С. М. Никольский, Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе, *Тр. МИАН СССР*, 1979, том 150, 212–238

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ВАРИАЦИОННАЯ ПРОБЛЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ГРАНИЦЕ

В § 1 этой статьи рассматривается граничная задача первого рода для дифференциального уравнения эллиптического типа порядка $2r$ с сильным вырождением на границе. Она решается вариационным методом. Доказательство всецело базируется на теоремах вложения для весовых классов, которые только формулируются со ссылками на источники. Читатель может найти их доказательство для ограниченной области с гладкой границей во втором издании нашей книги [6, гл. 13].

Первое сообщение об этих результатах, связанное пока с теоремой существования, было опубликовано в нашей совместной статье с П. И. Лизоркиным [3], который принял участие в решении типичной граничной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Это был первый шаг в этих исследованиях.

Тогда же я написал рукопись с подробным обоснованием вопроса. Отдельными экземплярами этой рукописи пользовались в Математическом институте им. Стеклова и в Институте математики в Новосибирске.

Отметим, что мы различаем слабое и сильное вырождение на границе. В случае слабого вырождения или даже сильного, но на некоторой части границы, рассматриваемая проблема решается теми же методами, как и в случае классического уравнения эллиптического типа (без вырождения).

Однако нас интересует, прежде всего, сильное вырождение на всей границе области, которое требует изменения методов, в частности изменения (обобщения) неравенства типа Пуанкаре. Детали этих вопросов были изложены в докладе автора [5] на конференции «Equadiff» II в Братиславе (1967), где была приведена достаточно подробно литература. Впрочем эта литература, если она относилась к сильному вырождению, то только на части границы.

В § 1 доказывается существование решения.

§ 2 посвящен более поздним результатам автора, касающимся исследований дифференциальных свойств решения вплоть до границы. Некоторые леммы доказаны для дифференциального уравнения порядка $2r$, однако доведенные до конца результаты относятся только к случаю уравнения второго порядка.

Результаты § 2 вкратце анонсированы в заметке [8]. Но, к сожалению, приходится признаться, что формулировка приведенной там теоремы противоречива [1]. Мы доказываем (в § 2) другие, надеюсь теперь правильные, теоремы 2 и 2′ этого типа.

§ 3 содержит некоторые вспомогательные леммы.

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЫ

Пусть R_n есть n-мерное пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\Omega \subset R_n$ — ограниченное открытое множество, Γ — его $(n-1)$-мерная гладкая граница, α и $p \geqslant 1$ — действительные числа,

$$\|f\|_{p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, \tag{1}$$

и

$$W^r_{p,\alpha}(\Omega) = W^r_{p,\alpha} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

— класс функций с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega)} &= \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w^r_{p,\alpha}(\Omega)}, \\ \|f\|_{w^r_{p,\alpha}(\Omega)} &= \sum_{|k|=r} \left\| \frac{f^{(k)}}{\rho^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь суммирование производится по целочисленным неотрицательным векторам $k = (k_1, \ldots, k_n)$ $(k_j \geqslant 0)$.

$$f^{(k)} = D^{(k)} f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \qquad \left(|k| = \sum_{j=1}^n k_j\right)$$

и $\rho = \rho(x)$ есть расстояние от x до Γ; $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ — банахово пространство. Для $\alpha = 0$ это пространство Соболева $(W^r_{p,0}(\Omega) = W^r_p(\Omega))$.

Если E, E_1, $E \subset E_1$ — банаховы пространства с нормами $\| \|_E$, $\| \|_{E_1}$ соответственно и

$$\|x\|_{E_1} \leqslant c \|x\|_E \qquad (x \in E), \tag{3}$$

где константа c не зависит от x, то мы пишем $E \to E_1$ и говорим, что «E вкладывается в E_1» (см. [6]).

Ниже, рассматривая неравенства типа (3), мы не говорим каждый раз «константа c не зависит от $x \in E$».

Справедливы следующие пять утверждений:

1) $$W^r_{p,\alpha}(\Omega) \to W^{r-l}_{p,\alpha_l}(\Omega), \qquad \Gamma \in C^{(1)},$$

где $\alpha_l < 1/p$, $\alpha_l \leqslant \alpha + l$, $l = 0, 1, \ldots, r$. (4)

2) Если

$$0 < r + \alpha - 1/p < r, \tag{5}$$

s_0 натуральное, для которого

$$r + \alpha - 1/p \leqslant s_0 < r + \alpha - 1/p + 1, \tag{6}$$

$\Gamma \in C^{s_0+1}$, то следующие граничные функции определены почти всюду на Γ:

$$\left.\frac{\partial^s f}{\partial \nu^s}\right|_\Gamma = \varphi_s \in W_p^{s_0-1-s}(\Gamma) \qquad (s = 0, \ldots, s_0 - 1).$$

[1] Эту ошибку заметил студент МФТИ В. В. Шаньков, изучавший мои рукописи.

