоремы о неявном отображении). Согласно известным результатам Банаха и Мазура (см. [5], [6]), если в дополнение к указанным свойствам отображение $\widetilde{G}$ является собственным (т. е. прообраз $\widetilde{G}^{-1}(Y)$ любого компактного множества Y компактен), то оно будет и глобальным диффеоморфизмом из ℓ_∞ в ℓ_∞. Следовательно, в проверке нуждается факт компактности множества $\widetilde{G}^{-1}(Y)$ при любом компактном множестве $Y\subset\ell_\infty$.

Фиксируем произвольно компакт $Y\subset\ell_\infty$ и бесконечную последовательность точек $x_n\in\widetilde{G}^{-1}(Y)$, $n\geqslant 1$. Без ограничения общности можно считать, что соответствующая последовательность $y_n=\Lambda x_n+g(x_n)\in Y$ сходится при $n\to+\infty$ к некоторому элементу $y_*\in Y$. Принимая во внимание этот факт, из соотношения

$$x_n=\Lambda^{-1}y_n-\Lambda^{-1}g(x_n) \tag{2.7}$$

и свойств (1.9) заключаем, что последовательность x_n ограничена. А поскольку оператор (1.10) компактен, то из последовательности $g(x_n)$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем предполагать, что имеет место сходимость $g(x_n)\to z_*\in\ell_\infty$, $n\to+\infty$. Тогда, опираясь на формулу (2.7) и свойство непрерывности вектор-функции $g(\varphi)$, последовательно выводим:

$$x_n\to x_*=\Lambda^{-1}y_*-\Lambda^{-1}z_*,\quad g(x_n)\to g(x_*)=z_*,\quad n\to+\infty,\quad \Lambda x_*+g(x_*)=y_*.$$

Тем самым установлено включение $x_*\in\widetilde{G}^{-1}(Y)$, доказывающее компактность множества $\widetilde{G}^{-1}(Y)$.

Для завершения доказательства леммы остается убедиться в справедливости неравенств (2.2). В связи с этим введем в рассмотрение дифференциалы $D(\widetilde{G}^{-n}(\varphi))$, $n\in\mathbb{N}$, задающиеся аналогичными формулам (1.15) формулами

$$D(\widetilde{G}^{-n}(\varphi))=[D\widetilde{G}(\varphi_{-n})]^{-1}\circ[D\widetilde{G}(\varphi_{-(n-1)})]^{-1}\circ\dots\circ[D\widetilde{G}(\varphi_{-1})]^{-1},\qquad n\in\mathbb{N}, \tag{2.8}$$

где $\varphi_j=\widetilde{G}^j(\varphi)$, $j\in\mathbb{Z}$. Полагая, далее, в (2.5)

$$\xi=[D\widetilde{G}(\varphi_0)]^{-1}\circ[D\widetilde{G}(\varphi_1)]^{-1}\circ\dots\circ[D\widetilde{G}(\varphi_{n-1})]^{-1}\overline{\xi},\qquad \overline{\xi}\in\ell_\infty, \tag{2.9}$$

и учитывая соотношения (2.8), приходим к выводу, что

$$\|D(\widetilde{G}^{-n}(\widetilde{G}^n(\varphi)))\overline{\xi}\|\leqslant\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\mu}\right)^n\|\overline{\xi}\|\quad\text{для любого } n\in\mathbb{N}. \tag{2.10}$$

А отсюда в силу произвольности $\varphi\in\ell_\infty$ и $\overline{\xi}\in\ell_\infty$ последовательно заключаем, что

$$\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|D(\widetilde{G}^{-n}(\varphi))\|\leqslant\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\mu}\right)^n\quad\text{для любого } n\in\mathbb{N},$$
$$\|\widetilde{G}^{-n}(\varphi_1)-\widetilde{G}^{-n}(\varphi_2)\|\leqslant\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\mu}\right)^n\|\varphi_1-\varphi_2\|\quad\text{для любых } \varphi_1,\varphi_2\in\ell_\infty \text{ и } n\in\mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Что же касается требуемых оценок (2.2), то они — очевидные следствия неравенств (2.11). Лемма 2.1 полностью доказана.

Еще одно свойство вспомогательного отображения (2.1), которое нам потребуется в дальнейшем, связано с линейным оператором $\widetilde{L}\colon\ell_\infty\to\ell_\infty$ вида

$$\widetilde{L}\colon\varphi\mapsto\Lambda\varphi, \tag{2.12}$$

где Λ — матрица из (1.12). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. *При выполнении условий теоремы* 1.1 *диффеоморфизм* (2.1) *топологически сопряжен со своей линейной частью, т.е. с отображением* (2.12).

Доказательство. Построим сначала полусопрягающее непрерывное отображение

$$\varkappa\colon\varphi\mapsto\varkappa(\varphi)=\varphi+\widetilde{\varkappa}(\varphi),\quad \widetilde{\varkappa}(\varphi+2\pi l)\equiv\widetilde{\varkappa}(\varphi)\quad\text{для любого } l\in\mathbb{Z}^\infty, \tag{2.13}$$

удовлетворяющее соотношению

$$\varkappa\circ\widetilde{G}=\widetilde{L}\circ\varkappa. \tag{2.14}$$

Используя явные выражения для $\widetilde{G}$, $\varkappa$, $\widetilde{L}$ (см. (2.1), (2.12), (2.13)), перепишем равенство (2.14) в виде

$$\widetilde{\varkappa}(\varphi)=\Lambda^{-1}[g(\varphi)+\widetilde{\varkappa}(\widetilde{G}(\varphi))]. \tag{2.15}$$

