Б. Д. Аннин, Н. И. Остросаблин, Анизотропия упругих свойств материалов, *Прикл. мех. техн. физ.*, 2008, том 49, выпуск 6, 131–151

УДК 539.3: 517.958

АНИЗОТРОПИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Б. Д. Аннин, Н. И. Остросаблин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: annin@hydro.nsc.ru

Приведен обзор работ, посвященных исследованию обобщенного закона Гука для линейно-упругих анизотропных сред. В основе рассмотренных работ лежит подход Кельвина, раскрывающий структуру обобщенного закона Гука, которая определяется шестью собственными модулями упругости и шестью ортогональными собственными состояниями.

Ключевые слова: анизотропия, модули упругости, собственные модули и состояния, линейно-упругие материалы.

Многие естественные материалы, такие как горные породы, кристаллы и биологические ткани, а также материалы, используемые в современных технологиях, в частности композиты, характеризуются существенной анизотропией их свойств упругости. В большинстве случаев композитные материалы в целом, а также их составляющие являются анизотропными материалами. Для создания композитных материалов с необходимыми в инженерной практике свойствами упругости необходимо знать допустимые пределы изменения компонент тензора модулей упругости и тензора коэффициентов податливости анизотропных материалов.

Основные уравнения линейной теории упругости [1–5] в декартовой прямоугольной системе координат (x_1, x_2, x_3) представляют собой уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + F_i = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{1}$$

обобщенный закон Гука

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3 \tag{2}$$

и формулы Коши, выражающие деформации через смещения:

$$2\varepsilon_{kl} = u_{l,k} + u_{k,l}. \tag{3}$$

В (1)–(3) $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — компоненты симметричного тензора напряжений; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ — компоненты тензора деформаций; E_{ijkl} — компоненты тензора четвертого ранга модулей упругости; u_i — компоненты вектора смещения; F_i — компоненты вектора объемных сил; ρ — постоянная плотность материала; t — время. Запятая перед индексом означает дифференцирование по пространственной координате с этим индексом, повторяющиеся буквенные индексы — суммирование по их допустимым значениям. Соотношения (2) можно обратить: $\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$ (S_{ijkl} — компоненты тензора четвертого ранга коэффициентов податливости).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00749) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3066.2008.1).

В линейной теории упругости удельная энергия деформации для анизотропных материалов представляется в виде [1, 2]

$$2\Phi = E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = S_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}. \tag{4}$$

Компоненты E_{ijkl} обладают свойствами симметрии [2, 5]:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}. \tag{5}$$

Постоянные S_{ijkl} также удовлетворяют условиям симметрии (5) и связаны с E_{ijkl} соотношениями

$$E_{ijkl}S_{klrs} = \delta_{ijrs} \equiv (\delta_{ir}\delta_{js} + \delta_{is}\delta_{jr})/2, \qquad S_{ijkl}E_{klrs} = \delta_{ijrs},$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тензор δ_{ijrs} является единичным в пространстве симметричных тензоров вида (5).

Вопросы, связанные с представлением закона Гука (2) в специальных базисах и выяснением пределов изменения постоянных E_{ijkl}, совместимых с положительной определенностью квадратичной формы (4), рассматривались в работах [1, 6–22]. Ниже квадратичная форма (4) приводится к каноническому виду, который позволяет понять структуру тензора E_{ijkl}.

Подставляя соотношения (2), (3) в (1), получаем уравнения движения в смещениях [2]

$$E^*_{ijkl}u_{j,kl} - \rho\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + F_i = 0, \tag{6}$$

где

$$E^*_{ijkl} = (E_{iklj} + E_{ilkj})/2. \tag{7}$$

Свойства матрицы E^*_{ijkl} рассмотрены в [23, 24]. При решении конкретных задач к уравнениям (1)–(3) или (6) добавляются начальные и граничные условия. Из (1), (6) получаем уравнения статики в виде

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0, \qquad E^*_{ijkl}u_{j,kl} + F_i = 0.$$

Пусть n_i, m_i $(i = 1, 2, 3)$ — два ортогональных единичных направления. Модуль Юнга E_n в направлении n_i определяется в виде

$$1/E_n = n_i n_j S_{ijkl} n_k n_l. \tag{8}$$

Коэффициент Пуассона ν_{mn} в направлении m_i при растяжении в направлении n_i равен

$$\nu_{mn}/E_n = -m_i m_j S_{ijkl} n_k n_l \tag{9}$$

(слева по n суммирование не проводится). Модуль сдвига μ_{nm} между площадками с нормалями n_i и m_i равен

$$1/(4\mu_{nm}) = n_i m_j S_{ijkl} n_k m_l. \tag{10}$$

Объемный модуль K представим в виде $1/K = S_{iikk}$. Энергия деформации (4) должна быть положительно определенной квадратичной формой [1, 3, 25].

Классическая линейная теория упругости создана в XIX в. в работах О. Л. Коши, Л. М. А. Навье, С. Д. Пуассона, Д. Грина, А. Ж. К. Барре де Сен-Венана и других ученых (сведения по истории теории упругости содержатся в работах [3, 26–31]).

В 1660 г. Р. Гук открыл закон пропорциональности напряжений и деформаций в простейшей форме. В [32] сказано, что закон упругости в форме $\sigma = E\varepsilon$ первым сформулировал Л. Эйлер (постоянную E он обозначал по первой букве своей фамилии (Euler)).

В 1821 г. Л. М. А. Навье начал построение теории упругости. В 1822 г. О. Л. Коши ввел понятие напряженного состояния (в современном понимании) в точке, которое определяется шестью компонентами σ_{ij}, вывел уравнения движения и равновесия. В настоящее время уравнения Коши приняты для изотропных материалов. В 1828 г. О. Л. Коши получил закон Гука с 21 постоянной, однако при некоторых предположениях число постоянных сводится к 15, для изотропного материала — к одной постоянной. Уравнения, аналогичные уравнениям Навье и Коши, получены также С. Д. Пуассоном (1828 г.). В течение длительного времени в работах по теории упругости (см., например, [3, 26]) велась дискуссия по поводу так называемых мультиконстантной и рариконстантной теорий, т. е. о числе независимых констант в обобщенном законе Гука (21 или 15 констант для произвольной анизотропии и соответственно две или одна постоянная для изотропного материала). Экспериментальные данные, в частности опыты В. Фойгта по изучению упругих свойств кристаллов, не подтвердили выполнения шести условий Коши [3] $E_{iklj} - E_{ilkj} = 0$, т. е. то, что число независимых модулей упругости составляет 15. Приближенно эти условия выполняются для берилла и каменной соли. Лишь в начале XX в. после появления работ М. Борна [3, 33] по теории кристаллических решеток было окончательно признано, что в общем случае в законе Гука содержится 21 постоянная.

О. Л. Коши (1830 г.) и Д. Грин (1839 г.), изучая распространение плоских волн в упругой среде, вывели уравнения, определяющие скорость распространения в зависимости от направления нормали к фронту волны [3]. В общем случае волновая поверхность [25] состоит из трех поверхностей, а в случае изотропной среды все три поверхности являются сферами, две из которых совпадают [3].

Большое значение для создания основ теории упругости имели работы Д. Грина (1837 г.). Д. Грин предполагал существование удельной потенциальной энергии, частные производные по деформациям от которой определяют напряжения. Исходя из этого Д. Грин вывел уравнения теории упругости с 21 постоянной (для случая изотропии — с двумя постоянными).

В [3] О. Э. Х. Ляв пишет: “То обстоятельство, что сопротивления объемному сжатию и сдвигу являются двумя основными видами упругого сопротивления изотропных тел, впервые было отмечено Стоксом...” Фактически это означает наличие двух собственных состояний [34, 35] изотропных материалов. Различие между двумя видами упругого сопротивления отмечено Ж. В. Понселе в 1839 г. [3]. Понятия собственных модулей и состояний под другими названиями введены У. Томсоном (лордом Кельвином) [29, 34, 36] в середине XIX в., однако полученные им результаты оказались надолго забытыми, и только в последние десятилетия собственные модули и состояния были использованы рядом исследователей, среди которых Л. М. Минкевич [37–39], Я. К. Рыхлевский [34, 40], А. И. Чанышев [41–43], Н. И. Остросаблин [35, 44–46] и др. (см. [47–52]).

Свойства упругости материалов определяются тензором четвертого ранга модулей упругости E_{ijkl}. В конце XIX — начале XX в. Ф. Э. Нейман и В. Фойгт, используя симметрию кристаллов, описали их упругие свойства [3, 53]. В зависимости от симметрии кристаллы подразделяются на семь сингоний [25, 54]: 1) триклинную; 2) моноклинную; 3) ромбическую; 4) тетрагональную; 5) тригональную; 6) гексагональную; 7) кубическую. Эти результаты являются основой учебников по кристаллофизике и теории упругости анизотропных материалов. В теории упругости различают следующие виды симметрии: изотропию, трансверсальную изотропию, ортотропию (три плоскости симметрии), кубическую симметрию.