Здесь ν — внешняя нормаль к Γ и $W_p^l(\Gamma)$ $(l = 0, 1, \ldots)$ есть соболевский класс функций, определенных на Γ.

Следующие неравенства имеют место:

$$\|\varphi_s\|_{W_p^{s_0-1-s}(\Gamma)} \leqslant c\|f\|_{W_{p,\alpha}^r(\Omega)} \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1). \tag{7}$$

Мы говорим, что функции $f \in W_{r,a}^r(\Omega)$ имеют слабое вырождение, если $s_0 = r$, и сильное, если $s_0 < r$.

3) Если вместе с (5), (6)

$$r \leqslant 2s_0 \tag{8}$$

и $\Gamma \in C^{s_0+1}$, тогда

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\Big\{\sum_{l+s<\frac{r}{2}} \|\varphi_s\|_{W_p^l(\Gamma)} + \|f\|_{w_{p,\alpha}^r(\Omega)}\Big\}. \tag{9}$$

4) Если $0 < r + \alpha - 1/p < r$, то норма $\|f\|_{W_{p,\alpha(\Omega)}^r}$ (см. (2)) эквивалентна норме

$$\|f\|_{W_{p,\alpha}^{*r}(\Omega)} = \left\|\frac{f}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w_{p,\alpha}^r(\Omega)},$$

т. е.

$$W_{p,\alpha}^r(\Omega) \to W_{p*,\alpha}^r(\Omega) \to W_{p,\alpha}^r(\Omega).$$

Но тогда (9) влечет

$$\left\|\frac{f}{\rho^\alpha}\right\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\Big\{\sum_{l+s<\frac{r}{2}} \|\varphi_s\|_{W_p^l(\Gamma)} + \|f\|_{w_{p,\alpha}^r(\Omega)}\Big\}. \tag{9'}$$

5) При условиях (5), (6), (8) и если $f \in W_{p,\alpha}^r(\Omega)$ и $\left.\frac{\partial^{st}}{\partial\nu^s}\right|_\Gamma = 0$ $(s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1)$, и $\Gamma \in C^{(s_0+1)}$ справедливо неравенство

$$\left\|\frac{f}{\rho^{r+\alpha}}\right\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{w_{p,\alpha}^r(\Omega)}, \tag{9''}$$

где c не зависит от f (см. § 3, лемма 3).

Утверждения 1) и 2) в случае, когда Ω есть полупространство $x_n > 0$, см. в работах [2, 9]. Однако в этом случае во втором соотношении (4) надо считать $\alpha_l = \alpha + l$. Утверждение 3) сформулировано в статье [3] П. И. Лизоркина и автора и доказано в статьях автора [4, 7]. Для произвольной ограниченной области с гладкой границей утверждения 1) —4) см. во 2-м издании книги [6, гл. 13].

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$Lu = F \quad (x \in \Omega), \tag{10}$$

$$\|\rho^\alpha F\| = \|\rho^\alpha F\|_{L_2(\Omega)} < \infty, \tag{11}$$

$$Lu = \sum_{|k|,|l|\leqslant 1} (-1)^{|l|} D^{(l)}(a_{kl}u^{(k)}), \tag{12}$$

где функции $a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$ соответствуют парам (k, l) неотрицательных целых векторов.

Отметим, что в этом параграфе (но не в § 2) может быть рассматриваема также норма

$$\|F\| = \|F\|_{L_2(\Omega)} < \infty. \tag{11'}$$

Мы будем еще рассматривать условие

$$\| \rho^{\alpha+r} F \| < \infty, \tag{11''}$$

но только в задаче, где функция $U \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ вместе с ее s_0 нормальными производными на Γ имеет нулевые значения ($U \in \mathfrak{M}_0$, см. ниже).

Пусть функции $a_{kl}(x)$ измеримы на Ω и

$$|a_{kl}(x)| \leqslant M^2/\rho^{2\alpha} \ (x \in \Omega, \ \ a_{kl} = a_{lk}), \tag{13}$$

$$\alpha < 1/2, \tag{14}$$

$$\sum_{|k|,|l| \leqslant r} a_{kl}(x)\, \xi_k \xi_l \geqslant \varkappa^2 \rho^{-2\alpha} \sum_{|k|=r} \xi_k^2 \,^{1}, \tag{15}$$

где ξ_k — действительные числа, соответствующие целым векторам k и константа $\varkappa$ не зависит от x и ξ_k.