При анализе получившегося уравнения нам потребуется полное метрическое пространство $\mathscr{H}$, элементами которого являются вектор-функции $\widetilde{\varkappa}(\varphi)$ со значениями в ℓ_∞, обладающие свойствами

$$\widetilde{\varkappa}(\varphi+2\pi l)\equiv\widetilde{\varkappa}(\varphi)\quad \text{для любого } l\in\mathbb{Z}^\infty,\qquad \sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|\widetilde{\varkappa}(\varphi)\|<\infty. \tag{2.16}$$

Кроме этого, предполагаем, что вполне непрерывен в пространстве ℓ_∞ оператор

$$\varphi\mapsto\widetilde{\varkappa}(\varphi). \tag{2.17}$$

Метрику в $\mathscr{H}$ зададим соотношением

$$\rho(\widetilde{\varkappa}_1,\widetilde{\varkappa}_2)=\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|\widetilde{\varkappa}_1(\varphi)-\widetilde{\varkappa}_2(\varphi)\|_*\quad \text{для любых } \widetilde{\varkappa}_1,\widetilde{\varkappa}_2\in\mathscr{H}. \tag{2.18}$$

Здесь $\|\cdot\|_*$ — специальная норма в ℓ_∞, такая, что соответствующая индуцированная норма $\|\Lambda^{-1}\|_*$ оператора Λ^{-1} строго меньше единицы. Согласно предполагаемым спектральным свойствам оператора Λ (см. (1.5)), указанная норма заведомо существует и эквивалентна исходной норме (1.1).

Опираясь на свойства (1.9), (2.16), формулу (2.18) и на тот факт, что отображения (1.10), (2.17) вполне непрерывны, убеждаемся в том, что введенное пространство $\mathscr{H}$ действительно является полным, а оператор, порожденный правой частью равенства (2.15), переводит $\mathscr{H}$ в себя и оказывается сжимающим (с константой сжатия $q=\|\Lambda^{-1}\|_*<1$). Таким образом, уравнение (2.15) допускает единственное решение $\widetilde{\varkappa}_*(\varphi)\in\mathscr{H}$.

Из проделанных построений следует, что функция

$$\widetilde{\varkappa}(\varphi)=\widetilde{\varkappa}_*(\varphi) \tag{2.19}$$

обладает свойствами (2.16), а отвечающее ей отображение (2.17) вполне непрерывно в ℓ_∞. Кроме этого, по построению функция (2.19) является решением уравнения (2.15). Тем самым мы нашли требуемое отображение (2.13), удовлетворяющее условию полусопряженности (2.14).

Покажем, что отображение (2.13) представляет собой гомеоморфизм пространства ℓ_∞. Для этого фиксируем произвольно вектор $\overline{\varphi}\in\ell_\infty$ и рассмотрим уравнение $\varkappa(\varphi)=\overline{\varphi}$ относительно $\varphi\in\ell_\infty$. Подставляя в него $\varphi=\overline{\varphi}+\psi$, для отыскания $\psi\in\ell_\infty$, в свою очередь, приходим к уравнению $\psi=-\widetilde{\varkappa}(\overline{\varphi}+\psi)$. Остается заметить, что в силу свойств (2.16) и того, что отображение (2.17) вполне непрерывно, правая часть получившегося уравнения порождает по переменной $\psi\in\ell_\infty$ нелинейный вполне непрерывный оператор, переводящий в себя замкнутый шар из ℓ_∞ с центром в нуле радиуса

$$r=\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|\widetilde{\varkappa}(\varphi)\|.$$

Таким образом, согласно теореме Шаудера, это уравнение допускает хотя бы одно решение $\psi\in\ell_\infty$.

Итак, мы установили, что $\varkappa(\ell_\infty)=\ell_\infty$. Далее, нетрудно видеть, что отображение (2.13) собственное (см. аналогичный фрагмент доказательства леммы 2.1). Следовательно, для проверки того, что (2.13) — гомеоморфизм, достаточно убедиться во взаимной однозначности данного отображения.

Предположим противное: найдутся такие $\varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, для которых $\varkappa(\varphi_1) = \varkappa(\varphi_2)$. Рассмотрим затем последовательности $\varphi_n^j = \widetilde{G}^n(\varphi_j)$, $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$, и заметим, что вследствие вытекающих из свойства (2.14) соотношений $\varkappa \circ \widetilde{G}^n = \widetilde{L}^n \circ \varkappa$, $n \geqslant 1$, справедлива цепочка равенств

$$\varkappa(\varphi_n^1) = \varkappa(\widetilde{G}^n(\varphi_1)) = \widetilde{L}^n(\varkappa(\varphi_1)) = \widetilde{L}^n(\varkappa(\varphi_2)) = \varkappa(\widetilde{G}^n(\varphi_2)) = \varkappa(\varphi_n^2). \tag{2.20}$$

Объединяя равенства (2.20) с формулами (2.13), (2.16), приходим к выводу, что

$$\|\varphi_n^1 - \varphi_n^2\| = \|\widetilde{\varkappa}(\varphi_n^2) - \widetilde{\varkappa}(\varphi_n^1)\| \leqslant 2 \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|\widetilde{\varkappa}(\varphi)\| < \infty. \tag{2.21}$$

Остается добавить, что свойство ограниченности (2.21) противоречит вытекающим из (2.2) соотношениям

$$\|\varphi_n^1 - \varphi_n^2\| \geqslant c\mu^n \|\varphi_1 - \varphi_2\| \to +\infty, \qquad n \to +\infty.$$

Подводя итог, отметим, что отображение (2.13) действительно является гомеоморфизмом из ℓ_∞ в ℓ_∞, а значит, операторы (2.1) и (2.12) топологически сопряжены. Лемма 2.2 доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению эндоморфизма

$$\overline{\varkappa}(\varphi) = p(\varkappa(p^{-1}(\varphi))), \qquad \varphi \in \mathbb{T}^\infty, \tag{2.22}$$

порожденного отображением $\varkappa$ на торе $\mathbb{T}^\infty$. Подчеркнем, что в качестве $p^{-1}(\varphi)$ здесь выступает любой прообраз точки $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$. А так как в силу (2.13) имеем

$$\varkappa(\varphi + 2\pi l) \equiv 2\pi l + \varkappa(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty, \tag{2.23}$$

то формула (2.22) заведомо корректна (т. е. не зависит от выбора конкретного прообраза $p^{-1}(\varphi)$).