В 20–30-е гг. XX в. П. В. Бехтеревым получены различные соотношения и неравенства для модулей упругости, поставлена и изучалась задача определения наитеснейших границ модулей упругости и коэффициентов податливости, при которых обеспечивается положительная определенность удельной энергии деформации [6–16]. Важность этой проблемы отмечали В. В. Новожилов [1, 17], К. Ф. Черных [17, 18]. Проблема наитеснейших границ для характеристик упругости решалась в работах [55, 56].

П. В. Бехтеревым предложена классификация анизотропных материалов по степени приближения их свойств к свойствам жидких или твердых тел: гигроморфные, ортоморфные, плагиоморфные, склероморфные материалы. В зависимости от коэффициента Пуассона ν П. В. Бехтерев делит область устойчивых состояний изотропных тел на две области: $0 < \nu < 1/2$ и $-1 < \nu < 0$. Материалы, соответствующие первой области, он называет хоростабильными, материалы, соответствующие второй области, — ахоростабильными. В первом случае при одностороннем растяжении образца происходит его поперечное сжатие, во втором — поперечное расширение. Коэффициент Пуассона $\nu = 1/2$ соответствует материалам типа идеальной жидкости, когда объемный модуль велик, а модуль сдвига мал, коэффициент Пуассона $\nu = -1$ — материалам типа идеального твердого тела, когда модуль сдвига очень большой, а объемный модуль мал.

Следуя работам П. В. Бехтерева, введем шестимерное пространство векторов с обычным скалярным умножением:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6), \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6),$$

$$\begin{gathered} \sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sqrt{2}\,\sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sqrt{2}\,\sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sqrt{2}\,\sigma_{12}, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_4 = \sqrt{2}\,\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = \sqrt{2}\,\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_6 = \sqrt{2}\,\varepsilon_{12}. \end{gathered} \tag{11}$$

Закон Гука (2) принимает вид

$$\sigma_i = A_{ij}\varepsilon_j, \qquad \varepsilon_i = B_{ij}\sigma_j, \qquad i, j = \overline{1, 6}. \tag{12}$$

Симметричная матрица с компонентами A_{ij} определяется в виде

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & \sqrt{2}\,E_{1123} & \sqrt{2}\,E_{1113} & \sqrt{2}\,E_{1112} \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & \sqrt{2}\,E_{2223} & \sqrt{2}\,E_{2213} & \sqrt{2}\,E_{2212} \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3333} & \sqrt{2}\,E_{3323} & \sqrt{2}\,E_{3313} & \sqrt{2}\,E_{3312} \\ \sqrt{2}\,E_{2311} & \sqrt{2}\,E_{2322} & \sqrt{2}\,E_{2333} & 2E_{2323} & 2E_{2313} & 2E_{2312} \\ \sqrt{2}\,E_{1311} & \sqrt{2}\,E_{1322} & \sqrt{2}\,E_{1333} & 2E_{1323} & 2E_{1313} & 2E_{1312} \\ \sqrt{2}\,E_{1211} & \sqrt{2}\,E_{1222} & \sqrt{2}\,E_{1233} & 2E_{1223} & 2E_{1213} & 2E_{1212} \end{bmatrix}.$$

Аналогично матрица B_{ij} определяется через тензор S_{ijkl}, при этом имеет место равенство $A_{ij}B_{jk} = \delta_{ik}$ $(i, j, k = \overline{1, 6})$. Преимущество обозначений (11) показано в [25, 54].

Технические коэффициенты податливости $B_{ij} = \nu_{ij}/E_j = \nu_{ji}/E_i$ (по i, j суммирование не проводится) применяли Я. И. Секерж-Зенькович [57], Н. Г. Ченцов [58], А. Л. Рабинович [59]. В [59–61] описываются направляющие поверхности и направляющие кривые, диаграммы анизотропии, показывающие изменения модулей Юнга, коэффициентов Пуассона, модулей сдвига в зависимости от направления, в котором эти величины вычисляются.

Из (5) следует, что независимых компонент E_{ijkl} только 21. При ортогональном преобразовании системы координат

$$\hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \qquad \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk} \tag{13}$$

имеем

$$\hat{\varepsilon}_{kl} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\varepsilon_{ij}, \qquad \hat{E}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}E_{ijkl}\alpha_{kr}\alpha_{ls}.$$

В обозначениях (11) последние соотношения можно записать в виде

$$\hat{\varepsilon}_i = l_{ki}\varepsilon_k, \qquad \hat{A}_{ij} = l_{si}A_{sk}l_{kj}.$$

Ортогональная матрица l_{ij} имеет вид [12]

$$[l_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 & \sqrt{2}\,\alpha_{12}\alpha_{13} & \sqrt{2}\,\alpha_{11}\alpha_{13} & \sqrt{2}\,\alpha_{11}\alpha_{12} \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 & \sqrt{2}\,\alpha_{22}\alpha_{23} & \sqrt{2}\,\alpha_{21}\alpha_{23} & \sqrt{2}\,\alpha_{21}\alpha_{22} \\ \alpha_{31}^2 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 & \sqrt{2}\,\alpha_{32}\alpha_{33} & \sqrt{2}\,\alpha_{31}\alpha_{33} & \sqrt{2}\,\alpha_{31}\alpha_{32} \\ \sqrt{2}\,\alpha_{21}\alpha_{31} & \sqrt{2}\,\alpha_{22}\alpha_{32} & \sqrt{2}\,\alpha_{23}\alpha_{33} & \alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{23}\alpha_{32} & \alpha_{21}\alpha_{33}+\alpha_{23}\alpha_{31} & \alpha_{21}\alpha_{32}+\alpha_{22}\alpha_{31} \\ \sqrt{2}\,\alpha_{11}\alpha_{31} & \sqrt{2}\,\alpha_{12}\alpha_{32} & \sqrt{2}\,\alpha_{13}\alpha_{33} & \alpha_{12}\alpha_{33}+\alpha_{13}\alpha_{32} & \alpha_{11}\alpha_{33}+\alpha_{13}\alpha_{31} & \alpha_{11}\alpha_{32}+\alpha_{12}\alpha_{31} \\ \sqrt{2}\,\alpha_{11}\alpha_{21} & \sqrt{2}\,\alpha_{12}\alpha_{22} & \sqrt{2}\,\alpha_{13}\alpha_{23} & \alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22}+\alpha_{12}\alpha_{21} \end{bmatrix}.$$

За счет выбора трех свободных параметров α_{ij}, определяющих положение системы координат (13), число независимых компонент E_{ijkl} можно уменьшить с 21 до 18 [1, 62]. Для различных случаев симметрии в строении анизотропных материалов число независимых постоянных E_{ijkl} еще уменьшается [1–3, 25]. Подробный вывод и запись матрицы модулей упругости A_{ij} с минимальным числом независимых постоянных для всех кристаллографических сингоний приведены в монографии Ф. И. Федорова [25]. Вопросы симметрии тензора E_{ijkl} относительно кристаллографических групп рассматриваются также в [63–79].

В. В. Новожилов предложил свертку $E_{ijkk} = K_{ij}$ и главные оси этого тензора назвал главными осями анизотропии [1]. При всесторонней деформации ($\varepsilon_{kl} = \varepsilon\delta_{kl}$) напряжения равны: $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon\delta_{kl} = E_{ijkk}\varepsilon = K_{ij}\varepsilon$. К. Ф. Черных ввел специальный базис [18], который несколько упрощает запись закона Гука. Этот базис оказался собственным только для изотропного материала и материалов кубической сингонии и не является собственным базисом для материалов других сингоний [45]. В [17, 18, 20–22] дано тригонометрическое представление постоянных упругости, обеспечивающее положительную определенность энергии деформации.

Возможные формы функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга исследовались в работах [80–87]. В [88–90] дано разложение девиатора на чистые сдвиги.

В работах [91–95] применительно к конкретным материалам исследовались частные ограничения на константы упругости. Постоянные упругости для различных веществ и кристаллов, а также библиография по этому вопросу приведены в работах [96–100].

Большое значение для понимания математической и механической структуры тензора E_{ijkl} имеет представление о собственных модулях упругости и собственных состояниях упругого материала. Для изотропного материала собственные модули и состояния известны со времен Д. Г. Стокса (см. изложенное выше и работу [3]). В последние десятилетия собственные модули и состояния использовались в работах [34, 35, 37–52, 101–107].