Неравенство (15) означает, что дифференциальное уравнение (10) эллиптического типа на Ω с вырождением на Γ при $\alpha \neq 0$.

Далее, мы предполагаем

$$0 < r + \alpha - 1/2 < r, \tag{16}$$

$$r + \alpha - 1/2 \leqslant s_0 < r + \alpha + 1/2, \ s_0 \text{ натуральное}, \tag{17}$$

$$r \leqslant 2 s_0. \tag{18}$$

Для таких r, α и $p = 2$ верны утверждения 1)—5).

Пусть

$$\begin{gathered} E(f, \varphi) = \int_\Omega \sum_{|k|,|l| \leqslant r} a_{kl}(x)\, f^{(k)}(x)\, \varphi^{(l)}(x)\, dx, \\ E(f) = E(f, f). \end{gathered} \tag{19}$$

Тогда

$$|E(f, \varphi)| \leqslant c^2 \|f\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} \|\varphi\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)}, \tag{20}$$

$$0 \leqslant \varkappa^2 \|f\|^2_{w^r_{2,\alpha}(\Omega)} \leqslant E(f). \tag{21}$$

В самом деле,

$$\int_\Omega |a_{kl} f^{(k)} \varphi^{(l)}|\, dx \leqslant M^2 \int_\Omega \left| \frac{f^{(k)}}{\rho^\alpha} \frac{\varphi^{(l)}}{\rho^\alpha} \right| dx \leqslant M^2 \left(\int_\Omega \left| \frac{f^{(k)}}{\rho^\alpha} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left| \frac{\varphi^{(l)}}{\rho^\alpha} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c M^2 \|f\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} \|\varphi\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} \qquad (|k|, |l| \leqslant r).$$

Здесь первое неравенство следует из (13), а последнее из утверждения 1). Эти неравенства влекут (20), а (21) есть прямое следствие (15). (20) влечет

$$E(f) \leqslant c^2 \|f\|^2_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)}, \tag{22}$$

а (2), (21), (22) влекут неравенства ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$)

$$c_1 \|f\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} \leqslant \|f\| + E(f)^{1/2} \leqslant c_2 \|f\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)}. \tag{23}$$

---

[1] Мы считаем в (15) $|k|$, $|l| \leqslant r$ вместо $|k|$, $|l| = r$, чтобы избежать рассмотрение вопросов, связанных со спектром оператора L.

Мы видим, что величину в середине (23) можно рассматривать как эквивалентную норму в $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$. В этом смысле мы будем писать

$$\|f\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} = \|f\| + E(f)^{1/2}. \tag{23'}$$

Другой эквивалентной нормой функции $f \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ является (см. утверждение 4))

$$\|f\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} = \|f/\rho^\alpha\| + E(f)^{1/2}. \tag{22''}$$

Возьмем функцию $\Phi \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$. Для нее имеют смысл граничные функции (см. утверждение 2)).

Вводим класс $\mathfrak{M}_\Phi$ функций $f \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$, имеющих те же граничные функции, как и Φ:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \nu^s}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \nu^s}\right|_\Gamma \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1). \tag{24}$$

Мы считаем

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_\Phi, \text{ если } \Phi \equiv 0.$$

Тогда верны следующие неравенства типа Пуанкаре:

$$\|f\|^2 \leqslant c_1 \|f\|^2_{w^r_{2,\alpha}(\Omega)} \leqslant c_0 E(f) \qquad (f \in \mathfrak{M}_0), \tag{25}$$

$$\left\|\frac{f}{\rho^{\alpha+r}}\right\|^2 \leqslant c_1 \|f\|^2_{w^r_{2,\alpha}(\Omega)} \leqslant c_0 E(f) \qquad (f \in \mathfrak{M}_0). \tag{25'}$$

Первые из них следуют соответственно из (9) и (9″), потому что $\varphi_s = 0$ на Γ для $f \in \mathfrak{M}_0$ ($s < r/2 \leqslant s_0$!). Вторые следуют из (21).