Покажем, что (2.22) представляет собой гомеоморфизм тора $\mathbb{T}^\infty$. Предположим, напротив, существование таких точек $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, что $\overline{\varkappa}(\varphi_1) = \overline{\varkappa}(\varphi_2)$. Тогда в силу (2.22) имеем $p(\varkappa(p^{-1}(\varphi_1))) = p(\varkappa(p^{-1}(\varphi_2)))$ и, следовательно,

$$\varkappa(p^{-1}(\varphi_1)) = \varkappa(p^{-1}(\varphi_2)) + 2\pi l \tag{2.24}$$

при некотором $l \in \mathbb{Z}^\infty$. Далее, при анализе равенства (2.24) воспользуемся свойством (2.23). Учитывая данное свойство и факт взаимной однозначности отображения $\varkappa$, приходим к выводу, что

$$\varkappa(p^{-1}(\varphi_1)) = \varkappa(p^{-1}(\varphi_2) + 2\pi l), \qquad p^{-1}(\varphi_1) = p^{-1}(\varphi_2) + 2\pi l.$$

А это значит, что вопреки предполагаемому выше точки $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{T}^\infty$ совпадают. Полученное противоречие доказывает, что $\overline{\varkappa}$ — гомеоморфизм тора (1.2).

Обратим внимание, что по своему построению отображение (2.22) удовлетворяет условию полусопряженности, аналогичному условию (2.14):

$$\overline{\varkappa} \circ G = L \circ \overline{\varkappa},$$

где, напомним, L — линейный эндоморфизм (1.19). Таким образом, оно представляет собой искомый гомеоморфизм, сопрягающий отображения (1.12) и (1.19). Теорема 1.1 полностью доказана.

2.2. Доказательство теоремы 1.2. Обоснование факта C^1-сильной структурной устойчивости эндоморфизма (1.12) разбивается на три этапа. Сначала мы убедимся в том, что при достаточно малой по норме (1.11) добавке $\Delta(\varphi)$ из пространства $C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ отображение

$$\widetilde{G}_\Delta \colon \varphi \mapsto \widetilde{G}_\Delta(\varphi) = \Lambda\varphi + g(\varphi) + \Delta(\varphi), \tag{2.25}$$

являющееся поднятием отображения (1.17), представляет собой диффеоморфизм из ℓ_∞ в ℓ_∞. Затем проверим, что при малых $\Delta(\varphi) \in C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ для оператора (1.17) сохраняется свойство растягивания. И наконец, на заключительном третьем этапе установим существование гомеоморфизма $\tau_\Delta \colon \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}^\infty$ с требуемыми свойствами (1.18).

Для реализации первого из описанных выше этапов фиксируем произвольно элемент $\overline{\varphi} \in \ell_\infty$ и рассмотрим уравнение $\widetilde{G}_\Delta(\varphi) = \overline{\varphi}$ относительно $\varphi \in \ell_\infty$. Привлекая отображение (2.1), перепишем его в эквивалентной форме

$$\varphi = \widetilde{G}^{-1}(\overline{\varphi} - \Delta(\varphi)) \tag{2.26}$$

и убедимся в том, что оно имеет единственное решение $\varphi \in \ell_\infty$ при любом векторе $\overline{\varphi} \in \ell_\infty$.

При анализе уравнения (2.26) нам потребуется некоторая информация о вектор-функции $\widetilde{G}^{-1}(\varphi)$. Для ее получения объединим равенство (2.8) в случае $n = 1$ с вытекающим из (2.10) свойством ограниченности

$$q_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|(\Lambda + g'(\varphi))^{-1}\| < \infty.$$

Кроме того, будем считать добавку Δ в (2.25) настолько малой, что

$$q_1(\Delta) \overset{\mathrm{def}}{=} q_0 \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\Delta'(\varphi)\| < 1. \tag{2.27}$$

В результате приходим к оценкам

$$\begin{gathered} \|\widetilde{G}^{-1}(\varphi_1) - \widetilde{G}^{-1}(\varphi_2)\| \leqslant q_0\|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty, \\ \|\widetilde{G}^{-1}(\overline{\varphi} - \Delta(\varphi_1)) - \widetilde{G}^{-1}(\overline{\varphi} - \Delta(\varphi_2))\| \leqslant q_1(\Delta)\|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Неравенства (2.27), (2.28) и принцип сжимающих отображений гарантируют требуемую однозначную разрешимость уравнения (2.26). Таким образом, обратное отображение $\widetilde{G}_\Delta^{-1}$ существует и допускает представление вида

$$\widetilde{G}_\Delta^{-1}(\varphi) = \widetilde{G}^{-1}(\varphi) + \omega_\Delta(\varphi), \tag{2.29}$$

где непрерывная по $\varphi \in \ell_\infty$ добавка $\omega_\Delta(\varphi)$ такова, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}}\to 0} \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\omega_\Delta(\varphi)\| = 0. \tag{2.30}$$

Действительно, объединяя формулу

$$\omega_\Delta(\varphi)=\widetilde{G}^{-1}(\varphi-\Delta(\theta))\big|_{\theta=\widetilde{G}_\Delta^{-1}(\varphi)}-\widetilde{G}^{-1}(\varphi)$$

с первой оценкой из (2.28), приходим к выводу, что

$$\|\omega_\Delta(\varphi)\|\leqslant q_0\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|\Delta(\varphi)\|.$$

А отсюда требуемое предельное равенство (2.30) вытекает автоматически.