Суть данного подхода состоит в следующем. Собственный модуль (собственное значение) Λ и собственный тензор (собственное состояние упругого материала) t_{ij} определяются из линейной системы

$$E_{ijkl}t_{kl} = \Lambda t_{ij}, \qquad i,j,k,l = 1,2,3. \tag{14}$$

Существуют шесть собственных модулей Λ_p ($p = \overline{1,6}$), которым соответствуют шесть собственных тензоров напряжений $t_{ij}^{(p)}$, удовлетворяющих условиям ортогональности $t_{ij}^{(p)}t_{ij}^{(q)} = \delta_{pq}$. Тензоры $t_{ij}^{(p)}$ образуют индуцированный тензором E_{ijkl} ортонормированный базис в пространстве симметричных тензоров второго ранга. Любые симметричные тензоры второго ранга, в частности тензоры напряжений и деформаций, разлагаются по этому базису:

$$\sigma_{ij} = k_1^{(\sigma)} t_{ij}^{(1)} + k_2^{(\sigma)} t_{ij}^{(2)} + \ldots + k_6^{(\sigma)} t_{ij}^{(6)}, \qquad \varepsilon_{ij} = k_1^{(\varepsilon)} t_{ij}^{(1)} + k_2^{(\varepsilon)} t_{ij}^{(2)} + \ldots + k_6^{(\varepsilon)} t_{ij}^{(6)}$$

$$(k_p^{(\sigma)} = \sigma_{ij} t_{ij}^{(p)}, \qquad k_p^{(\varepsilon)} = \varepsilon_{ij} t_{ij}^{(p)}, \qquad p = \overline{1,6}\,).$$

Соотношения закона Гука (2) эквивалентны равенствам

$$k_1^{(\sigma)} = \Lambda_1 k_1^{(\varepsilon)}, \qquad k_2^{(\sigma)} = \Lambda_2 k_2^{(\varepsilon)}, \qquad k_3^{(\sigma)} = \Lambda_3 k_3^{(\varepsilon)},$$

$$k_4^{(\sigma)} = \Lambda_4 k_2^{(\varepsilon)}, \qquad k_5^{(\sigma)} = \Lambda_5 k_2^{(\varepsilon)}, \qquad k_6^{(\sigma)} = \Lambda_6 k_6^{(\varepsilon)}.$$

Квадратичная форма (4) приводится к диагональному виду

$$2\Phi = \sum_{p=1}^{6} \Lambda_p (k_p^{(\varepsilon)})^2 = \sum_{p=1}^{6} \frac{(k_p^{(\sigma)})^2}{\Lambda_p},$$

условием ее положительной определенности является положительность всех Λ_p ($p = \overline{1,6}\,$). Тензор E_{ijkl} можно представить в виде

$$E_{ijkl} = \sum_{p=1}^{6} \Lambda_p t_{ij}^{(p)} t_{kl}^{(p)}. \tag{15}$$

С учетом обозначений (11), (12) система (14) принимает вид

$$A_{ij} t_j = \Lambda t_i, \qquad i, j = \overline{1,6}. \tag{16}$$

Линейная система (16) имеет ненулевое решение, если собственные модули Λ удовлетворяют уравнению $|A_{ij} - \Lambda \delta_{ij}| = 0$. Раскрывая этот определитель, получаем уравнение шестой степени относительно Λ:

$$\Lambda^6 - I_1 \Lambda^5 + I_2 \Lambda^4 - I_3 \Lambda^3 + I_4 \Lambda^2 - I_5 \Lambda + I_6 = 0, \tag{17}$$

где коэффициенты I_k ($k = \overline{1,6}\,$) — инварианты тензора модулей упругости E_{ijkl} [46]. Если соответствующие корням уравнения (17) ненулевые решения системы (16) ортонормированы:

$$t_i^{(p)} t_i^{(q)} = \delta_{pq}, \qquad i, p, q = \overline{1,6}, \tag{18}$$

то закон Гука (12) записывается в виде

$$\sigma_i t_i^{(1)} = \Lambda_1 \varepsilon_j t_j^{(1)}, \qquad \sigma_i t_i^{(2)} = \Lambda_2 \varepsilon_j t_j^{(2)}, \qquad \sigma_i t_i^{(3)} = \Lambda_3 \varepsilon_j t_j^{(3)},$$

$$\sigma_i t_i^{(4)} = \Lambda_4 \varepsilon_j t_j^{(4)}, \qquad \sigma_i t_i^{(5)} = \Lambda_5 \varepsilon_j t_j^{(5)}, \qquad \sigma_i t_i^{(6)} = \Lambda_6 \varepsilon_j t_j^{(6)}.$$

Модули упругости и коэффициенты податливости задаются шестью собственными модулями $\Lambda_k > 0$ ($k = \overline{1,6}\,$) и 15 параметрами $t_i^{(p)}$, остающимися свободными после выполнения условий ортонормированности (18). Три параметра $t_i^{(p)}$ определяются выбором системы координат, остальные являются характеристиками анизотропного материала.

Я. К. Рыхлевский в работах [34, 40] ввел термин “собственное упругое состояние” и на основе структурной формулы (15) для E_{ijkl} предложил классификацию анизотропных материалов, получил явные формулы для объемного модуля, модулей Юнга, коэффициентов Пуассона, модулей сдвига, выраженные через собственные модули и состояния. Позднее на эту тему появились публикации [35, 41–46, 107]; имеются и более ранние работы, как отечественные [37–39, 103, 105, 106], так и зарубежные [101, 102, 104], в которых также рассмотрены собственные модули и состояния для тензора модулей упругости E_{ijkl}. За рубежом продолжают появляться работы, в которых полученные результаты повторяются (см., например, [47–52, 108]).

В работах [23, 24] введены собственные числа и собственные тензоры для тензора E^*_{ijkl} (см. (7)), обладающего симметрией вида (5). Собственные числа и векторы найдены для матриц коэффициентов E^*_{ijkl} материалов кристаллографических сингоний. В зависимости от числа различных собственных чисел и их кратностей уравнения движения (6) разбиваются на 32 класса. В [35, 44–46] предложена классификация анизотропных материалов, несколько отличающаяся от классификации Я. К. Рыхлевского. В работах [35, 44] собственные состояния $t_i^{(p)}$ построены в общем виде в зависимости от 15 произвольных параметров. Показано, что любые ортонормированные собственные состояния $t_i^{(p)}$ получаются ортогонализацией и нормированием произвольной треугольной матрицы.

Для материала, традиционно называемого изотропным, получаем

$$\Lambda_1 = 3\lambda + 2\mu, \qquad \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = \Lambda_5 = \Lambda_6 = 2\mu, \qquad E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\mu\delta_{ijkl},$$

где λ, μ — постоянные Ламе [2, 4], при этом собственные состояния имеют вид

$$\begin{gathered} t^{(1)} = (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 0,\ 0,\ 0), \qquad t^{(2)} = (1/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6},\ -2/\sqrt{6},\ 0,\ 0,\ 0), \\ t^{(3)} = (1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0), \qquad t^{(4)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0), \\ t^{(5)} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0), \qquad t^{(6)} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1). \end{gathered} \tag{19}$$

Первое собственное состояние $t^{(1)}$ является шаровым тензором, остальные — девиаторами.

Анизотропные материалы (кристаллы) обычно классифицируют по свойствам симметрии относительно ортогональных преобразований системы координат [2, 3, 25]. Анизотропные материалы можно также классифицировать в зависимости от числа различных собственных модулей Λ_p и их кратностей [34, 35, 40, 44, 46]. По числу различных собственных модулей Λ_p все анизотропные материалы делятся на группы (классы), которые в свою очередь подразделяются на подклассы — в зависимости от кратности собственных модулей. Таким образом получается 32 класса анизотропных материалов. Более детальная классификация анизотропных материалов должна проводиться в зависимости от вида собственных тензоров $t_i^{(p)}$.

Во многих монографиях по теории упругости [3. С. 114; 109. С. 100; 110. С. 25] сказано, что материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона в опытах не обнаружено. В настоящее время созданы композитные материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона [111–120]. В работе [121] с целью доказать невозможность существования материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона вводится некоторое искусственное разделение напряженного и деформированного состояний на составляющие и необоснованно критикуется традиционное для изотропных материалов разделение тензоров напряжений и деформаций на шаровую и девиаторные составляющие.

В работе [45] найдены собственные модули упругости и состояния для материалов всех кристаллографических сингоний (см. также [37]). По свойствам симметрии эти материалы (кристаллы) подразделяются на семь сингоний и изотропную среду [25]. Для материалов кубической сингонии собственные состояния $t_i^{(p)}$ задаются также формулами (19). В случае триклинной сингонии матрица A_{ij} имеет общий вид. По свойствам симметрии материалы триклинной сингонии не отличаются друг от друга, однако в зависимости от собственных модулей и состояний могут быть качественно различными [34, 40, 44, 46]. В работе [18] базис (19) предлагается использовать для материалов всех сингоний (см. также [17, 20–22]).

Имеется ряд работ, в которых даны различные представления тензоров E_{ijkl} или S_{ijkl}, отличные от представления через собственные упругие состояния [69, 122–137], исследуются ограничения, обеспечивающие положительную определенность удельной энергии деформации [138, 139], изучаются тензор E^*_{ijkl} (см. (7)) [140–143] и инварианты тензора E_{ijkl} [62, 144–157].

В [55, 56] для констант упругости предложено представление

$$A_{ij} = d_1c_{i1}c_{j1} + d_2c_{i2}c_{j2} + d_3c_{i3}c_{j3} + d_4c_{i4}c_{j4} + d_5c_{i5}c_{j5} + d_6c_{i6}c_{j6}, \tag{20}$$

где

$$c_{ip} = 0 \quad (p > i), \qquad c_{11} = \ldots = c_{66} = 1;$$
$$d_1 > 0, \qquad d_2 > 0, \qquad d_3 > 0, \qquad d_4 > 0, \qquad d_5 > 0, \qquad d_6 > 0. \tag{21}$$

Условия (21) необходимы и достаточны для положительной определенности матриц A_{ij}, B_{ij}. Задавая шесть положительных чисел d_k и 15 произвольных параметров c_{ik} $(i > k)$, по формулам (20) находим диапазоны величин A_{ij} или B_{ij} для всех анизотропных материалов, свойства которых описываются законом Гука (12).