Отметим также неравенства (см. (7), (23))

$$\left\| \left.\frac{\partial^s f}{\partial \nu^s}\right|_\Gamma \right\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant c \|f\|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} =$$
$$= c(\|f\| + E(f)^{1/2}), \qquad f \in W^r_{2,\alpha}(\Omega) \qquad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1). \tag{26}$$

Теорема 1[1]. *При условиях* (5), (6), (8), (11) (*или* (11′) *или* (11″), *но при* $\Phi \in \mathfrak{M}_0$) *существует единственная функция* $U = U_\Phi \in \mathfrak{M}_\Phi$, *являющаяся решением вариационной задачи*:

$$\begin{gathered} \min_{f \in \mathfrak{M}_\Phi} [E(f) - 2(F, f)] = E(U) - 2(F, U), \\ (F, f) = \int_\Omega F f dx. \end{gathered} \tag{27}$$

Функция $U = U_\Phi$ *может быть определена еще как некоторая функция* $U \in \mathfrak{M}_\Phi$, *для которой*

$$E(u, v) - (F, v) = 0 \text{ для всех } v \in \mathfrak{M}_0. \tag{28}$$

Эта теорема непосредственно следует из общей теории гильбертового пространства, если принять во внимание, что $E(\varphi, \psi)$ есть билинейная неотрицательная ($E(\varphi) \geqslant 0$) форма от f, $\psi \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$, для которой верны соотношения (20)—(26). Полноты ради мы приведем доказательство.

Отметим, что (F, f) определено для любой функции $f \in \mathfrak{M}_\Phi$, если $\|F\rho^\alpha\| < \infty$ или $\|F\| < \infty$ и для любой $f \in \mathfrak{M}_0$, если $\|F\rho^{\alpha+r}\| < \infty$.

---

[1] Теорема 1 верна и при условии, более общем, чем (8), но выражаемом в другой терминологии (см. работу Р. Портнова [14] и другие его работы).

Линейность и неотрицательность формы $E(f, \varphi)$ влечет

$$E(f) = 1/2E(f-\Phi) + 1/2E(f+\Phi) - E(\Phi) \geqslant 1/2E(f-\Phi) - E(\Phi). \quad (29)$$

Кроме того, при $f \in \mathfrak{M}_\Phi$ (т. е. $f - \Phi \in \mathfrak{M}_0$) и $\| F \| < \infty$

$$2(F, f) = 2(F, f-\Phi) + 2(F, \Phi) \leqslant \frac{1}{2c_0}\|f-\Phi\|^2 + 2c_0\|F\|^2 + 2(F, \Phi) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}E(f-\Phi) + 2c_0\|F\|^2 + 2(F, \Phi). \quad (30)$$

Первое неравенство в (30) верно для любого $c_0 > 0$. Но здесь c_0 есть константа, фигурирующая в (25), а это дает возможность получить второе неравенство в (30).

В случае $\|\rho^\alpha F\| < \infty$, если учесть, что $\Phi\rho^{-\alpha} \in L_2(\Omega)$ (см. (4)), получим

$$2(F, f) \leqslant \frac{1}{2c_0}\left\|\frac{f-\Phi}{\rho^\alpha}\right\|^2 + 2c_0\|\rho^\alpha F\|^2 + 2(F, \Phi) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}E(f-\Phi) + 2c_0\|\rho^\alpha F\|^2 + 2(F, \Phi). \quad (30')$$

В (30′) можно заменить ρ^α на $\rho^{\alpha+r}$, если $\Phi \in \mathfrak{M}_0$ и $\| \rho^{\alpha+r}F \| < \infty$, и получить (30″). Надо учесть, что тогда $\Phi\rho^{-\alpha-r} \in L_2(\Omega)$, см. (5) [1].

Вычитая (30) (соответственно (30′), (30″)) из (29), получим

$$E(f) - 2(F, f) \geqslant -A \ (f \in \mathfrak{M}_0),$$

где

$$A = E(\Phi) + 2c_0 \| F \|^2 + 2(F, \Phi)$$

и где можно заменить $\| F \|$ на $\| \rho^\alpha F \|$ или (при $\Phi \in \mathfrak{M}_0$) на $\| \rho^{\alpha+r}F \|$.