Покажем теперь, что при всех достаточно малых $\Delta(\varphi)\in C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ отображение (1.17) является растягивающим. Как было установлено в процессе доказательства теоремы 1.1, неравенства вида (1.16) для G_Δ эквивалентны аналогичным неравенствам (2.5) оценкам

$$\|D\widetilde{G}_\Delta(\varphi_{n-1})\circ D\widetilde{G}_\Delta(\varphi_{n-2})\circ\cdots\circ D\widetilde{G}_\Delta(\varphi_0)\xi\|\geqslant\widetilde{c}\,\widetilde{\mu}^n\|\xi\|$$
$$\text{для любых } \varphi\in\ell_\infty,\ \xi\in\ell_\infty \text{ и } n\in\mathbb{N},\tag{2.31}$$

где $\varphi_j=\widetilde{G}^j_\Delta(\varphi)$, $j\geqslant 0$, а постоянные $\widetilde{c}>0$, $\widetilde{\mu}>1$, вообще говоря, отличны от соответствующих констант c, μ из (1.16). В свою очередь, в силу соотношений вида (2.8), (2.9) (выписанных для $\widetilde{G}_\Delta(\varphi)$) требования (2.31) эквивалентны неравенствам

$$\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|D(\widetilde{G}^{-n}_\Delta(\varphi))\|\leqslant\frac{1}{\widetilde{c}}\left(\frac{1}{\widetilde{\mu}}\right)^n\quad\text{для любого } n\in\mathbb{N},\tag{2.32}$$

аналогичным неравенствам (2.10), (2.11).

Для доказательства оценок (2.32) предпримем некоторые дополнительные построения. Сначала, объединяя аналогичные формулам (2.8) явные формулы для дифференциалов $D(\widetilde{G}^{-n}_\Delta(\varphi))$ с установленными ранее свойствами (2.29), (2.30) обратного оператора $\widetilde{G}^{-1}_\Delta(\varphi)$, убеждаемся в том, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}}\to 0}\ \sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|D(\widetilde{G}^{-n}_\Delta(\varphi))\|=\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|D(\widetilde{G}^{-n}(\varphi))\|\tag{2.33}$$

при любом фиксированном $n\in\mathbb{N}$. Далее, выберем $n_0\in\mathbb{N}$ настолько большим, что

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{n_0}<1,\tag{2.34}$$

где c, μ — постоянные из (1.16). Тогда в силу (2.11), (2.33)

$$q_2(\Delta)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|D(\widetilde{G}^{-n_0}_\Delta(\varphi))\|\to\sup_{\varphi\in\ell_\infty}\|D(\widetilde{G}^{-n_0}(\varphi))\|<1,\qquad\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}}\to 0,$$

а значит, при всех достаточно малых $\Delta(\varphi)\in C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ справедливо неравенство

$$q_2(\Delta)<1.\tag{2.35}$$

Это неравенство представляет собой условие на выбор $\Delta(\varphi)$, которое наряду с (2.27) всюду ниже считаем выполненным.

Перейдем затем непосредственно к обоснованию требуемых оценок (2.32). С этой целью возьмем произвольное натуральное n и представим его в виде $n = kn_0 + r$, где $r \in \{0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$. Тогда при любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \ell_\infty$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{G}_\Delta^{-n}(\varphi_1) - \widetilde{G}_\Delta^{-n}(\varphi_2)\| &= \|\widetilde{G}_\Delta^{-kn_0}(\widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_1)) - \widetilde{G}_\Delta^{-kn_0}(\widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_2))\| \\ &\leqslant q_2^k(\Delta)\|\widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_1) - \widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_2)\| \\ &\leqslant q_2^{-(n_0-1)+n/n_0}(\Delta)\|\widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_1) - \widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi_2)\| \\ &\leqslant q_2^{-(n_0-1)+n/n_0}(\Delta) \sup_{\substack{\varphi\in\ell_\infty \\ r\in\{0,1,\ldots,n_0-1\}}} \|D(\widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi))\|\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|.\end{aligned}$$

А отсюда, поскольку φ_1, φ_2 произвольны, нужные неравенства (2.32) получаются с константами

$$\frac{1}{\widetilde{c}} = q_2^{-(n_0-1)}(\Delta) \sup_{\substack{\varphi\in\ell_\infty \\ r\in\{0,1,\ldots,n_0-1\}}} \|D(\widetilde{G}_\Delta^{-r}(\varphi))\|, \qquad \frac{1}{\widetilde{\mu}} = q_2^{1/n_0}(\Delta).$$

Остается лишь добавить, что, согласно (2.35), условие $\widetilde{\mu} > 1$ здесь справедливо автоматически.

Установленные факты свидетельствуют о том, что к оператору (1.17) применима теорема 1.1. Из этой теоремы следует, что отображения (1.12) и (1.17) топологически подобны линейному эндоморфизму (1.19). Поэтому и сами они топологически сопряжены. Таким образом, свойство C^1-структурной устойчивости (см. определение 1.2) для отображения (1.12) полностью обосновано.

Для доказательства более сильного варианта структурной устойчивости (см. определение 1.3) сначала необходимо изучить характер зависимости от Δ аналогичного отображению (2.13) отображения

$$\varkappa_\Delta \colon \varphi \mapsto \varkappa_\Delta(\varphi) = \varphi + \widetilde{\varkappa}_\Delta(\varphi), \quad \widetilde{\varkappa}_\Delta(\varphi + 2\pi l) \equiv \widetilde{\varkappa}_\Delta(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty, \tag{2.36}$$

удовлетворяющего уравнению

$$\varkappa_\Delta \circ \widetilde{G}_\Delta = \widetilde{L} \circ \varkappa_\Delta, \tag{2.37}$$

аналогичному соотношению (2.14).