Из соотношений (8)–(10) для модулей упругости и коэффициентов Пуассона в направлении координатных осей имеем следующие выражения:

$$1/E_1 = B_{11} = d_1, \qquad 1/E_2 = B_{22} = d_1c_{21}^2 + d_2, \qquad 1/E_3 = B_{33} = d_1c_{31}^2 + d_2c_{32}^2 + d_3,$$
$$-\nu_{21} = c_{21}, \qquad -\nu_{31} = c_{31},$$
$$-\nu_{12} = \frac{d_1c_{21}}{d_1c_{21}^2 + d_2}, \qquad -\nu_{32} = \frac{d_1c_{31}c_{21} + d_2c_{32}}{d_1c_{21}^2 + d_2},$$
$$-\nu_{13} = \frac{d_1c_{31}}{d_1c_{31}^2 + d_2c_{32}^2 + d_3}, \qquad -\nu_{23} = \frac{d_1c_{31}c_{21} + d_2c_{32}}{d_1c_{31}^2 + d_2c_{32}^2 + d_3}, \tag{22}$$
$$1/(2\mu_{23}) = B_{44} = d_1c_{41}^2 + d_2c_{42}^2 + d_3c_{43}^2 + d_4,$$
$$1/(2\mu_{13}) = B_{55} = d_1c_{51}^2 + d_2c_{52}^2 + d_3c_{53}^2 + d_4c_{54}^2 + d_5,$$
$$1/(2\mu_{12}) = B_{66} = d_1c_{61}^2 + d_2c_{62}^2 + d_3c_{63}^2 + d_4c_{64}^2 + d_5c_{65}^2 + d_6.$$

В (22) величины B_{ij} представлены в форме (20). Придавая параметрам $d_k > 0$, c_{ik} $(i > k)$, n_i, m_i в соотношениях (8)–(10), (22) произвольные значения, получаем допустимые пределы изменения соответствующей константы упругости для любого анизотропного материала. В [56] рассмотрены допустимые пределы изменения констант упругости для материалов всех кристаллографических сингоний. Границы изменения коэффициентов Пуассона рассматривались в работах [95, 120, 121, 158–163].

В работе [164] исследована следующая задача об идентификации анизотропных материалов. В декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) заданы компоненты тензора E_{ijkl}, обладающие свойствами симметрии (5); в этой системе координат заданы также компоненты тензора четвертого ранга Z_{ijkl}, связанные условиями симметрии, аналогичными равенствам (5); требуется определить, существует ли такая декартова система координат $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ (см. (13)), в которой выполняются равенства

$$Z_{ijkl} = \hat{E}_{ijkl}, \qquad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Для решения этой задачи построены и реализованы вычислительные алгоритмы. Другой подход к задаче идентификации основан на построении полной системы полиномиальных инвариантов относительно ортогональных преобразований координат [165]. Такая система пока не построена [34, 166]. Исследованию этого вопроса посвящены работы [12, 126, 144–148, 150–153, 155–157]. Заметим, что знание инвариантов тензора модулей упругости имеет значение в теории определяющих соотношений [146] и при рациональном проектировании слоистых композитных материалов [144].

В соответствии с неприводимыми линейными представлениями ортогональной группы преобразований (13) [122, 133–137, 167–169] тензор E_{ijkl} допускает разложение на постоянную, девиаторные и нонорную части:

$$E_{ijkl} = \lambda^*\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^*(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (M_{ij}\delta_{kl} + M_{kl}\delta_{ij}) + \\ + (P_{ik}\delta_{lj} + P_{lj}\delta_{ik} + P_{il}\delta_{jk} + P_{jk}\delta_{il}) + N_{ijkl}, \qquad (23)$$

где

$$\lambda^* = (2E_{iikk} - E_{ikki})/15, \qquad \mu^* = (3E_{ikki} - E_{iikk})/30,$$
$$M_{ij} = [5(E_{ijkk} - E_{sskk}\delta_{ij}/3) - 4(E_{ikkj} - E_{skks}\delta_{ij}/3)]/7,$$
$$P_{ij} = [-2(E_{ijkk} - E_{sskk}\delta_{ij}/3) + 3(E_{ikkj} - E_{skks}\delta_{ij}/3)]/7.$$

При этом выполняются равенства

$$M_{ii} = P_{ii} = 0, \qquad N_{ijkk} = 0, \quad i,j,k = 1,2,3.$$

Тензор N_{ijkl}, называемый нонором, имеет девять независимых компонент и симметричен по всем парам индексов. Каждый из девиаторов M_{ij} и P_{ij} имеет пять независимых компонент. Независимыми являются также константы λ^*, μ^*. Для тензора S_{ijkl} также имеет место разложение вида (23). В [169] приведены все величины правой части (23) для всех кристаллографических сингоний и другие варианты разложений вида (23). В [170] предложен тензор E_{ijkl} вида

$$E_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + c(h_{ij}H_{kl} + h_{kl}H_{ij} + h_{ik}H_{lj} + h_{lj}H_{ik} + h_{il}H_{jk} + h_{jk}H_{il}),$$

где $h_{ij} = p_iq_j + q_ip_j$; $H_{ij} = p_ip_j - q_iq_j$; p_i, q_j — компоненты единичных ортогональных векторов; a, b, c — постоянные. Выражение в скобках при коэффициенте c является нонором.

Исследованию общих вопросов, связанных с анизотропией, посвящены работы [171, 172]. В работах [167, 168, 173, 174] с использованием линейных инвариантных неприводимых разложений тензора модулей упругости приведены примеры упругих анизотропных материалов, обладающих необычными свойствами. В работах [175–178] получены явные формулы для анизотропных материалов, проводящих чисто продольные и поперечные волны при любом направлении волновой нормали. Существование подобных сред отмечено в [167, 173, 174]. В [167, 177] приведены примеры анизотропных материалов, у которых модуль Юнга $1/E_n = n_in_jS_{ijkl}n_kn_l$ в направлении n_i не зависит от n_i и, как и в случае изотропного материала, одинаков для всех направлений ($1/E_n = B_{11}$).

Понятие собственных упругих состояний нашло применение при построении уравнений теории пластичности [41–43, 179–194], критериев текучести [103, 108, 195–202], при изучении упругих тел с ограничениями [104, 203–206], в теории нелинейной анизотропной упругости [207].

В работе [195] подробно исследованы разложения удельной энергии деформации $2\Phi = \sigma_{ij}S_{ijkl}\sigma_{kl}$ и квадратичные критерии предельного упругого состояния $\sigma_{ij}H_{ijkl}\sigma_{kl} \leqslant 2k^2$. Данный подход развивается также в работах [197–200]. Критерии прочности и разрушения анизотропных сред рассмотрены в [202, 208–210].

В работах [211–213] предпринята попытка использовать собственные упругие состояния для изучения уравнений движения анизотропных упругих тел. В работах [159–161, 214–219] исследуются пределы изменения констант упругости, экстремальные значения модулей Юнга, сдвига, коэффициентов Пуассона.

В работах [111–118] изучаются нетрадиционные материалы с отрицательными коэффициентами Пуассона. В ряде работ [95, 121, 158] сделаны попытки доказать, что коэффициент Пуассона не может быть отрицательным. В работе [24] приведены матрицы модулей упругости материалов с отрицательными коэффициентами Пуассона, при этом уравнения движения для каждого смещения не зависят друг от друга. В [120] обобщены сведения о материалах с отрицательными коэффициентами Пуассона, называемых ауксетиками.

В работах [220–240] используются понятия собственных модулей и состояний и исследуются различные аспекты анизотропии в линейной теории упругости. В работе [241] предложены модули упругости, учитывающие изменение площадей элементов при деформировании. Вопросы анизотропии свойств упругости в двумерном случае рассмотрены в [242, 243]. Свойства и приложения тензоров четвертого ранга вида (5) рассмотрены также в работах [244–247].

Авторы выражают благодарность Н. Ф. Морозову, по инициативе которого написана данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
3. **Ляв А.** Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
6. **Бехтерев П. В.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука // Сообщ. о науч.-техн. работах в Респ. Л.: Науч. хим.-техн. изд-во, 1924. Вып. 12. С. 20–23.
7. **Бехтерев П. В.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука // Сообщ. о науч.-техн. работах в Респ. Л.: Науч. хим.-техн. изд-во, 1925. Вып. 17. С. 5–9.
8. **Бехтерев П. В.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1925. Т. 57, вып. 3/4. С. 359–392.
9. **Бехтерев П. В.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы. Ч. 1. Л.: Изд. авт., 1925.
10. **Бехтерев П. В.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Ч. 2. Л.: Изд. авт., 1925.
11. **Bechterew P.** Analytische Untersuchung des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes. Anwendung der Methode der Koordinatentransformation // Z. Kristallogr. 1925. Bd 62, H. 3/4. S. 223–254.
12. **Бехтерев П. В.** Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение метода преобразования координат // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1926. Т. 58, вып. 3. С. 415–446.
13. **Bechterew P.** Analytische Untersuchung des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes. Anwendung der Lehre von der potentiellen Energie und dem Prinzip der minimalen Arbeit // Z. Kristallogr. 1926. Bd 64, H. 5/6. S. 373–399.
14. **Бехтерев П. В.** К систематике констант упругости анизотропных веществ // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва при Ленингр. ун-те. Ч. физ. 1928. Т. 60, вып. 4. С. 351–353.