Мы видим, что A не зависит от $f \in \mathfrak{M}_\Phi$. Следовательно,

$$\inf_{f \in \mathfrak{m}_\Phi} [E(f) - 2(F, f)] = d \qquad (\infty < d < \infty)$$

и существует минимизирующая последовательность функций $f_\mu \in \mathfrak{M}_\Phi$, для которых

$$E(f_\mu) - 2(F, f_\mu) = d + \varepsilon_\mu \geqslant d, \quad \varepsilon_\mu \to 0.$$

Тогда $\left(\frac{f_p + f_q}{2} \in \mathfrak{M}_\Phi!\right)$

$$E(f_p - f_q) = 2[E(f_p) - 2(F, f_p)] +$$
$$+ 2[E(f_q) - 2(F, f_q)] - 4\left[E\left(\frac{f_p + f_q}{2}\right) - 2\left(F, \frac{f_p + f_q}{2}\right)\right] \leqslant$$
$$\leqslant 2(d + \varepsilon_p) + 2(d + \varepsilon_q) - 4d \to 0 \qquad (p, q \to \infty) \quad (31)$$

и (см. (25), $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L_2(\Omega)}$)

$$\| f_p - f_q \|^2 \leqslant c_0 E(f_p - f_q) \to 0 \quad (p, q \to \infty).$$

Следовательно, в силу полноты пространства $W_{2,\alpha}^r(\Omega)$ (см. также (23)) существует функция $U \in W_{2,\alpha}^r(\Omega)$, для которой

$$\|U - f_q\|_{W_{2,\alpha}^r(\Omega)} = \|U - f_q\| + E(U - f_q)^{1/2} \to 0 \qquad (q \to \infty).$$

Следовательно,

$$E(U) - 2(F, U) = d. \quad (32)$$

[1] Тот факт, что теорема 1 проходит при условии $\|F\rho^{\alpha+r}\| < \infty$, $\Phi \equiv 0$, $r = s_0$ замечен В. В. Шаньковым. Отметим еще статью Е. А. Волкова [3], который исследовал дифференцируемость решения задачи $\Delta u = F$, $u|_\Gamma = \varphi$ в метрике C в гёльдеровых классах.

Кроме того (см. (7)),

$$\left\| \frac{\partial^s U}{\partial \nu^s}\Big|_\Gamma - \frac{\partial^s \Phi}{\partial \nu^s}\Big|_\Gamma \right\|_{L_2(\Gamma)} = \left\| \frac{\partial^s (U - f_q)}{\partial \nu^s}\Big|_\Gamma \right\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant c \| U - f_q \|_{W^r_{2,\alpha}(\Omega)} \to 0 \quad (q \to \infty), \quad s = 0, 1, \ldots s_0 - 1,$$

что показывает, что левая часть этой цепи есть нуль.

Следовательно, $U \in \mathfrak{M}_\Phi$ и (27) доказано. Не существует другой функции $U_1 \in \mathfrak{M}_\Phi$, для которой имеет место (32), потому что замена f_p, f_q на U, U_1 в (31) дает: $E(U - U_1) = 0$, т. е. $U \equiv U_1$ (см. (25), здесь $\varepsilon_p = \varepsilon_q = 0$).

Наконец, отметим, что равенство

$$\min_\lambda [E(U + \lambda v) - 2(F, U + \lambda v)] = E(U) - 2(F, U)$$
$$v \in \mathfrak{M}_0,$$

где λ — число, влечет, очевидно, (28), и обратно, (28), где $U \in \mathfrak{M}_\Phi$, влечет неравенство

$$E(U + v) - 2(F, U + v) = E(U) - 2(F, U) + E(v) \geqslant E(U) - 2(F, U),$$
$$v \in \mathfrak{M}_0,$$

что и показывает очевидно, что U есть решение вариационной проблемы (27).

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЯ

Пусть $\Phi \in W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$, $\gamma \geqslant r$, γ натуральное. В силу вложения

$$W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega) \to W^r_{2,\alpha}(\Omega)$$

Φ порождает класс $\mathfrak{M}_\Phi$ функций $f \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ с граничными свойствами

$$\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\Big|_\Gamma = \frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\Big|_\Gamma \qquad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1)$$

и (единственную) функцию $U \in \mathfrak{M}_\Phi$, решающую вариационную задачу с условиями, указанными в § 1, где F заменено на F_*.

$$\min_{f \in \mathfrak{M}_\Phi} \{E(f) - 2(F_*, f)\} =$$
$$= \min_{f \in \mathfrak{M}_\Phi} \int_\Omega \Big\{ \sum_{|k|, |l| \leqslant r} a_{kl}(x) f^{(k)}(x) f^{(l)}(x) - 2F_*(x) f(x) \Big\} dx =$$
$$= E(U_\Phi) - 2(F_*, U_\Phi), \qquad U_\Phi \in \mathfrak{M}_\Phi.$$

Как мы знаем из § 1, U_Φ можно определить также как функцию, удовлетворяющую двум условиям:

1) $U_\Phi \in \mathfrak{M}_\Phi$, (1)

2) $E(U_\Phi, v) - (F_*, v) = 0$ для любых $v \in \mathfrak{M}_0$.

