С. В. Асташкин, Последовательности независимых функций в симметричных пространствах,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 239–249

https://www.mathnet.ru/smj7553

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2021. Том 62, № 2

УДК 517.982.22

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ФУНКЦИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Асташкин

Аннотация. Получены новые оценки, которые показывают экстремальность системы Радемахера среди последовательностей независимых функций, рассматриваемых в симметричных пространствах.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.201

Ключевые слова: симметричное пространство, функции Радемахера, независимые функции, пространство Орлича, норма Люксембурга.

§ 1. Введение

Пусть $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ — две последовательности независимых симметрично распределенных измеримых функций на $[0,1]$, удовлетворяющие условию: для некоторых $C_1>0$, $C_2>0$ и всех $\tau>0$, $n\in\mathbb{N}$

$$m\{s\in[0,1]:|g_n(s)|>\tau\}\le C_1 m\{s\in[0,1]:C_2|f_n(s)|>\tau\},$$

где $m(E)$ — мера Лебега множества $E\subset\mathbb{R}$. Тогда согласно хорошо известной теореме Квапеня — Рыхлика (см., например, [1, гл. 5, теорема 4.4]) для произвольных $n\in\mathbb{N}$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,n$, и каждого $\tau>0$ выполнено неравенство

$$m\left\{s\in[0,1]:\left|\sum_{k=1}^n a_k g_k(s)\right|>\tau\right\}\le 2C_1 m\left\{s\in[0,1]:C_1C_2\left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(s)\right|>\tau\right\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что для всякой последовательности $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ независимых симметрично и *одинаково распределенных* (ненулевых) измеримых функций на $[0,1]$, произвольных $n\in\mathbb{N}$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,n$, и каждого $\tau>0$ справедлива оценка

$$m\left\{s\in[0,1]:\left|\sum_{k=1}^n a_k r_k(s)\right|>\tau\right\}\le C_1 m\left\{s\in[0,1]:C_2\left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(s)\right|>\tau\right\},$$

где r_k — функции Радемахера, а константы $C_1\ge1$ и $C_2\ge1$ зависят только от распределения f_1. Непосредственное следствие этой оценки для распределений — неравенство для нормы произвольного симметричного пространства X:

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k\right\|_X\le C_1C_2\left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_X \tag{1}$$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075–02–2020–1488/1.

[2, гл. 2, § 4, следствие 2].

Главная цель настоящей работы — доказательство оценок типа (1) для некоторых классов симметричных пространств и последовательностей независимых и симметрично, но, вообще говоря, *не одинаково распределенных* функций. Требуем лишь, чтобы первый (абсолютный) или второй момент f_k, $k = 1, 2, \dots$, был таким же, как у функций Радемахера, т. е. равен 1. Наша аргументация при этом основана, с одной стороны, на использовании соответствующих модулярных оценок, полученных в [3, 4], с другой, — на применении техники теории интерполяции операторов, позволяющей доказывать неравенства типа (1) с помощью таких оценок.

§ 2. Определения и предварительные сведения

2а. Симметричные пространства. Напомним кратко некоторые основные определения из теории симметричных пространств (более полную информацию см. в монографиях [2, 5–8]).

Банахово пространство X измеримых на $[0, 1]$ функций называется *симметричным* (кратко с. п.) или *перестановочно-инвариантным*, если 1) оно идеально, т. е. из того, что $|x(t)| \le |y(t)|$ для п. в. $t \in [0, 1]$, измеримости x и $y \in X$ следует, что $x \in X$ и $\|x\|_X \le \|y\|_X$; 2) из *равноизмеримости* функций x и y, т. е. равенства

$$m\{t \in [0, 1] : |y(t)| > \tau\} = m\{t \in [0, 1] : |x(t)| > \tau\}, \quad \tau > 0,$$

и $y \in X$ вытекает $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

В частности, любая измеримая на $[0, 1]$ функция x равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{\tau \ge 0 : m\{s \in [0, 1] : |x(s)| > \tau\} < t\}, \quad 0 < t \le 1.$$

Для каждого с. п. X на $[0, 1]$ справедливы непрерывные вложения $L_\infty \subset X \subset L_1$.