Как и ранее, подставляя в (2.37) соотношения (2.12), (2.25), (2.36), для отыскания $\widetilde{\varkappa}_\Delta(\varphi)$ получаем аналогичное (2.15) уравнение

$$\widetilde{\varkappa}_\Delta(\varphi) = \Lambda^{-1}[g(\varphi) + \Delta(\varphi) + \widetilde{\varkappa}_\Delta(\widetilde{G}_\Delta(\varphi))]. \tag{2.38}$$

При анализе этого уравнения используется то же самое метрическое пространство $\mathscr{H}$, что и при исследовании уравнения (2.15). Однако здесь мы дополнительно предполагаем, что входящие в $\mathscr{H}$ вектор-функции равномерно непрерывны по $\varphi \in \ell_\infty$. Повторяя, далее, соответствующий фрагмент обоснования леммы 2.2, убеждаемся в том, что уравнение (2.38) имеет единственное решение $\widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\varphi) \in \mathscr{H}$.

Покажем теперь, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}}\to 0} \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\varphi) - \widetilde{\varkappa}_{*}(\varphi)\| = 0, \tag{2.39}$$

где через $\widetilde{\varkappa}_{*}(\varphi)$ обозначена функция $\widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\varphi)\big|_{\Delta=0}$. С этой целью вычтем из уравнения (2.38) при $\widetilde{\varkappa}_{\Delta}(\varphi) = \widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\varphi)$ аналогичное уравнение при $\Delta = 0$. В результате приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\varphi) - \widetilde{\varkappa}_{*}(\varphi)\|_{*} \leqslant q(\|\Delta(\varphi)\|_{*} + \|\widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\widetilde{G}_{\Delta}(\varphi)) - \widetilde{\varkappa}_{*}(\widetilde{G}_{\Delta}(\varphi))\|_{*} \\ + \|\widetilde{\varkappa}_{*}(\widetilde{G}(\varphi) + \Delta(\varphi)) - \widetilde{\varkappa}_{*}(\widetilde{G}(\varphi))\|_{*}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\varphi) - \widetilde{\varkappa}_{*}(\varphi)\|_{*} \leqslant \frac{q}{1-q}\biggl(\sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\Delta(\varphi)\|_{*} \\ + \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\widetilde{\varkappa}_{*}(\widetilde{G}(\varphi) + \Delta(\varphi)) - \widetilde{\varkappa}_{*}(\widetilde{G}(\varphi))\|_{*}\biggr), \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_{*}$ — норма из (2.18), $q = \|\Lambda^{-1}\|_{*} < 1$. А отсюда и из равномерной непрерывности функции $\widetilde{\varkappa}_{*}(\varphi)$ требуемое предельное равенство (2.39) вытекает автоматически.

Проделанные построения показывают, что функция $\varkappa_{\Delta}(\varphi)$ из (2.36) задается формулой $\varkappa_{\Delta}(\varphi) = \varphi + \widetilde{\varkappa}_{\Delta}^{*}(\varphi)$ и в силу (2.39) обладает свойством

$$\lim_{\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}}\to 0} \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\varkappa_{\Delta}(\varphi) - \varkappa(\varphi)\| = 0, \tag{2.40}$$

где $\varkappa(\varphi) = \varkappa_{\Delta}(\varphi)\big|_{\Delta=0}$.

Рассмотрим также обратное к (2.36) отображение $\varkappa_{\Delta}^{-1}$ и убедимся в том, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}}\to 0} \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|\varkappa_{\Delta}^{-1}(\varphi) - \varkappa^{-1}(\varphi)\| = 0, \tag{2.41}$$

где $\varkappa^{-1}(\varphi) = \varkappa_{\Delta}^{-1}(\varphi)\big|_{\Delta=0}$. Как оказывается, для этого достаточно показать равномерную непрерывность отображения $\varkappa^{-1}(\varphi)$.

Действительно, пусть упомянутая равномерная непрерывность уже установлена. Тогда обратимся к уравнению $\varkappa_{\Delta}(\varphi) = \overline{\varphi}$ при любом фиксированном $\overline{\varphi} \in \ell_\infty$ и перепишем его в виде

$$\varphi + \widetilde{\varkappa}(\varphi) + f_{\Delta}(\varphi) = \overline{\varphi}, \tag{2.42}$$

где в силу (2.40) добавка $f_{\Delta}(\varphi)$ такова, что

$$\lim_{\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}}\to 0} \sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|f_{\Delta}(\varphi)\| = 0. \tag{2.43}$$

Далее, поскольку, согласно лемме 2.2, отображение $\varkappa_\Delta(\varphi)$ является гомеоморфизмом, то уравнение (2.42) имеет единственное решение $\varphi = \varkappa_\Delta^{-1}(\overline{\varphi})$, которое одновременно удовлетворяет и уравнению

$$\varphi = \varkappa^{-1}(\overline{\varphi} - f_\Delta(\varphi)). \tag{2.44}$$

Объединяя затем информацию (2.43), (2.44) с фактом равномерной непрерывности отображения $\varkappa^{-1}(\varphi)$, приходим к выводу, что

$$\|\varkappa_\Delta^{-1}(\overline{\varphi}) - \varkappa^{-1}(\overline{\varphi})\| = \|\varkappa^{-1}(\overline{\varphi} - f_\Delta(\theta))\big|_{\theta=\varkappa_\Delta^{-1}(\overline{\varphi})} - \varkappa^{-1}(\overline{\varphi})\| \to 0$$

при $\|\Delta\|_{C^1_{\mathrm{per}}} \to 0$ равномерно по $\overline{\varphi} \in \ell_\infty$.