Из неравенства $\gamma \geqslant r$ следует, что $\Phi \in W^{2r}_2$ локально. Поэтому

$$E(\Phi, v) = \int_\Omega \sum_{|k|, |l| \leqslant r} a_{kl} \Phi^{(k)} v^{(l)} dx = \int_\Omega \psi(x) v(x)\, dx,$$

для финитных в Ω бесконечно дифференцируемых функций U, где

$$\psi(x) = \sum_{|k|, |l| \leqslant r} (-1)^{|l|} (a_{kl} \Phi^{(k)})^{(l)} = \sum_{|k|, |l| \leqslant r} (-1)^{|l|} \sum_{0 \leqslant \tau \leqslant l} c_l^\tau a_{kl}^{(\tau)} \Phi^{(k+l-\tau)}.$$

Мы считаем, что

$$|a_{kl}^{(\tau)}| \leqslant \frac{c}{\rho(x)^{2\alpha+|\tau|}},$$

поэтому для $|\lambda| \leqslant \gamma - r$

$$\psi^{(\lambda)}(x) = \sum_{|k|,|l| \leqslant r} (-1)^{|l|} \sum_{0 \leqslant \tau \leqslant l} c_l^\tau (a_{kl}^{(\tau)} \Phi^{(k+l-\tau)})^{(\lambda)} =$$

$$= \sum_{|k|,|l| \leqslant r} (-1)^{|l|} \sum_{0 \leqslant \tau \leqslant l} c_l^\tau \sum_{0 \leqslant s \leqslant \lambda} c_\lambda^s a_{kl}^{(\tau+s)} \Phi^{(k+l-\tau+\lambda-s)}$$

и

$$\|\psi^{(\lambda)} \rho^{\alpha+r+|\lambda|}\| \leqslant \sum_{|k|,|l| \leqslant r} \sum_{0 \leqslant \tau \leqslant l} \sum_{0 \leqslant s \leqslant \lambda} \left\| \frac{\Phi^{(k+l-\tau+\lambda-s)}}{\rho^{\alpha-(r-|\tau|)-(|\lambda|-|s|)}} \right\| \leqslant \tag{2}$$

$$\leqslant \|\Phi\|_{W_{2,\alpha-\gamma}^{r+\gamma}(\Omega)},$$

потому что (см. § 1, утверждение 1)

$$\alpha - (r - |\tau|) - (|\lambda| - |s|) \leqslant \alpha < 1/2$$

и

$$\alpha - (r - |\tau|) - (|\lambda| - |s|) \leqslant \alpha - \gamma + r + \gamma - |k| - |l| + |\tau| -$$

$$- |\lambda| + |s|,$$

так как после сокращения членов получим очевидное неравенство

$$0 \leqslant 2r - |k| - |l|.$$

Введем функцию

$$U = U_\Phi^- - \Phi \; (\Phi \in W_{2,\alpha-\gamma}^{r+\gamma}(\Omega), \quad \gamma \geqslant r).$$

В силу (1) U полностью определяется условиями:

1) $U \in \mathfrak{M}_0$, (3)

2) $E(U, v) - (F, v) = 0$ для всех $v \in \mathfrak{M}_0$,

где $F = F_* - \psi$.

Мы считаем, что

$$\|F_*^{(\lambda)} \rho^{\alpha+r+|\lambda|}\| < \infty, \tag{2'}$$

поэтому в силу (2)

$$\|F \rho^{\alpha+r+|\lambda|}\| < \infty.$$

Пусть γ — натуральное число. На Ω определим функции F и $a_{kl} = a_{lk}$, $|k|, |l| \leqslant r$, удовлетворяющие свойствам [1]

$$|a_{kl}^{(\lambda)}(x)| \leqslant \frac{c}{\rho(x)^{2\alpha+|\lambda|}}, \qquad |\lambda| \leqslant \gamma, \tag{4}$$

$$\|F\rho^{\alpha+r}\| < \infty \qquad (\gamma \leqslant r), \tag{5}$$

$$\|F^{(\tau)} \rho^{\alpha+r+|\tau|}\| < \infty, \qquad |\tau| \leqslant \gamma - r \qquad (\gamma > r), \tag{5'}$$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\sum_{|k|,|l| \leqslant r} a_{kl} \xi_k \xi_l \geqslant \frac{\varkappa}{\rho^{2\alpha}} \sum_{|k|=r} \xi_k^2, \tag{6}$$

где константа $\varkappa$ не зависит от $x \in \Omega$ и переменных ξ_k ($|k| \leqslant r$).