Если X — с. п. на $[0, 1]$, то *ассоциированное* (или *двойственное*) пространство X' состоит из всех функций $y = y(t)$, для которых

$$\|y\|_{X'} := \sup\left\{\int_0^1 x(t)y(t)\,dt : \|x\|_X \le 1\right\} < \infty.$$

Пространство X' также является с. п., причем X сепарабельно тогда и только тогда, когда $X' = X^*$, где X^* — пространство, сопряженное к X. Пространство X' *максимально*, т. е. из того, что $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ и $x_n \to x$ п. в. на $[0, 1]$, вытекает, что $x \in X$ и $\|x\|_X \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_X$.

Важный и наиболее простой пример с. п. — L_p-пространства, $1 \le p \le \infty$, с обычной нормой. Их естественным обобщением являются пространства Орлича (см. [9, 10]). Пусть F — возрастающая непрерывная выпуклая функция на $[0, \infty)$, $F(0) = 0$. Пространство Орлича L_F состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что *норма Люксембурга*

$$\|x\|_{L_F} := \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 F\left(\frac{|x(t)|}{u}\right)\,dt \le 1\right\}$$

конечна. Всякое пространство Орлича L_F максимально; оно сепарабельно, если и только если функция F удовлетворяет Δ_2^∞-условию, т. е.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{F(2t)}{F(t)} < \infty.$$

Другие примеры с. п. — пространства Марцинкевича и Лоренца. Если $\varphi(t)$ — непрерывная вогнутая возрастающая функция на $[0,1]$, $\varphi(0) = 0$, то пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{M(\varphi)} := \sup_{0<t\le 1} \frac{\int\limits_0^t x^*(s)\,ds}{\varphi(t)} < \infty,$$

а пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ — из всех $x = x(s)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} := \int\limits_0^1 x^*(s)\,d\varphi(s) < \infty.$$

Всякое пространство Марцинкевича несепарабельно и максимально, а пространство Лоренца сепарабельно и максимально.

2b. Система Радемахера и последовательности независимых функций. Напомним, что функции Радемахера определяются следующим образом:

$$r_k(t) = \operatorname{sign}\sin(2^k\pi t)\ (0 \le t \le 1), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Они образуют классическую систему независимых симметрично распределенных функций (подробную информацию о соотношениях между ней и другими последовательностями независимых функций см. в монографии [8]).

Если X — с. п. на $[0,1]$, то всякая последовательность независимых функций $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ таких, что $\int\limits_0^1 f_j(t)\,dt = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, C-безусловна в X (см., например, [11, гл. 1, предложение 14]), где C зависит только от X. Это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$, произвольных знаков $\theta_j = \pm 1$ и $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\left\|\sum_{j=1}^n \theta_j a_j f_j\right\|_X \le C\left\|\sum_{j=1}^n a_j f_j\right\|_X.$$

Набор измеримых функций $\{f_j\}_{j=1}^n$ называется *знакоинвариантным*, если для произвольных знаков $\theta_j = \pm 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, совместные распределения случайных векторов $\{f_1, \ldots, f_n\}$ и $\{\theta_1 f_1, \ldots, \theta_n f_n\}$ одинаковы. Говорят, что последовательность функций $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *знакоинвариантна*, если набор $\{f_1, \ldots, f_n\}$ знакоинвариантен для каждого $n \in \mathbb{N}$. Как легко видеть, если последовательность $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ состоит из симметрично распределенных независимых функций, то она знакоинвариантна. Обратное, конечно, неверно; в то же время многие результаты для последовательностей симметрично распределенных независимых функций справедливы также для знакоинвариантных семейств (см. [1, гл. 5, § 2]).