Для проверки свойства равномерной непрерывности отображения $\varkappa^{-1}$ представим его в виде

$$\varkappa^{-1} \colon \varphi \mapsto \varkappa^{-1}(\varphi) = \varphi + \widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\varphi), \quad \widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\varphi + 2\pi l) \equiv \widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\varphi) \quad \text{для любого } l \in \mathbb{Z}^\infty. \tag{2.45}$$

Далее, фиксируем произвольно натуральное n_0, удовлетворяющее требованию (2.34), и заметим, что из аналогичного (2.14) соотношения $\widetilde{G}^{n_0} \circ \varkappa^{-1} = \varkappa^{-1} \circ \widetilde{L}^{n_0}$ для отыскания вектор-функции $\widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\varphi)$ получаем уравнение

$$\widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\varphi) = \widetilde{G}^{-n_0}(\Lambda^{n_0}\varphi + \widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\Lambda^{n_0}\varphi)) - \varphi, \tag{2.46}$$

аналогичное уравнению (2.15).

Как и при анализе уравнения (2.38), для исследования уравнения (2.46) нам потребуется введенное при доказательстве леммы 2.2 полное метрическое пространство $\mathscr{H}$ с дополнительным условием равномерной непрерывности всех входящих в него вектор-функций. Кроме того, считаем, что метрика в нем задана равенством (2.18), в котором вместо специальной нормы $\|\cdot\|_*$ фигурирует обычная норма $\|\cdot\|$ в ℓ_∞.

Привлекая вторую оценку из (2.11) и условие (2.34), приходим к выводу, что оператор, порожденный правой частью уравнения (2.46), переводит пространство $\mathscr{H}$ в себя и является сжимающим. Таким образом, это уравнение допускает в $\mathscr{H}$ единственное решение $\widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\varphi) = \widetilde{\widetilde{\varkappa}}_*(\varphi)$, а значит, фигурирующая в (2.45) функция $\widetilde{\widetilde{\varkappa}}(\varphi)$ обладает требуемым свойством равномерной непрерывности.

Для завершения обоснования теоремы 1.2 рассмотрим гомеоморфизмы $\overline{\varkappa}_\Delta, \overline{\varkappa}$ тора $\mathbb{T}^\infty$, порожденные отображением (2.36) при $\Delta \neq 0$ и $\Delta = 0$ соответственно. Из соотношений

$$G_\Delta = \overline{\varkappa}_\Delta^{-1} \circ L \circ \overline{\varkappa}_\Delta, \qquad G = \overline{\varkappa}^{-1} \circ L \circ \overline{\varkappa},$$

справедливых в силу равенства (2.37), следует, что искомый гомеоморфизм τ_Δ, о котором говорится в определении 1.3, имеет вид $\tau_\Delta = \overline{\varkappa}^{-1} \circ \overline{\varkappa}_\Delta$. Что же касается требуемых свойств (1.18), то они — очевидные следствия предельных равенств (2.40), (2.41). Теорема 1.2 полностью доказана.

2.3. Доказательство теоремы 1.3. Как уже отмечалось в §1, проблема обоснования теоремы 1.3 сводится к проверке свойства топологического перемешивания для линейного эндоморфизма (1.19). Но этот факт верен, о чем свидетельствует следующая

Лемма 2.3. *Для любой матрицы* $\Lambda \in \mathrm{Lin}(\ell_\infty)$ *соответствующий эндоморфизм* (1.19) *является топологически перемешивающим.*

Доказательство. Отрезком B_r длины $r > 0$ назовем множество вида

$$B_r = \{\varphi \in \ell_\infty : \|\varphi\|_* \leqslant r\}, \tag{2.47}$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма из (2.18). Заметим, далее, что при некотором $r = r_0$ имеет место равенство

$$p(B_{r_0}) = \mathbb{T}^\infty, \tag{2.48}$$

где p — проекция (1.14).

Действительно, согласно (1.14), точки тора $\mathbb{T}^\infty$ отождествляются с точками из фундаментальной области

$$\mathscr{U} = \{\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_{(1)}, \dots, \varphi_{(k)}, \dots) \in \ell_\infty : 0 \leqslant \varphi_{(k)} < 2\pi,\ k \geqslant 1\}.$$

Ясно также, что в силу ограниченности области $\mathscr{U}$ имеем $\mathscr{U} \subset B_{r_0}$ при подходящем увеличении $r_0 > 0$. А отсюда требуемое свойство (2.48) вытекает автоматически.

Помимо отрезка (2.47) введем в рассмотрение аналогичные отрезки

$$B_r(\varphi_0) = \{\varphi \in \ell_\infty : \|\varphi - \varphi_0\|_* \leqslant r\}, \tag{2.49}$$

где $\varphi_0 \in \ell_\infty$ — фиксированная точка. Заметим, далее, что поскольку все отрезки вида (2.49) одной и той же длины являются параллельными переносами друг друга, выполняется равенство

$$p(B_{r_0}(\varphi_0)) = \mathbb{T}^\infty \quad \text{для любого } \varphi_0 \in \ell_\infty \tag{2.50}$$

с той же самой постоянной r_0, что и в (2.48). Кроме того, в силу оценки

$$\|\Lambda\varphi\|_* \geqslant \lambda_* \|\varphi\|_* \quad \text{для любого } \varphi \in \ell_\infty, \tag{2.51}$$

где

$$\lambda_* = \frac{1}{\|\Lambda^{-1}\|_*} > 1,$$

имеет место следующее свойство, которое будет использоваться при завершении доказательства леммы. А именно, для любых $R, r > 0$, $\varphi_0 \in \ell_\infty$ найдется такое натуральное N, что при любом $n \geqslant N$ образ $\widetilde{L}^n(B_r(\varphi_0))$ отрезка (2.49) содержит целиком некоторый отрезок длины R.