Будем считать, что

$$s_0 - 1 < r + \alpha - 1/2 < s_0, \quad r \leqslant 2s_0, \tag{7}$$

[1] Отметим, что условия $|a_k^{(\lambda)}(x)| \leqslant c$, $|\lambda| \leqslant \gamma$ содержатся в (4).

что равносильно неравенствам

$$-1/2 < r + \alpha - s_0 < 1/2, \quad r \leqslant 2s_0. \tag{7'}$$

Отметим, что функции $f \in \mathfrak{M}_0$ имеют s_0 граничных нулевых функций:

$$\left.\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\right|_\Gamma = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1)$$

(см. § 1).

Мы хотим изучить дифференциальные свойства функции U, решающей вариационную задачу (2).

Замечание 1. Существование и единственность решения вариационной задачи (1) при условиях (4)—(7) для $\gamma = 0$ доказано в § 1, теорема 1.

Имеет место

Теорема 2. *При условиях* (4)—(7) *и, если* $\Gamma \in C^{s_0+1}$ *функция* U, *решающая вариационную задачу* (2), *принадлежит классу* $W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$ $(U \in W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega))$.

Замечание 2. Здесь мы полностью доказываем эту теорему при $r = 1$. Однако леммы, которые приводятся в дальнейшем, доказываются для произвольного натурального r.

Из теоремы 1 на основании сказанного выше непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2'. *Пусть выполняются условия* (2'), (4), (6), (7), $\Gamma \in C^{(s_0+1)}$ *и функция* $\Phi \in W^{r+\gamma}_{\alpha-\gamma}(\Omega)$, *где* $\gamma \geqslant r$ — *натуральное число.*

Тогда функция U, *решающая вариационную задачу* (1), *принадлежит классу* $W^{r+\gamma}_{2-\gamma}(\Omega)$ $(U \in W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega))$.

Замечание 3. Вводим открытые прямоугольники Δ_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\Delta_i = \{x : x' \in \Delta_i', \; 0 < x_n < 1\},$$

$$\Delta_i' = \{x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) : |x_j| < i\delta, \; j = 1, \ldots, n-1\}.$$

Таким образом, $\overline{\Delta}_1 \subset \Delta_2 \subset \overline{\Delta}_2 \subset \Delta_3$. Будем пока предполагать, что область Ω имеет специальный вид, именно, что $\Delta_3 \subset \Omega$ и что верхняя и нижняя в направлении x_n части границы Δ_3 принадлежат к Γ, т. е.

$$\{x : x_n = 0, \; x' \in \overline{\Delta}_3'\} \subset \Gamma,$$

$$\{x : x_n = 1, \; x' \in \overline{\Delta}_3'\} \subset \Gamma. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть* $\Omega \subset R_n$ — *открытое множество, определенное в замечании* 3. *Пусть также* γ — *натуральное число и*

$$\rho(x) = \min\{x_n, \; 1 - x_n\}, \qquad x = (x', \; x_n) \tag{9}$$

— *расстояние* (*в направлении* x_n) *от* $x \in \Delta_3$ *до* Γ.

Если теорема 2 *верна для* $\gamma - 1$ $(\gamma > 0)$ *и ее условия верны для* γ, *то для любых неотрицательных целочисленных векторов*

$$p' = (p_1, \ldots, p_{n-1}, 0), \quad |p'| = \gamma, \quad |k| = r$$

$$\left\| \frac{U^{(k+p')}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_1)} < \infty. \tag{10}$$

Лемма 2. *Пусть вместе с условиями леммы 1 соотношения* ($p' = (p_1, \ldots, p_{n-1}, 0)$)

$$\left\| \frac{\partial^\mu U^{(p')}/\partial x_n^\mu}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_1)} < \infty \qquad (\mu + |p'| = r + \gamma) \tag{11}$$

верны для $\mu = 0, 1, \ldots, 2r - 1$.

Тогда эти соотношения верны для любого μ (*удовлетворяющего равенству* $\mu = |p'| = r + \gamma$!), *т. е.* U *принадлежит классу* $W_{2, \alpha-\gamma}^{r+\gamma}(\Delta_1)$, *который определен как в* § 1 (см. (2)), *но где* $\rho(x)$ (см. (9)) — *расстояние от* x *до* Γ (*границы* Ω).