2c. Интерполяционные пространства. Пусть $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара (т. е. A_0 и A_1 — банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в некоторое хаусдорфово топологическое векторное пространство). Тогда $A_0 \cap A_1$ и $A_0 + A_1$ — пересечение и алгебраическая сумма этих пространств с естественными нормами

$$\|a\|_{A_0 \cap A_1} := \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\},$$

$$\|a\|_{A_0+A_1} := \inf\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1, a_i \in A_i, i = 0, 1\}$$

соответственно. Банахово пространство A называется *промежуточным* между A_0 и A_1, если $A_0 \cap A_1 \subset A \subset A_0 + A_1$ (вложения непрерывны). Говорят, что линейный оператор T *ограничен в паре* $\vec{A}$ ($T : \vec{A} \to \vec{A}$), если $T : A_0 + A_1 \to A_0 + A_1$ и при этом T ограниченно действует в каждом из пространств A_0 и A_1.

Пространство A, промежуточное между пространствами A_0 и A_1 банаховой пары $\vec{A} = (A_0, A_1)$, называется *интерполяционным* относительно $\vec{A}$ (или между A_0 и A_1), если всякий линейный оператор T такой, что $T : \vec{A} \to \vec{A}$, ограничен в A.

Один из наиболее важных как в теории, так и в приложениях способ построения интерполяционных пространств основан на использовании *$\mathscr{K}$-функционала Петре*, определенного на банаховой паре (A_0, A_1) следующим образом:

$$\mathscr{K}(t, a; A_0, A_1) := \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1, a_i \in A_i\},$$

где $a \in A_0 + A_1$, $t > 0$. Говорят, что банахова пара $\vec{A} = (A_0, A_1)$ *$\mathscr{K}$-монотонна* (или *пара Кальдерона — Митягина*), если выполнение неравенства

$$\mathscr{K}(t, y; A_0, A_1) \le \mathscr{K}(t, x; A_0, A_1), \quad t > 0,$$

для некоторых $x \in A_0 + A_1$ и $y \in A_0 + A_1$ влечет существование такого оператора $U : \vec{A} \to \vec{A}$, что $y = Ux$. В частности, этим свойством обладает пара (L_p, L_∞) для каждого $1 \le p < \infty$ (см. [12] или [13]).

Напомним (см., например, [14, теорема 5.2.1]), что для любого $1 \le p < \infty$

$$\mathscr{K}(t, x; L_p, L_\infty) \asymp \left(\int\limits_0^{t^p} x^*(s)^p \, ds \right)^{1/p}, \quad 0 < t \le 1,$$

где константы эквивалентности не зависят от $x \in L_p$ и $t > 0$ (при $p = 1$ будет равенство). Поэтому для того чтобы с. п. X на $[0, 1]$ было интерполяционно относительно пары (L_p, L_∞), необходимо и достаточно выполнение условия: если $x \in X$, $y \in L_1$ и

$$\int\limits_0^t y^*(s)^p \, ds \le \int\limits_0^t x^*(s)^p \, ds$$

при всех $0 \le t \le 1$, то $y \in X$ и $\|y\|_X \le C\|x\|_X$, где константа $C > 0$ зависит только от пространства X. В случае, когда $p = 1$, последний результат доказан независимо и почти одновременно А. П. Кальдероном [15] и Б. С. Митягиным [16]. В частности, любое максимальное или сепарабельное с. п. интерполяционно относительно пары (L_1, L_∞) [2, теоремы 2.4.9, 2.4.10]. Тем самым таковыми являются все пространства Орлича, Марцинкевича и Лоренца.

Подробнее о результатах и приложениях теории интерполяции операторов см. в [14, 2, 17, 7].

Всюду в дальнейшем, как обычно, $\mathbb{E}\, f := \int\limits_0^1 f(t)\, dt$, где f — суммируемая функция на $[0,1]$. Кроме того, выражение $f \asymp g$ означает, что $C^{-1}f \le g \le Cf$ для некоторой константы $C > 0$, не зависящей от всех или части аргументов функций (квазинорм) f и g.