15. **Bechterew P.** Zur Systematik der Elastizitatsconstanten anisotroper Stoffe // Z. Kristallogr. 1929. Bd 71, H. 3. S. 274–276.
16. **Бехтерев П. В.** Определяющие коэффициенты упругости и деформаций кристаллов с приложением к изотропии // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4, вып. 9. С. 954–981.
17. **Новожилов В. В., Черных К. Ф.** Об упругих постоянных линейной теории упругости // Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1982. С. 215–221.
18. **Черных К. Ф.** Симметричные функции симметричных тензоров в анизотропной теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 5–14.
19. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1973. Т. 1.
20. **Черных К. Ф.** Анизотропия материала (линейная теория) // Механика деформируемых тел и конструкций. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1985. С. 410–419.
21. **Черных К. Ф.** Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986.
22. **Черных К. Ф.** Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
23. **Остросаблин Н. И.** О матрице коэффициентов в уравнениях линейной теории упругости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 1. С. 63–65.
24. **Остросаблин Н. И.** Об уравнениях линейной теории упругости // ПМТФ. 1992. № 3. С. 131–140.
25. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
26. **Тимошенко С. П.** История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
27. **Todhunter I.** A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to Lord Kelvin. V. 1. Galilei to Saint-Venant. 1639–1850 / I. Todhunter, K. Pearson. N. Y.: Dover. Publ., Inc., 1960.
28. **Todhunter I.** A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to Lord Kelvin. V. 2. Saint-Venant to Lord Kelvin. Pt 1 / I. Todhunter, K. Pearson. N. Y.: Dover Publ., Inc., 1960.
29. **Todhunter I.** A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to Lord Kelvin. V. 2. Saint-Venant to Lord Kelvin. Pt 2 / I. Todhunter, K. Pearson. N. Y.: Dover Publ., Inc., 1960.
30. **Трусделл К.** Очерки истории механики. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
31. **Трусделл К.** Этапы развития понятия напряжения // Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 439–447.
32. **Черепанов Г. П.** Равнопрочная башня // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2005. № 5. С. 42–51.
33. **Борн М.** Динамическая теория кристаллических решеток / М. Борн, Хуан Кунь. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
34. **Рыхлевский Я.** О законе Гука // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 420–435.
35. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 66. С. 113–125.
36. **Thomson W. (Lord Kelvin).** On six principal strains of an elastic solid // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1856. V. 166. P. 495–498.
37. **Минкевич Л. М.** Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры // Вопросы динамики механических систем виброударного действия. Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1973. С. 107–110.

38. **Минкевич Л. М.** Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры // Материалы 3-й Науч. конф. Томск. ун-та по математике и механике. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1973. Вып. 2. С. 115–116.
39. **Минкевич Л. М.** Механика сплошной (анизотропной) среды. Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1973. Ч. 2.
40. **Рыхлевский Я.** Математическая структура упругих тел. М., 1983. (Препр./ АН СССР. Ин-т проблем механики; № 217).
41. **Чанышев А. И.** О пластичности анизотропных сред // ПМТФ. 1984. № 2. С. 149–151.
42. **Чанышев А. И.** К решению задач о предельных нагрузках для жесткопластического анизотропного тела // ПМТФ. 1984. № 5. С. 151–154.
43. **Ревуженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И.** Математические модели упругопластических тел // Актуальные проблемы вычислительной математики и математическое моделирование. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. С. 108–119.
44. **Остросаблин Н. И.** О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 71. С. 82–96.
45. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.
46. **Остросаблин Н. И.** О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // ПМТФ. 1986. № 4. С. 127–135.
47. **Mehrabadi M. M., Cowin S. C.** Eigentensors of linear anisotropic elastic materials // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1990. V. 43, N 1. P. 15–41.
48. **Theocaris P. S.** The compliance fourth-rank tensor for the transtropic material and its spectral decomposition // Proc. Nat. Acad. Sci. Athens. 1989. V. 64, N 1. P. 80–100.
49. **Theocaris P. S., Philippidis T. P.** Elastic eigenstates of a medium with transverse isotropy // Arch. Mech. Stos. 1989. V. 41, N 5. P. 717–724.
50. **Theocaris P. S., Philippidis T. P.** Variational bounds on the eigenangle ω of transversely isotropic materials // Acta Mech. 1990. V. 85, N 1/2. P. 13–26.
51. **Theocaris P. S., Philippidis T. P.** Spectral decomposition of compliance and stiffness fourth-rank tensors suitable for orthotropic materials // Z. angew. Math. Mech. 1991. Bd 71, H. 3. S. 161–171.
52. **Sutcliffe S.** Spectral decomposition of the elasticity tensor // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59, N 4. P. 762–773.
53. **Voigt W.** Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig; Berlin: Teubner, 1910.
54. **Сиротин Ю. И.** Основы кристаллофизики / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. М.: Наука, 1975.
55. **Остросаблин Н. И.** О наитеснейших границах констант упругости и приведении удельной энергии деформации к каноническому виду // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. № 2. С. 90–94.
56. **Остросаблин Н. И.** Наитеснейшие границы изменения практических констант упругости анизотропных материалов // ПМТФ. 1992. № 1. С. 107–114.
57. **Секерж-Зенькович Я. И.** К расчету на устойчивость листа фанеры как анизотропной пластинки // Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1931. Вып. 76. С. 3–26.
58. **Ченцов Н. Г.** Исследование фанеры как ортотропной пластинки // Техн. заметки Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1936. № 91. С. 1–27.
59. **Рабинович А. Л.** Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов // Тр. Центр. аэрогидродинам. ин-та. 1946. № 582.

60. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
61. **Ашкенази Е. К.** Анизотропия конструкционных материалов / Е. К. Ашкенази, Э. В. Ганов. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1980.
62. **Остросаблин Н. И.** Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
63. **Rathkjen A.** Symmetry relations for anisotropic materials // Colloq. Intern. CNRS. 1982. N 295. P. 47–63.
64. **Ilcewicz L. B., Narasimhan M. N. L., Wilson J. B.** Micro and macro material symmetries in generalized continua // Intern. J. Engng Sci. 1986. V. 24, N 1. P. 97–109.
65. **Dresselhaus M. S., Dresselhaus G.** Note on sufficient symmetry conditions for isotropy of the elastic moduli tensor // J. Matter. Res. 1991. V. 6, N 5. P. 1114–1118.
66. **Cowin S. C., Mehrabadi M. M.** The mirror symmetries of anisotropic elasticity // Anisotropy, inhomogeneity and nonlinearity in solid mechanics: Proc. of the IUTAM–ISIMM symp., Nottingham (U.K.), 30 Aug. — 3 Sept. 1994. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 31–36.
67. **Cowin S. C., Mehrabadi M. M.** Anisotropic symmetries of linear elasticity // Appl. Mech. Rev. 1995. V. 48, N 5. P. 247–285.
68. **Ting T. C. T.** Generalized Cowin — Mehrabadi theorems and a direct proof that the number of linear elastic symmetries is eight // Intern. J. Solids Struct. 2003. V. 40, N 25. P. 7129–7142.
69. **Cowin S. C., Mehrabadi M. M.** On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1987. V. 40, N 4. P. 451–476.
70. **Hayes M., Norris A. N.** Static implications of the existence of a plane of symmetry in an anisotropic elastic solid // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1992. V. 45, N 2. P. 141–147.
71. **Forte S., Vianello M.** Symmetry classes for elasticity // J. Elast. 1996. V. 43, N 2. P. 81–108.
72. **Cowin S. C., Yang G. J.** Material symmetry optimization by Kelvin modes // J. Engng Math. 2000. V. 37, N 1–3. P. 27–43.
73. **Cowin S. C., Mehrabadi M. M.** On the structure of the linear anisotropic elastic symmetries // J. Mech. Phys. Solids. 1992. V. 40, N 7. P. 1459–1472.
74. **Bos L., Gibson P., Kotchetov M., Slawinski M.** Classes of anisotropic media: a tutorial // Studia Geophysica Geodaetica. 2004. V. 48, N 1. P. 265–287.
75. **Baerheim R.** Classification of symmetry by means of Maxwell multipoles // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. V. 51, N 1. P. 73–103.
76. **Рыхлевский Я.** Симметрия тензорных функций и спектральная теорема // Успехи механики (Варшава). 1998. Т. 11, вып. 3. С. 77–125.
77. **Bóna A., Bucataru I., Slawinski M. A.** Characterization of elasticity-tensor symmetries using SU(2) // J. Elast. 2004. V. 75, N 3. P. 267–289.
78. **Мадудин В. Н., Садаков О. С., Апайчев М. В.** Соображения симметрии в формулировке закона линейной упругости / Челяб. политехн. ин-т. Челябинск, 1990. Деп. в ВИНИТИ 14.06.90, № 3423-В90.
79. **Bóna A., Bucataru I., Slawinski M. A.** Coordinate-free characterization of the symmetry classes of elasticity tensors // J. Elast. 2007. V. 87, N 2/3. P. 109–132.
80. **Basista M.** Tensor functions representations as applied to deriving constitutive relations for skewed anisotropy // Z. angew. Math. Mech. 1985. Bd 65, H. 3. S. 151–158.
81. **Черных К. Ф.** О формах связи между симметричными тензорами в механике сплошных сред // Инж. журн. Механика твердого тела. 1967. № 3. С. 42–51.