Приступим теперь непосредственно к проверке для отображения (1.19) свойства топологического перемешивания. Точнее говоря, для любого непустого открытого множества $U \subset \mathbb{T}^\infty$ докажем существование такого натурального N, что при любом $n \geqslant N$ имеет место равенство $L^n(U) = \mathbb{T}^\infty$.

Действительно, в силу условия $U \neq \varnothing$ заведомо найдется отрезок $B_r(\varphi_0)$ длины $r > 0$, проекция $p(B_r(\varphi_0))$ которого целиком содержится в U. Опираясь затем на свойство растягивания (2.51), убеждаемся в существовании такого натурального N, что при любом $n \geqslant N$ множество $\widetilde{L}^n(B_r(\varphi_0))$ содержит некоторый отрезок длины r_0, где r_0 — величина из (2.48), (2.50). Таким образом, автоматически

$$p[\widetilde{L}^n(B_r(\varphi_0))] = \mathbb{T}^\infty \quad \text{для любого } n \geqslant N. \tag{2.52}$$

Остается воспользоваться соотношением

$$L(\varphi) = p[\widetilde{L}(p^{-1}(\varphi))] \quad \text{для любого } \varphi \in \mathbb{T}^\infty,$$

из которого с учетом (2.52) получаем

$$\mathbb{T}^\infty = p[\widetilde{L}^n(B_r(\varphi_0))] = L^n[p(B_r(\varphi_0))] \subset L^n(U) \subset \mathbb{T}^\infty.$$

Лемма 2.3, а значит, и теорема 1.3 полностью доказаны.

§ 3. Заключение

Из построений, проделанных при обосновании теорем 1.1, 1.2, удается вывести некоторый критерий, позволяющий судить о наличии у отображения (1.12) свойства растягивания (1.16). Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, рассмотрим операторы

$$A_n(\varphi) = [DG(\varphi_0)]^{-1} \circ [DG(\varphi_1)]^{-1} \circ \cdots \circ [DG(\varphi_{n-1})]^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

где $\varphi_j = G^j(\varphi)$, $j \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Эндоморфизм* (1.12) *с матрицей* $\Lambda \in \mathrm{Lin}(\ell_\infty)$ *и периодической добавкой* $g(\varphi) \in C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$ *является растягивающим в том и только в том случае, когда*

(a) *при всех* $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$ *обратим дифференциал* $DG(\varphi)\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$;

(b) *при некотором натуральном* n_0 *выполняется неравенство*

$$\theta_{n_0} \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\varphi \in \mathbb{T}^\infty} \|A_{n_0}(\varphi)\| < 1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости данной теоремы в части необходимости. В связи с этим напомним, что обратимость линейного оператора $DG(\varphi) = D\widetilde{G}(p^{-1}(\varphi))$ для любого $\varphi \in \mathbb{T}^\infty$ установлена в процессе доказательства леммы 2.1. Далее, в силу соотношений (2.4) и (2.8)–(2.11)

$$\theta_{n_0} = \sup_{\varphi \in \ell_\infty} \|D(\widetilde{G}^{-n_0}(\varphi))\|, \qquad \theta_{n_0} \leqslant \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{n_0}. \tag{3.3}$$

А отсюда, выбирая n_0 из условия (2.34), получаем требуемое неравенство (3.2).

Для доказательства теоремы 3.1 в части достаточности напомним (см. соответствующий фрагмент обоснования леммы 2.1), что из обратимости дифференциала $D\widetilde{G}(\varphi) = DG(p(\varphi))$ для любого $\varphi \in \ell_\infty$ вытекает взаимная однозначность отображения (2.1). А отсюда, в свою очередь, следует (см. соотношения (2.4), (2.8)), что постоянная (3.2) допускает представление из (3.3).

Упомянутое выше представление для θ_{n_0} позволяет воспользоваться построениями, проделанными при обосновании оценок (2.32), и получить аналогичные неравенства

$$\sup_{\varphi\in\ell_\infty} \|D(\widetilde{G}^{-n}(\varphi))\| \leqslant \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\mu}\right)^n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

где

$$\frac{1}{c} = \theta_{n_0}^{-(n_0-1)} \sup_{\substack{\varphi\in\ell_\infty \\ r\in\{0,1,\dots,n_0-1\}}} \|D(\widetilde{G}^{-r}(\varphi))\|, \qquad \frac{1}{\mu} = \theta_{n_0}^{1/n_0} < 1.$$

Остается лишь добавить, что из оценок (3.4) требуемое условие растягивания (1.16) вытекает автоматически. Теорема 3.1 доказана.

В заключение приведем конкретный пример растягивающего эндоморфизма тора $\mathbb{T}^\infty$. При его анализе будем считать, что норма в ℓ_∞ задана стандартной формулой (1.1).

В координатах $\varphi_{(k)}$, $k \geqslant 1$ (см. (1.2)), интересующее нас отображение записывается в виде

$$G\colon \varphi_{(k)} \mapsto m_k\varphi_{(k)} + \delta_k \sin\varphi_{(k+1)} \pmod{2\pi}, \qquad k \geqslant 1. \tag{3.5}$$

Здесь числовые последовательности m_k, δ_k обладают свойствами

$$m_k \in \mathbb{Z}, \quad \delta_k \in \mathbb{R}, \quad |m_k| \geqslant 2 \text{ для любого } k \geqslant 1, \quad \sup_{k\geqslant 1}|m_k| < \infty, \quad \lim_{k\to+\infty}\delta_k = 0. \tag{3.6}$$

Кроме того, предполагаем еще, что

$$\sup_{s\geqslant 1}\left(\frac{1}{|m_s|} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|m_{s+k}|}\prod_{n=1}^{k}\left|\frac{\delta_{s+n-1}}{m_{s+n-1}}\right|\right) < 1. \tag{3.7}$$