§ 3. Формулировки основных результатов

Теорема 1. *Пусть $a_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$. Предположим, что последовательность функций $\{f_j\} \subset L_1$, $\mathbb{E}|f_j| = a_j$, $j = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет одному из следующих условий:*

(a) *функции f_j независимы и $\mathbb{E} f_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots$;*

(b) *функции f_j, $j = 1, 2, \ldots$, образуют знакоинвариантное семейство.*

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 < t \le 1$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^t \left(\sum_{j=1}^n a_j r_j\right)^*(s)\, ds \le 3 \int\limits_0^t \left(\sum_{j=1}^n f_j\right)^*(s)\, ds. \tag{2}$$

Отсюда если с. п. X интерполяционно относительно пары (L_1, L_∞), то существует такая константа $B = B(X)$, что для любой последовательности функций $\{f_j\} \subset X$, удовлетворяющей хотя бы одному из условий (a) *или* (b) *и такой, что $\mathbb{E}|f_j| = a_j$, $j = 1, 2, \ldots$, выполнено*

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty a_j r_j\right\|_X \le B \left\|\sum_{j=1}^\infty f_j\right\|_X. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $p \ge 3$, $\sigma_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots$. Существует такое $C = C(p)$, что для любой последовательности $\{f_j\} \subset L_2$ независимых симметрично распределенных функций, удовлетворяющих условию $\mathbb{E}\, f_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, \ldots$, всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 < t \le 1$, выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^t \left(\left(\sum_{j=1}^n \sigma_j r_j\right)^*(s)\right)^p ds \le C \int\limits_0^t \left(\left(\sum_{j=1}^n f_j\right)^*(s)\right)^p ds. \tag{4}$$

Поэтому если X — с. п., интерполяционное относительно пары (L_3, L_∞), то существует такая константа $D = D(X)$, что для любой последовательности $\{f_j\} \subset X$ независимых симметрично распределенных функций $\{f_j\} \subset X$ таких, что $\mathbb{E} f_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, \ldots$, имеет место неравенство

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty \sigma_j r_j\right\|_X \le D \left\|\sum_{j=1}^\infty f_j\right\|_X. \tag{5}$$

Ввиду [8, следствие 7.2, предложение 7.2] из теорем 1 и 2 вытекают следующие результаты, где через $(b_j^*)_{j=1}^\infty$ обозначается невозрастающая перестановка последовательности $(|b_j|)_{j=1}^\infty$, а через $[z]$ — целая часть числа $z \in \mathbb{R}$.

Следствие 1. *Предположим, что последовательность функций $\{f_j\}$, $\mathbb{E}|f_j| = a_j$, $j = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет хотя бы одному из условий* (a) *или* (b) *теоремы* 1. *Тогда с некоторой универсальной константой $c_1 > 0$ для всех $(a_j)_{j=1}^\infty \in l_2$ и $0 < t \le 1$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_0^t \left(\sum_{j=1}^\infty f_j\right)^*(s)\, ds \ge c_1 t \cdot \left(\sum_{j=1}^{[\ln(e/t)]} a_j^* + \sqrt{\ln(e/t)}\left(\sum_{j=[\ln(e/t)]+1}^\infty (a_j^*)^2\right)^{1/2}\right).$$

Следствие 2. *Пусть $p \geq 3$. Существует константа $c_2 = c_2(p) > 0$ такая, что для любой последовательности $\{f_j\} \subset L_2$ независимых симметрично распределенных функций, удовлетворяющих условию $\mathbb{E} f_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, \dots,$ и всех $0 < t \leq 1$ выполнено неравенство*

$$\int_0^t \left(\left(\sum_{j=1}^n f_j \right)^* (s) \right)^p ds \geq c_2 t \cdot \left(\sum_{j=1}^{[\ln(e/t)]} \sigma_j^* + \sqrt{\ln(e/t)} \left(\sum_{j=[\ln(e/t)]+1}^{\infty} (\sigma_j^*)^2 \right)^{1/2} \right)^p.$$

§ 4. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L_p$ и каждого $0 < t \leq 1$*

$$\|f\|_{N_{t,p}} \leq \left(\int_0^{t^p} f^*(s)^p \, ds \right)^{1/p} \leq 3^{1/p} \|f\|_{N_{t,p}}, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|_{N_{t,p}}$ — норма Люксембурга в пространстве Орлича $L_{N_{t,p}}$, $N_{t,p}(u) = (u^p - t^{-p})_+$ ($x_+ := \max(x, 0)$).