82. **Новожилов В. В.** О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 5. С. 734–812.
83. **Аннин Б. Д.** Формула Лагранжа — Сильвестра для тензорной функции, зависящей от двух тензоров // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 4. С. 743–744.
84. **Аннин Б. Д.** Анизотропные тензорные функции // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1972. Вып. 11. С. 94–97.
85. **Георгиевский Д. В.** Тензорно-нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 2. С. 150–176.
86. **Ильюшин А. А.** О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 6. С. 641–666.
87. **Остросаблин Н. И.** О функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 134–137.
88. **Зубов Л. М., Рудев А. Н.** О разложении девиатора на чистые сдвиги // Изв. вузов. Сев.-Кавк. региона. Естеств. науки. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. 2000. Спецвыпуск. С. 79–85.
89. **Зубов Л. М., Рудев А. Н.** О каноническом представлении девиатора симметричного тензора // Докл. РАН. 1998. Т. 385, № 1. С. 44–47.
90. **Norris A. N.** Pure shear axes and elastic strain energy // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2006. V. 59, N 4. P. 551–561.
91. **Lempriere B. M.** Poisson's ratio in orthotropic materials // AIAA J. 1968. V. 6, N 11. P. 2226–2227.
92. **Сидорин Я. С.** Упругие и прочностные характеристики стеклопластика при сжатии // Механика полимеров. 1970. № 5. С. 866–869.
93. **Грах И. И., Сидорин Я. С.** Об ограничениях на упругие коэффициенты анизотропных твердых тел // Механика полимеров. 1974. № 1. С. 84–88.
94. **Абрамчук С. С., Булдаков В. П.** Допустимые значения коэффициентов Пуассона анизотропных материалов // Механика композит. материалов. 1979. № 2. С. 235–239.
95. **Григолюк Э. И., Король Е. З.** Некоторые неравенства для коэффициентов Пуассона в линейной термоупругости // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 1. С. 43–45.
96. **Александров К. С., Рыжова Т. В.** Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. 1961. Т. 6, вып. 2. С. 289–314.
97. **Хантингтон Г.** Упругие постоянные кристаллов. 1 // Успехи физ. наук. 1961. Т. 74, вып. 2. С. 303–352.
98. **Хантингтон Г.** Упругие постоянные кристаллов. 2 // Успехи физ. наук. 1961. Т. 74, вып. 3. С. 461–520.
99. **Францевич И. Н.** Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справ. / И. Н. Францевич, Ф. Ф. Воронов, С. А. Бакута. Киев: Наук. думка, 1982.
100. **Беликов Б. П.** Упругие свойства породообразующих минералов и горных пород / Б. П. Беликов, К. С. Александров, Т. В. Рыжова. М.: Наука, 1970.
101. **Chastenet de Géry J.** Une représentation intrinsèque simple du tenseur d'énergie de déformation (cas anisotrope) par des opérateurs linéaires de l'espace à trois dimensions // Comptes rendus Acad. sci. 1959. T. 248, N 12. P. 1765–1768.
102. **d'Auriac P. A.** Étude du tenseur d'anisotropie, basée sur la représentation d'un tenseur symétrique dans un espace E_3 par un vecteur dans un espace E_6 // Comptes rendus Acad. sci. 1971. T. 272, N 9. P. A612–A613.

103. **Толоконников Л. А., Матченко Н. М.** О представлениях предельных условий для начально-анизотропных тел // Пробл. прочности. 1974. № 3. С. 54–56.
104. **Pipkin A. C.** Constraints in linearly elastic materials // J. Elast. 1976. V. 6, N 2. P. 179–193.
105. **Александров К. С.** Упругие свойства анизотропных сред: Автореф. дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 1967.
106. **Лурье К. А.** Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 6. С. 86–93.
107. **Chen Shaoting.** New concepts of elasticity theory and an application // Acta Mech. Sinica. 1984. V. 16, N 3. P. 259–274.
108. **Schreyer H. Z., Zuo Q. H.** Anisotropic yield surfaces based on elastic projection operators // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62, N 3. P. 780–785.
109. **Папкович П. Ф.** Теория упругости. Л.; М.: Оборонгиз, 1939.
110. **Ландау Л. Д.** Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1965.
111. **Almgren R. F.** An isotropic three-dimensional structure with Poisson's ratio = −1 // J. Elast. 1985. V. 15, N 4. P. 427–431.
112. **Evans K.** Tailoring the negative Poisson ratio // Chem. Industry. London. 1990. N 20. P. 654–657.
113. **Lakes R. C.** Saint-Venant end effects for materials with negative Poisson's ratios // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59, N 4. P. 744–746.
114. **Neale P. J., Alderson K. L., Pickles A. P., Evans K. E.** Negative Poisson's ratio of microporous polyethylene in compression // J. Mater. Sci. Lett. 1993. V. 12, N 19. P. 1529–1532.
115. **Warren T. L.** Negative Poisson's ratio in a transversely isotropic foam structure // J. Appl. Phys. 1990. V. 67, N 12. P. 7591–7594.
116. **Phan-Thien N., Karihaloo B. L.** Materials with negative Poisson's ratio: a qualitative microstructural model // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1994. V. 61, N 4. P. 1001–1004.
117. **Токмакова С. П.** Срезы кристаллов с отрицательными коэффициентами Пуассона // Акустика неоднородных сред: Ежегодник Рос. акуст. о-ва. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 2001. Вып. 2. С. 127–137.
118. **Назаров В. Е., Сутин А. М.** О коэффициенте Пуассона трещиноватых сред // Акуст. журн. 1995. Т. 41, № 6. С. 932–934.
119. **Ефремов Н. С., Митюшов Е. А., Берестова С. А.** Ауксетичные свойства пространственно-армированных композитов // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: Тез. докл. 5-й Всерос. конф., Екатеринбург, 24–28 марта 2008 г. Екатеринбург: Ин-т машиноведения УрО РАН, 2008. С. 208.
120. **Конек Д. А., Войцеховски К. В., Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.** Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор) // Механика композиц. материалов и конструкций. 2004. Т. 10, № 1. С. 35–69.
121. **Саврасов В. В.** К вопросу о предельных значениях коэффициента Пуассона классического изотропного деформируемого твердого тела // Вопросы механики деформируемого твердого тела (Харьков). 1983. Вып. 4. С. 132–135.
122. **Baerheim R.** Harmonic decomposition of the anisotropic elasticity tensor // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46, N 3. P. 391–418.
123. **Backus G.** A geometrical picture of anisotropie elastie tensors // Rev. Geophys. Space Phys. 1970. V. 8, N 3. P. 633–671.
124. **Cowin S. C.** Properties of the anisotropic elasticity tensor // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1989. V. 42, N 2. P. 249–266.

125. **Cowin S. C.** Corrigendum: Properties of the anisotropy elasticity tensor // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1993. V. 46, N 3. P. 541–542.
126. **Surrel Y.** A new description of the tensors of elasticity based upon irreducible representations // Europ. J. Mech. A: Solids. 1993. V. 12, N 2. P. 219–235.
127. **Walpole L. J.** Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes: multiplication tables // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1984. V. 391, N 1800. P. 149–179.
128. **Zheng Q.-S., Zou W.-N.** Irreducible decompositions of physical tensors of high orders // J. Engng Math. 2000. V. 37, N 1–3. P. 273–288.
129. **Podio-Guidugli P., Virga E. G.** Transversely isotropic elasticity tensors // Proc. Roy. Soc. London. 1987. V. 411, N 1840. P. 85–93.
130. **Onat E. F.** Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids // Intern. J. Engng Sci. 1984. V. 22, N 8–10. P. 1013–1021.
131. **Mochizuki E.** Spherical harmonic decomposition of an elastic tensor // Geophys. J. 1988. V. 93, N 3. P. 521–526.
132. **Сиротин Ю. И.** К теории идеальной упругопластичности кристаллов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 39–47.
133. **Победря Б. Е.** Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
134. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
135. **Схоутен Я. А.** Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
136. **Сиротин Ю. И.** Разложение материальных тензоров на неприводимые части // Кристаллография. 1974. Т. 19, вып. 5. С. 909–915.
137. **Pratz J.** Décomposition canonique des tenseurs de rang 4 de l'élasticité // J. méc. théor. et appl. 1983. T. 2, N 6. P. 893–913.
138. **Musgrave M. J. P.** On the constraints of positive-definite strain energy in anisotropic elastic media // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1990. V. 43, N 4. P. 605–621.
139. **Sutcu Muzaffer.** Orthotropic and transversely isotropic stress-strain relations with built-in coordinate transformations // Intern. J. Solids Struct. 1992. V. 29, N 4. P. 503–518.
140. **Norris A. N.** On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1989. V. 42, N 3. P. 413–426.
141. **Chadwick P., Norris A. N.** Conditions under which the slowness surface of an anisotropic elastic material is the union of aligned ellipsoids // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1990. V. 43, N 4. P. 589–603.
142. **Burridge R., Chadwick P., Norris A. N.** Fundamental elastodynamic solutions for anisotropic media with ellipsoidal slowness surfaces // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1993. V. 440, N 1910. P. 655–681.
143. **Bakker P. M.** About the completeness of the classification of cases of elliptic anisotropy // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1995. V. 451, N 1942. P. 367–373.
144. **Ting T. C. T.** Invariants of anisotropic elastic constants // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1987. V. 40, N 3. P. 431–448.
145. **Hahn H. T.** A derivation of invariants of fourth rank tensors // J. Compos. Mater. 1974. V. 8, N 1. P. 2–14.
146. **Betten J., Helisch W.** Irreduzible Invarianten eines Tensors vierter Stufe // Z. angew. Math. Mech. 1992. Bd 72, H. 1. S. 45–57.
147. **Boehler J. P., Kirillov A. A., Onat E. T.** On the polynomial invariants of the elasticity tensor // J. Elast. 1994. V. 34, N 2. P. 97–110.