Несложная проверка показывает, что в случае (3.5), (3.6) матрица Λ задается равенством (1.8) и принадлежит классу $\mathrm{Lin}(\ell_\infty)$, а вектор-функция

$$g(\varphi) = \mathrm{colon}(\delta_1\sin\varphi_{(2)}, \delta_2\sin\varphi_{(3)}, \dots, \delta_k\sin\varphi_{(k+1)}, \dots)$$

принадлежит пространству $C^1_{\mathrm{per}}(\ell_\infty)$. Что же касается оператора $DG(\varphi)$, то он действует на любой вектор $\xi = \mathrm{colon}(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots) \in \ell_\infty$ по правилу

$$DG(\varphi)\xi = \mathrm{colon}(a_1\xi_1 + b_1\xi_2, a_2\xi_2 + b_2\xi_3, \dots, a_k\xi_k + b_k\xi_{k+1}, \dots), \tag{3.8}$$

где

$$a_k = m_k, \quad b_k = \delta_k\cos\varphi_{(k+1)}, \quad k \geqslant 1. \tag{3.9}$$

При изучении вопроса об обратимости оператора (3.8) воспользуемся следующим утверждением.

Теорема 3.2. *Пусть заданы две последовательности* $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 1$, *обладающие свойствами*

$$a_k \neq 0 \ \textit{для любого}\ k \geqslant 1, \quad \sup_{k\geqslant 1} |a_k| < \infty,$$
$$\theta \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{s\geqslant 1} \left(\frac{1}{|a_s|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_{s+k}|} \prod_{n=1}^{k} \left| \frac{b_{s+n-1}}{a_{s+n-1}} \right| \right) < \infty. \tag{3.10}$$

Тогда для любого вектора $y = \mathrm{colon}(y_1, \ldots, y_k, \ldots) \in \ell_\infty$ *система уравнений*

$$a_k x_k + b_k x_{k+1} = y_k, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.11}$$

допускает единственное решение $x = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_\infty$ *и выполняется оценка*

$$\|x\| \leqslant \theta \|y\|, \tag{3.12}$$

где θ *— постоянная из* (3.10).

Доказательство. Фиксируем произвольно $y = \mathrm{colon}(y_1, \ldots, y_k, \ldots) \in \ell_\infty$ и рассмотрим вектор $x = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ с компонентами

$$x_s = \frac{y_s}{a_s} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{y_{s+k}}{a_{s+k}} \prod_{n=1}^{k} \frac{b_{s+n-1}}{a_{s+n-1}}, \qquad s \geqslant 1. \tag{3.13}$$

Опираясь на соотношения (3.10), (3.13), несложно показать, что, во-первых, этот вектор принадлежит пространству ℓ_∞ и удовлетворяет системе (3.11), а во-вторых, для него справедлива оценка (3.12). Поэтому для завершения доказательства теоремы остается проверить, что соответствующая однородная система

$$a_k x_k + b_k x_{k+1} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.14}$$

имеет в ℓ_∞ только нулевое решение.

Пусть $x = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_\infty$ — произвольное решение системы (3.14). Тогда, привлекая первые k уравнений этой системы, выражаем x_1 через x_{k+1} по формуле

$$x_1 = (-1)^k \prod_{n=1}^{k} \frac{b_n}{a_n} x_{k+1}. \tag{3.15}$$

Заметим, далее, что $\sup_{k\geqslant 1} |x_k| < \infty$, а из условий (3.10) последовательно получаем

$$\sup_{s\geqslant 1} \frac{1}{|a_s|} < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_{k+1}|} \prod_{n=1}^{k} \left| \frac{b_n}{a_n} \right| < \infty, \qquad \prod_{n=1}^{k} \left| \frac{b_n}{a_n} \right| \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Объединяя эти факты и переходя в равенстве (3.15) к пределу при $k \to +\infty$, убеждаемся в том, что $x_1 = 0$.

Аналогичным образом, привлекая блок соотношений (3.14) с номерами $s, s+1, \dots, s+k-1$, приходим к выводу, что

$$x_s = (-1)^k \prod_{n=1}^{k} \frac{b_{s+n-1}}{a_{s+n-1}}\, x_{s+k}, \qquad s \geqslant 1. \tag{3.16}$$

Как и в предыдущем случае, нетрудно увидеть, что при любом фиксированном $s \geqslant 1$ и при $k \to +\infty$ правая часть формулы (3.16) стремится к нулю. Таким образом, автоматически $x_s = 0$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Теорема 3.2 доказана.

Возвращаясь к оператору $DG(\varphi)$, заметим, что в силу условия (3.7) фигурирующие в (3.8) коэффициенты (3.9) удовлетворяют требованиям (3.10). А это значит (см. теорему 3.2), что упомянутый оператор заведомо обратим и справедлива оценка (3.2) при $n_0 = 1$. Остается воспользоваться теоремой 3.1, гарантирующей наличие у эндоморфизма (3.5) свойства растягивания.

Литература

[1] *Динамические системы*–9, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 66, ВИНИТИ, М., 1991.

[2] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

[3] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений*, МЦНМО, М., 2005.

[4] M. Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, Amer. J. Math., **91**:1 (1969), 175–199.

[5] S. Banach, S. Mazur, *Über mehrdeutige stetige Abbildungen*, Studia Math., **5** (1934), 174–178.

[6] R. Plastock, *Homeomorphisms between Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **200** (1974), 169–183.

С. Д. Глызин
Ярославский государственный университет имени
П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

А. Ю. Колесов
Ярославский государственный университет имени
П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: andkolesov@mail.ru

Н. Х. Розов
Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: fpo.mgu@mail.ru

Поступила в редакцию
4 марта 2020 г.
После доработки
13 июня 2020 г.
Принята к публикации
18 июня 2020 г.