Доказательство. Можно считать, что $f = f^*$. Таким образом, если $\|f\|_{N_{t,p}} = 1$, то

$$\int_0^1 (f(s)^p - t^{-p})_+ \, ds = 1.$$

По соображениям непрерывности без ограничения общности можно предположить также, что f строго убывает на $(0, 1]$, поэтому на ее области значений определена обратная функция f^{-1}. Тем самым

$$\int_0^1 (f(s)^p - t^{-p})_+ \, ds = \int_0^{f^{-1}(1/t)} f(s)^p \, ds - t^{-p} f^{-1}(1/t),$$

откуда

$$\int_0^{f^{-1}(1/t)} f(s)^p \, ds = 1 + t^{-p} f^{-1}(1/t). \tag{7}$$

Если $t^{-p} f^{-1}(1/t) \leq 1$ или, эквивалентно, $f^{-1}(1/t) \leq t^p$, то из (7) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{t^p} f(s)^p \, ds &= \int_0^{f^{-1}(1/t)} f(s)^p \, ds + \int_{f^{-1}(1/t)}^{t^p} f(s)^p \, ds \\ &\leq 1 + t^{-p} f^{-1}(1/t) + t^p (f(f^{-1}(1/t)))^p \leq 3. \end{aligned}$$

Если, напротив, $f^{-1}(1/t) > t^p$, то опять в силу (7)

$$\begin{aligned} \int_0^{t^p} f(s)^p \, ds &= \int_0^{f^{-1}(1/t)} f(s)^p \, ds - \int_{t^p}^{f^{-1}(1/t)} f(s)^p \, ds \\ &\leq t^{-p} f^{-1}(1/t) + 1 - (f(f^{-1}(1/t)))^p (f^{-1}(1/t) - t^p) = 2. \end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях

$$\int_0^{t^p} f(s)^p\,ds \le 3,$$

и ввиду однородности правое неравенство в (6) доказано.

Наоборот, если $\int_0^{t^p} f(s)^p\,ds = 1$, то

$$t^p f(t^p)^p \le \int_0^{t^p} f(s)^p\,ds = 1,$$

откуда $tf(t^p) \le 1$ или $t^p \ge f^{-1}(1/t)$, $0 < t \le 1$. Следовательно,

$$\int_0^1 (f(s)^p - t^{-p})_+\,ds \le \int_0^{f^{-1}(1/t)} f(s)^p\,ds \le \int_0^{t^p} f(s)^p\,ds = 1.$$

В итоге по определению нормы Люксембурга $\|f\|_{N_{t,p}} \le 1$ и левое неравенство в (6) также доказано. $\square$

Замечание 1. Эквивалентность

$$\int_0^t f^*(s)\,ds \asymp \|f\|_{N_{t,1}}, \quad 0 < t \le 1,$$

без доказательства упомянута в [3].

Замечание 2. Результат, аналогичный лемме 1, может быть получен также для функции $N'_{t,p}(s) = \min(s^p, t)$ (см. [18, лемма 3.2]).

Лемма 2. *Пусть $p \ge 3$, $s, t > 0$ и*

$$\psi_{t,p}(s) := \int_0^s \int_0^v (u^{p-2} - t^{2-p})_+\,dudv.$$

Тогда с некоторой константой $C > 0$, зависящей лишь от p, для всех $s, t > 0$ имеет место неравенство

$$\psi_{t,p}(s) \le CN_{t,p}(s). \tag{8}$$

Кроме того, если $st \ge 2$, то

$$N_{t,p}(s) \asymp \psi_{t,p}(s) \tag{9}$$

с константой эквивалентности, зависящей также только от p.