148. **Liu I-Shin.** On representations of anisotropic invariants // Intern. J. Engng Sci. 1982. V. 20, N 10. P. 1099–1109.
149. **Srinivasan T. P., Nigam S. D.** Invariant elastic constants for crystals // J. Math. Mech. 1969. V. 19, N 5. P. 411–420.
150. **Verchery G.** Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité // Colloq. Intern. CNPS. 1982. N 295. P. 93–104.
151. **Vianello M.** An integrity basis for plane elasticity tensors // Arch. Mech. 1997. V. 49, N 1. P. 197–208.
152. **Ahmad Faiz.** Invariants and structural invariants of the anisotropic elasticity tensor // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55, N 4. P. 597–606.
153. **Ting T. C. T.** Anisotropic elastic constants that are structurally invariant // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2000. V. 53, N 4. P. 511–523.
154. **Smith G. F., Bao G.** Isotropic invariants of traceless symmetric tensors of three and four // Intern. J. Engng Sci. 1997. V. 35, N 15. P. 1457–1462.
155. **Sadegh A. M., Cowin S. C.** The proportional anisotropic elastic invariants // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1991. V. 58, N 1. P. 50–57.
156. **Forte S., Vianello M.** Functional bases for transversely isotropic and transversely hemitropic invariants of elasticity tensors // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. V. 51, N 4. P. 543–552.
157. **Betten J., Helisch W.** Integrity bases for a fourth-rank tensor // Anisotropy, inhomogeneity and nonlinearity in solid mechanics: Proc. of the IUTAM–ISIMM symp., Nottingham (U.K.), 30 Aug. — 3 Sept. 1994. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 37–42.
158. **Кузьменко В. А.** О предельных значениях коэффициента Пуассона // Пробл. прочности. 1985. № 11. С. 96–99.
159. **Theocaris P. S., Philippidis F. P.** True bounds on Poisson's ratio for transversely isotropic solids // J. Strain Anal. Engng Design. 1992. V. 27, N 1. P. 43–44.
160. **Theocaris P. S.** The limits of Poisson's ratio in polycrystalline bodies // J. Mater. Sci. 1994. V. 29, N 13. P. 3527–3534.
161. **Hayes M., Shuvalov A.** On the extreme values of Young's modulus, the shear modulus, and Poison's ratio for cubic materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1998. V. 65, N 3. P. 786–787.
162. **Ting T. C. T., Chen T.** Poisson's ratio for anisotropic elastic materials can have no bounds // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2005. V. 58, N 1. P. 73–82.
163. **Ting T. C. T., Barnett D. M.** Negative Poisson's ratios in anisotropic linear elastic media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2005. V. 72, N 6. P. 929–931.
164. **Аннин Б. Д., Смирнов С. В., Анненков В. А.** Идентификация анизотропных материалов // Проблемы механики деформируемого твердого тела: Межвуз. сб. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2002. С. 21–28.
165. **Гуревич Г. Б.** Основы теории алгебраических инвариантов. М.: Гостехтеоретиздат, 1948.
166. **Rychlewski J.** Unconvertional approach to linear elasticity // Arch. Mech. 1995. V. 47, N 2. P. 149–171.
167. **Rychlewski J.** A qualitative approach to Hooke's tensors. Pt 1 // Arch. Mech. 2000. V. 52, N 45. P. 737–759.
168. **Rychlewski J.** A qualitative approach to Hooke's tensors. Pt 2 // Arch. Mech. 2001. V. 53, N 1. P. 45–63.
169. **Остросаблин Н. И.** Линейные инвариантные неприводимые разложения тензора четвертого ранга модулей упругости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 2002. Вып. 120. С. 149–160.

170. **Annin B. D.** A generalization of Huber criterion // Abstr. of the Intern. symp. on developments in plasticity and fracture. Centenary of M. T. Huber criterion. Cracov (Poland), 12–14 Aug. 2004. P. 13.

171. **Остросаблин Н. И.** Об аффинных преобразованиях уравнений линейной теории упругости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 4. С. 124–134.

172. **Остросаблин Н. И.** Инвариантные постоянные упругости и определяющие соотношения упругих сред // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. акад. И. Н. Векуа, Новосибирск, 28 мая — 2 июня 2007 г. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. С. 523–524.

173. **Rychlewski J.** Elastic waves under unusual anisotropy // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49, N 11. P. 2651–2666.

174. **Rychlewski J.** Elastic waves under unusial anisotropy // Proc. of the 3rd Intern. conf. nonlinear mech., Shanghai, Aug. 17–20, 1998. Shanghai: S. n., 1998. P. 101–102.

175. **Остросаблин Н. И.** Собственные операторы и векторы для системы дифференциальных уравнений линейной теории упругости анизотропных материалов // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 5. С. 608–610.

176. **Остросаблин Н. И.** Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трем независимым волновым уравнениям // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 143–150.

177. **Остросаблин Н. И.** Упругий анизотропный материал с чисто продольными и поперечными волнами // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 2. С. 143–151.

178. **Остросаблин Н. И.** Чисто поперечные волны в упругих анизотропных средах // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 1. С. 160–172.

179. **Кравчук А. С.** О теории пластичности анизотропных материалов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 27. С. 21–29.

180. **Кравчук А. С.** Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев. М.: Наука, 1985.

181. **Садаков О. С., Мадудин В. Н., Апайчев М. В.** Простейший вариант деформационной теории пластичности анизотропных материалов / Челяб. политехн. ин-т. Челябинск, 1990. Деп. в ВИНИТИ 14.06.90, № 3424-В90.

182. **Победря Б. Е.** Теория пластичности анизотропных материалов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Горьк. ун-т, 1984. Вып. 26. С. 110–115.

183. **Победря Б. Е.** Теория течения анизотропной среды // Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 101–108.

184. **Победря Б. Е.** О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 3. С. 96–101.

185. **Apajchev M. V., Madudin V. N., Sadakov O. S.** On mathematical modelling of inelastic deformation behavior of anisotropic media // Trans. of the 10th Intern. conf. struct. mech. react. technol., Anaheim (Calif.), 14–18 Aug. 1989. Los Angeles: S. n., 1989. V. 50. P. 25–29.

186. **Szabó Z.** On the eigenvalue of the fourth-order constitutive tensor and loss of strong ellipticity on elastoplasticity // Intern. J. Plast. 1997. V. 13, N 10. P. 809–835.

187. **Bertram A., Olschewski J.** Zur Formulierung anisotroper linear anelastischer Stoffgleichungen mit Hilfe einer Projektionsmethode // Z. angew. Math. Mech. 1993. Bd 73, H. 4/5. S. T401–T403.

188. **Чанышев А. И., Афиногенов Ю. А., Поляков А. Ю., Чернов Н. Н.** Упругость и неупругость первоначально анизотропных сред. Новые взгляды и представления // Моделирование в механике. 1992. Т. 6, № 4. С. 57–62.

189. **Чанышев А. И.** Блочная феноменологическая механическая модель элемента деформируемой среды // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1999. № 4. С. 12–23.

190. **Чанышев А. И.** О форме и содержании элемента деформируемой среды // Аналитические и численные исследования в механике горных пород. Новосибирск: Ин-т горного дела СО АН СССР, 1986. С. 122–125.

191. **Матченко И. Н.** Собственные упругие и пластические состояния анизотропных сред: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Чебоксары, 2004.

192. **Берестова С. А., Митюшов Е. А.** О физических уравнениях теории пластического течения анизотропных металлов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 96–105.

193. **Аннин Б. Д.** Модели упругопластического деформирования трансверсально-изотропных материалов // Сиб. журн. индустр. математики. 1999. Т. 2, № 2. С. 3–7.

194. **Аннин Б. Д.** Поведение материалов в условиях сложного нагружения / Б. Д. Аннин, В. М. Жигалкин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.

195. **Рыхлевский Я.** Разложения упругой энергии и критерии предельности // Успехи механики (Варшава). 1984. Т. 7, вып. 3. С. 51–80.