Доказательство. Если $0 < s \le 1/t$, то $N_{t,p}(s) = \psi_{t,p}(s) = 0$. Пусть $s > 1/t$. Тогда

$$\psi_{t,p}(s) = \int_{1/t}^s \int_{1/t}^v (u^{p-2} - t^{2-p})\,dudv = \int_{1/t}^s \left(\frac{1}{p-1}v^{1-p} + \frac{p-2}{p-1}t^{p-1} - t^{2-p}v\right) dv$$

$$= \frac{1}{p(p-1)}(s^p - t^{-p}) - \frac{1}{2}t^{2-p}(s^2 - t^{-2}) + \frac{p-2}{p-1}t^{1-p}(s - t^{-1})$$

$$= \frac{s^p}{p(p-1)}\left(1 - \frac{(p-2)(p-1)}{2}(st)^{-p} - \frac{p(p-1)}{2}(st)^{2-p} + p(p-2)(st)^{1-p}\right).$$

Таким образом, если $s > 1/t$, то

$$\frac{N_{t,p}(s)}{\psi_{t,p}(s)} = \frac{p(p-1)(1-(st)^{-p})}{1 - \frac{(p-2)(p-1)}{2}(st)^{-p} - \frac{p(p-1)}{2}(st)^{2-p} + p(p-2)(st)^{1-p}}.$$

Полагая $x = (st)^{-1}$ и

$$\theta_p(x) := \frac{p(p-1)(1-x^p)}{1 - \frac{(p-2)(p-1)}{2}x^p - \frac{p(p-1)}{2}x^{p-2} + p(p-2)x^{p-1}},$$

получим, что $0 < x < 1$ и

$$\frac{N_{t,p}(s)}{\psi_{t,p}(s)} = \theta_p(x). \tag{10}$$

Заметим, что $\theta_p(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $\lim\limits_{x\to 0+}\theta_p(x) = p(p-1)$. Кроме того, по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to 1-}\theta_p(x) = \frac{p^2(p-1)}{\lim\limits_{x\to 1-}\left(\frac{p(p-1)(p-2)}{2}x^{p-1} + \frac{p(p-1)(p-2)}{2}x^{p-3} - p(p-1)(p-2)x^{p-2}\right)} = \infty.$$

Как легко видеть, нужные соотношения (8) и (9) непосредственно следуют из этих свойств функции $\theta_p(x)$ и равенства (10). $\square$

Следствие 3. *Пусть $p \ge 3$. С константой, зависящей лишь от p, для всех $0 < t \le 1$ нормы пространств Орлича $L_{N_{t,p}}$ и $L_{\psi_{t,p}}$ эквивалентны.*

Доказательство. Во-первых, в силу неравенства (8) сразу получаем, что

$$\|f\|_{\psi_{t,p}} \le C\|f\|_{N_{t,p}}.$$

Для доказательства противоположной оценки сначала покажем, что

$$\frac{1}{2}\|f\|_{N_{t,p}} \le \inf\left\{\lambda : \int\limits_{\{s:|f(s)|>2\lambda/t\}} N_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{\lambda}\right)ds \le 1\right\} \le \|f\|_{N_{t,p}}. \tag{11}$$

Так как правое неравенство очевидно, достаточно доказать лишь левое. Действительно, предполагая, что $f \ne 0$, и взяв $\lambda = \frac{1}{2}\|f\|_{N_{t,p}}$, по определению нормы Люксембурга получим

$$\int\limits_{\{s:|f(s)|>\|f\|_{N_{t,p}}/t\}} N_{t,p}\left(\frac{2|f(s)|}{\|f\|_{N_{t,p}}}\right)ds$$

$$> \int\limits_{\{s:|f(s)|>\|f\|_{N_{t,p}}/t\}} N_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{\|f\|_{N_{t,p}}}\right)ds = \int_0^1 N_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{\|f\|_{N_{t,p}}}\right)ds = 1,$$

и (11) доказано.

Далее, в силу (9) существует $C > 1$, зависящее только от p, такое, что для каждого $\lambda > 0$

$$\int\limits_{\{s:|f(s)|>2\lambda/t\}} \psi_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{\lambda}\right)ds \ge C^{-1}\int\limits_{\{s:|f(s)|>2\lambda/t\}} N_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{\lambda}\right)ds.$$

Поэтому ввиду выпуклости функции $N_{t,p}$ и неравенства (11)

$$\|f\|_{\psi_{t,p}} \ge \inf\left\{\lambda : \int\limits_{\{s:|f(s)|>2\lambda/t\}} \psi_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{\lambda}\right) ds \le 1\right\}$$
$$\ge \inf\left\{\lambda : \int\limits_{\{s:|f(s)|>2\lambda/t\}} N_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{\lambda}\right) ds \le C\right\}$$
$$\ge \inf\left\{\lambda : \int\limits_{\{s:|f(s)|>2C\lambda/t\}} N_{t,p}\left(\frac{|f(s)|}{C\lambda}\right) ds \le 1\right\} \ge \frac{1}{2C}\|f\|_{N_{t,p}}. \quad \square$$

§ 5. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть L_F — произвольное пространство Орлича на $[0,1]$, $g_j \in L_F$, $\mathbb{E}\,|g_j| = a_j$, $j = 1,2,\dots$. Тогда согласно [3, доказательство теоремы 4] (см. также [8, теорема 9.4]) существуют знаки $\theta_j = \pm 1$, $j = 1,2,\dots,n$, для которых выполнено неравенство

$$\int\limits_0^1 F\left(\sum_{j=1}^n a_j r_j(s)\right) ds \le \int\limits_0^1 F\left(\sum_{j=1}^n \theta_j g_j(s)\right) ds.$$

Применяя это неравенство в случае, когда $F = N_{t,1}$, $0 < t \le 1$, к данной системе функций $\{f_j\} \subset L_1$, получим, что для каждого $0 < t \le 1$ найдутся $\theta_j(t) = \pm 1$, $j = 1,2,\dots,n$, при которых

$$\int\limits_0^1 N_{t,1}\left(\sum_{j=1}^n a_j r_j(s)\right) ds \le \int\limits_0^1 N_{t,1}\left(\sum_{i=1}^n \theta_j(t) f_j(s)\right) ds.$$

Значит, по определению нормы Люксембурга

$$\left\|\sum_{j=1}^n a_j r_j\right\|_{N_{t,1}} \le \left\|\sum_{j=1}^n \theta_j(t) f_j\right\|_{N_{t,1}}.$$

Так как пространство $L_{N_{t,1}}$ сепарабельно, всякая последовательность функций $\{f_j\}$, удовлетворяющая условию (a) или (b), 1-безусловна в $L_{N_{t,1}}$ (см. § 2 или [11, гл. 1, предложение 14 и замечание после него]). Следовательно, в силу последнего неравенства получаем, что для всех $0 < t \le 1$

$$\left\|\sum_{j=1}^n a_j r_j\right\|_{N_{t,1}} \le \left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{N_{t,1}},$$

откуда по лемме 1

$$\int\limits_0^t \left(\sum_{j=1}^n a_j r_j\right)^*(s)\, ds \le 3 \int\limits_0^t \left(\sum_{j=1}^n f_j\right)^*(s)\, ds, \quad 0 < t \le 1.$$

Таким образом, неравенство (2) доказано. Что касается (3), то ввиду интерполяционной теоремы Кальдерона — Митягина (см. § 2) это неравенство является непосредственным следствием оценки (2) и интерполяционности пространства X относительно пары (L_1, L_∞). $\square$

Доказательство теоремы 2. Так как банахова пара (L_3, L_∞) $\mathscr{K}$-монотонна (см. § 2) и

$$\mathscr{K}(t, f; L_3, L_\infty) \asymp \left(\int_0^{t^3} f^*(s)^3\, ds\right)^{1/3}, \quad 0 < t \le 1,$$

соотношение (5) является непосредственным следствием неравенства (4) в случае $p = 3$. В свою очередь, в силу леммы 1 и следствия 3 для доказательства (4) достаточно проверить, что для каждого $p \ge 3$

$$\left\|\sum_{j=1}^n \sigma_j r_j\right\|_{\psi_{t,p}} \le \left\|\sum_{j=1}^n f_j\right\|_{\psi_{t,p}}, \quad 0 < t \le 1. \tag{12}$$