196. **Zywick E.** On the equivalence of stress and strain based failure criteria in elastic media // Europ. J. Mech. A: Solids. 1999. V. 18, N 3. P. 391–398.

197. **Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J.** Plane elastic and limit states in anisotropic solids // Arch. Mech. 1998. V. 40, N 4. P. 379–386.

198. **Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J., Pecherski R. B.** An energy-based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state // Arch. Mech. 2003. V. 55, N 5/6. P. 431–448.

199. **Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J.** Energy-based limit criteria for anisotropic elastic materials // Arch. Mech. 2005. V. 57, N 2/3. P. 133–155.

200. **Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J.** Energy-based limit condition for transversally isotropic solids // Arch. Mech. 2002. V. 54, N 5/6. P. 497–523.

201. **Arramon Y. P., Mehrabadi M. M., Martin D. W., Cowin S. C.** A multidimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes // Intern. J. Solids Struct. 2000. V. 37, N 21. P. 2915–2935.

202. **Маковенко С. Я.** О пределах изменяемости компонент тензора прочности Мизеса — Хилла // Проблемы теории и практики в инженерных исследованиях: Тр. 33-й Науч. конф. Рос. ун-та дружбы народов, Москва, 21–25 апр. 1997 г. М.: Рос. ун-т дружбы народов, 1997. С. 126–128.

203. **Rychlewski J., Xiao Heng.** Elasticity models of multidirectional composites with strong fibres // Adv. Mech. 1991. V. 14, N 1. P. 41–78.

204. **Podio-Guidugli P., Vianello M.** Internal constraints and linear constitutive relations for transversely isotropic materials // Rend. Lincei. Mat. Appl. Ser. 9. 1991. V. 2, N 3. P. 241–248.

205. **Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J.** The influence of internal restrictions on the elastic properties of anisotropic materials // Arch. Mech. 2004. V. 56, N 3. P. 205–232.

206. **Felippa C. A., Oñate E.** Volumetric constraint models for anisotropic elastic solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2004. V. 71, N 5. P. 731–734.

207. **Маркин А. А., Соколова М. Ю.** Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // Прикл. математика и механика. 2007. Т. 71, вып. 4. С. 587–594.

208. **Зиновьев П. А., Цветков С. В.** Инвариантно-полиномиальный критерий прочности анизотропных материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 4. С. 140–147.

209. **Ву Э. М.** Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978. Т. 2. С. 401–491.

210. **Сендецки Г.** Некоторые вопросы теории упругости анизотропного тела // Композиционные материалы. Т. 7. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 1. М.: Машиностроение, 1978. С. 13–61.

211. **Guo Shao-hua.** Eigen-elastic mechanics and its variation principle // Trans. Nonferrous Metals Soc. China. 2001. V. 11, N 2. P. 283–286.

212. **Guo Shao-hua.** Eigen theory of elastic mechanics for anisotropic solids // Trans. Nonferrous Metals Soc. China. 2000. V. 10, N 2. P. 217–219.

213. **Guo Shao-hua.** Eigen theory of elastic dinamics for anisotropic solids // Trans. Nonferrous Metals Soc. China. 1999. V. 9, N 2. P. 327–331.

214. **Cazzani A., Rovati M.** Extrema of Young's modulus for elastic solids with tetragonal symmetry // Intern. J. Solids Struct. 2005. V. 42, N 18/19. P. 5057–5096.

215. **Cazzani A., Rovati M.** Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids // Intern. J. Solids Struct. 2003. V. 40, N 7. P. 1713–1744.

216. **Калинин В. А., Баюк И. О.** Термодинамические ограничения на эффективные модули упругости анизотропных горных пород // Физика Земли. 1994. № 1. С. 10–17.

217. **Wei G., Edvards S. F.** Poisson's ratio in composites of auxetics // Phys. Rev. E. 1998. V. 58, N 5b. P. 6173–6181.

218. **Ting T. C. T.** On anisotropic elastic materials for which Young's modulus $E(n)$ is independent of n or the shear modulus $G(n,m)$ is independent of n and m // J. Elast. 2005. V. 81, N 3. P. 271–292.

219. **Boulanger P., Hayes M.** On Young's modulus for anisotropic media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1995. V. 62, N 3. P. 819–820.

220. **Blinowski A., Rychlewski J.** Pure shears in the mechanics of materials // Math. Mech. Solids. 1998. V. 3, N 4. P. 471–503.

221. **Truman C. E.** An introduction to tensor elasticity // Strain. 2003. V. 39, N 4. P. 161–165.

222. **Theocaris P. S., Sokolis D. P.** Elastic eigenstates for an orthotropic medium // Докл. Бълг. АН. 2000. Т. 53, № 3. С. 45–50.

223. **Theocaris P. S., Sokolis D. P.** Spectral decomposition of the compliance fourth-rank tensor for orthotropic materials // Arch. Appl. Mech. 2000. V. 70, N 3. P. 289–306.

224. **Sadegh A. M., Cowin S. C., Luo G. M.** Inversions related to the stress-strain-fabric relationship // Mech. Mater. 1991. V. 11, N 4. P. 323–336.

225. **Rychlewski J., Zhang Jin Min.** Anisotropy degree of elastic materials // Arch. Mech. Stos. 1989. V. 41, N 5. P. 697–715.

226. **Rychlewski J.** On the detectability of constitutive laws in solid mechanics and physics // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2001. С. 67–73.

227. **Rychlewski J.** Anisotropy and proper states of materials // Anisotropy, inhomogeneity and nonlinearity in solid mechanics: Proc. of the IUTAM–ISIMM symp., Nottingham (U.K.), 30 Aug. — 3 Sept. 1994. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 19–24.

228. **Rychlewski J.** Zur Abshatzung der Anisotropie // Z. angew. Math. Mech. 1985. Bd 65, H. 6. S. 255–258.

229. **Rychlewski J.** On thermoelastic constants // Arch. Mech. Stos. 1984. V. 36, N 1. P. 77–95.

230. **Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J.** Generalized proper states for anisotropic elastic materials // Arch. Mech. Stos. 2001. V. 53, N 4/5. P. 501–518.

231. **Остросаблин Н. И.** Каноническая форма уравнений плоской статической задачи анизотропной упругости // Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва: Тез. докл. Всерос. конф., посвящ. 50-летию Ин-та гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 17–22 сент. 2007 г. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 2007. С. 136.
232. **Mehrabadi M. M., Cowin S. C., Horgan C. O.** Strain energy density bounds for linear anisotropic materials // J. Elast. 1993. V. 30, N 2. P. 191–196.
233. **Dutta M., Saha L. M.** On the number of elastic coefficients of general aeolotropic bodies // Indian. J. Phys. 1971. V. 45, N 3. P. 140–142.
234. **Cowin S. C., Mehrabadi M. M., Sadegh A. M.** Kelvin formulation of the anisotropic Hook's law // Modern theory of anisotropic elasticity and applications. Filadelphia: SIAM, 1991. P. 340–356.
235. **Cowin S. C.** Propagation of Kelvin modes // Math. Mech. Solids. 1996. V. 1, N 1. P. 25–43.
236. **Boulanger P., Hayes M.** Universal relations for wave propagation in crystal // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1991. V. 44, N 2. P. 235–240.
237. **Цвелодуб И. Ю.** К определению упругих характеристик анизотропных тел // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 3. С. 145–149.
238. **Рыхлевский Я.** К неколлинеарности упругих деформаций и напряжений // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 2. С. 101–105.
239. **Рыхлевский Я.** О единственности структурной формулы упругого тела // Теор. и прил. механика (Болгария). 1984. Т. 15, № 3. С. 39–44.
240. **Одинцова Н. Ю.** Математическая и физическая структура поликристаллических упругих тел: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2003.
241. **Scott N. H.** An area modulus of elasticity: difinition and properties // J. Elast. 2000. V. 58, N 3. P. 269–275.
242. **He Q.-C., Curnier A.** Characterising a 2d elasticity tensor by two orientation distribution functions // Anisotropy, inhomogeneity and nonlinearity in solid mechanics: Proc. of the IUTAM–ISIMM symp., Nottingham (U.K.), 30 Aug. — 3 Sept. 1994. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 25–30.
243. **He Q.-C.** A remarkable tensor in plane linear elasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1997. V. 64, N 3. P. 704–707.
244. **Betten J.** Integrity basis for a second-order and a fourth-order tensor // Intern. J. Math. Math. Sci. 1982. V. 5, N 1. P. 87–96.
245. **Остросаблин Н. И.** Разложение тензоров третьего и четвертого рангов на неприводимые части и чисто поперечные волны в упругих средах // Сб. докл. Всерос. шк.-семинара по современным проблемам механики деформируемого твердого тела, Новосибирск, 13–17 окт. 2003 г. Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2003. С. 166–171.
246. **Jaric J. P.** On the representation of symmetric isotropic 4-tensors // J. Elast. 1998. V. 51, N 1. P. 73–79.
247. **Moakher M.** Fourth-order cartesian tensors: old and new facts, notions and applications // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2008. V. 61, N 2. P. 181–203.

Поступила в редакцию 31/III 2008 г.