Заметим, что по определению функция $\psi_{t,p}(s)$ дважды непрерывно дифференцируема и вторая производная $(\psi_{t,p})''(s) = (s^{p-2} - t^{2-p})_+$, $s > 0$, выпукла для каждого $0 < t \le 1$ как максимум двух выпуклых функций. Следовательно, в силу [4, теорема 1.1] для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \psi_{t,p}\left(\sum_{j=1}^n \sigma_j r_j(s)\right) ds \le \int_0^1 \psi_{t,p}\left(\sum_{j=1}^n f_j(s)\right) ds, \tag{13}$$

откуда по определению нормы Люксембурга получаем (12). Тем самым теорема доказана. □

Замечание 3. Центральным моментом доказательства неравенства (4) в теореме 2 является применение теоремы 1.1 из [4], согласно которой имеет место модулярное неравенство (13), справедливое для дважды непрерывно дифференцируемых функций с выпуклой второй производной. В то время как в случае $p \ge 3$ функция $N_{t,p}$ эквивалентна на $(0, \infty)$ функции $\psi_{t,p}$, обладающей этими свойствами, с константами, не зависящими от $0 < t \le 1$, последнее неверно, если $p < 3$. Очевидно, что (4) не выполнено (для всех последовательностей $\{f_j\} \subset L_2$ независимых симметрично распределенных функций, удовлетворяющих условию $\mathbb{E}\, f_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, \dots$, и для всех $n \in \mathbb{N}$ и $0 < t \le 1$) в случае $p < 2$. Вопрос о том, выполнено ли это неравенство при $2 \le p < 3$, остается открытым. Нетрудно видеть, что положительный ответ на него является следствием справедливости неравенства в случае $p = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
3. *Montgomery-Smith S., Semenov E.* Embeddings of rearrangement invariant spaces that are not strictly singular // Positivity. 2000. V. 4. P. 397–404.
4. *Figiel T., Hitchenko P., Johnson W. B., Schechtman G., Zinn J.* Extremal properties of Rademacher functions with applications to the Khintchine and Rosenthal inequalities // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349, N 3. P. 997–1027.
5. *Johnson W. B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L.* Symmetric structures in Banach spaces // Memoirs Amer. Math. Soc. 1979. V. 19. P. 1–298.
6. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. II. Function spaces. Berlin; New York: Springer-Verl., 1979.
7. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. Boston: Acad. Press, 1988.

8. *Асташкин С. В.* Система Радемахера в функциональных пространствах. М.: Физматлит, 2017.
9. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
10. *Maligranda L.* Orlicz spaces and interpolation. Campinas: Univ. Campinas, 1989.
11. *Braverman M. Sh.* Independent random variables and rearrangement invariant spaces. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1994.
12. *Lorentz G. G., Shimogaki T.* Interpolation theorems for the pairs of spaces (L^p, L^∞) and (L^1, L^q) // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 159. P. 207–221.
13. *Седаев А. А.* Описание интерполяционных пространств пары $(L^a_{p_0}, L^a_{p_1})$ и некоторые родственные вопросы // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209, № 4. С. 798–800.
14. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
15. *Calderon A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz // Studia Math. 1966. V. 26, N 3. P. 273–299.
16. *Митягин Б. С.* Интерполяционная теорема для модулярных пространств // Мат. сб. 1965. Т. 66, № 4. С. 473–482.
17. *Brudnyĭ Yu. A., Krugljak N. Ya.* Interpolation functors and interpolation spaces. Amsterdam: North-Holland, 1991.
18. *Hitczenko P., Montgomery-Smith S.* Tangent sequences in Orlicz and rearrangement invariant spaces // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1996. V. 119. P. 91–101.

Поступила в редакцию 25 сентября 2020 г.
После доработки 7 декабря 2020 г.
Принята к публикации 22 января 2021 г.

Асташкин Сергей Владимирович
Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С. П. Королёва,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
astash56@mail.ru