Замечание 4. Если $r = 1$, то $2r - 1 = 1$. Поэтому согласно лемме 2 чтобы выполнялось неравенство (11) для всех указанных μ, надо убедиться в верности его только при $\mu = 0,1$, но это следует из леммы 1.

Доказательство леммы 1. Вводим функцию $\eta(x') \in C^{(r+\gamma)}$ со следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \eta \equiv 1 \text{ на } \Delta_1', \\ \eta \equiv 0 \text{ вне } \Delta_2', \\ \eta > 0 \text{ на } \Delta_2', \end{gathered} \tag{12}$$

$$|\eta^{(\tau')}(x')|^2 \leqslant c\eta(x') \qquad (|\tau'| \leqslant r + \gamma,\ \tau' = t_1, \ldots, t_{n-1}, 0), \tag{12'}$$

где c не зависит от x'.

Можно, например, считать, что

$$\eta(x') = \prod_{i=1}^{n-1} \mu\left(\frac{x_i}{\delta}\right), \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\mu(t)$ — четная функция, определяемая равенствами ($s \geqslant r + \gamma$)

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \beta \int\limits_t^2 (u - t)^{2s} (2 - u)^{2s} du, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0, & t \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\beta \int\limits_1^2 (u - 1)^{2s} (2 - u)^{2s} du = 1.$$

Вводим еще функцию $\sigma(t) \in C^{(r+\gamma)}$ со свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \sigma(t) = t^{2\gamma},\ 0 \leqslant t \leqslant 1/3; \\ &2)\ \sigma(t) = (1 - t)^{2\gamma},\ 2/3 \leqslant t \leqslant 1, \\ &3)\ 0 < m < \sigma(t) < M,\ 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3. \end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно,

$$c_1\rho(t)^{2\gamma} \leqslant \sigma(t) \leqslant c_2\rho(t)^{2\gamma}, \tag{14}$$

$$|\sigma^{(s)}(t)| < c_2\rho(t)^{2\gamma - s} \qquad (s = 0, 1, \ldots, r + \gamma), \tag{14'}$$

где $\rho(t) = \min(t, 1 - t)$
и константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от t.

Зададим неотрицательный целый вектор $p = (p_1, \ldots, p_{n-1}, 0)$ ($p_n = 0$) с $|p| = \gamma$. Будем рассматривать функции $v \in \mathfrak{M}_0$ тождественно равные нулю вне Δ_2. Для таких функций $v(x - h\lambda) \in \mathfrak{M}_0$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant p)$ при достаточно малых $h > 0$. Поэтому

$$E(U(x), v(x - h\lambda)) - (F(x), v(x - h\lambda)) =$$
$$= \int_\Omega \Big[\sum_{|k|, |l| \leqslant r} a_{kl}(x) U^{(k)}(x) v^{(l)}(x - h\lambda) - F(x) v(x - h\lambda) \Big] dx =$$
$$= \int_\Omega \Big[\sum_{|k|, |l| \leqslant r} a_{kl}(x + h\lambda) U^{(k)}(x + h\lambda) v^{(l)}(x) - F(x + h\lambda) v(x) \Big] dx = 0.$$

Это показывает, что

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{|k|, |l| \leqslant r} \Delta^p [a_{kl}(x) U^{(k)}(x)] v^{(l)}(x) - \Delta^p F(x) v(x) \Big\} dx = 0$$

для всех указанных v, где Δ^p знак кратной разности в направлениях $p = (p_1, \ldots, p_n, 0)$ с шагом h.

Деля на h^p и используя формулу

$$\Delta^p (f(x) \varphi(x)) = \sum_{0 \leqslant \lambda \leqslant p} c_p^\lambda \Delta^{p-\lambda} f(x) \Delta^\lambda \varphi(x + h(p - \lambda)), \tag{15}$$

получим равенство

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{0 \leqslant \lambda \leqslant p} c_p^\lambda \sum_{|k|, |l| \leqslant r} \frac{\Delta^\lambda a_{kl}(x + h(p - \lambda))}{h^{|\lambda|}} \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}(x)}{h^{|p-\lambda|}} v^{(l)}(x) - \frac{\Delta^p F(x)}{h^{|p|}} v(x) \Big\} dx = 0$$
$$(v \in \mathfrak{M}_0, \quad v \equiv 0 \text{ на } \Omega \setminus \Delta) \tag{16}$$

при достаточно малых h.

Положим

$$v = \sigma(x_n) \eta(x') \frac{\Delta^p U(x)}{h^{|p|}}. \tag{17}$$

Очевидно, $v \in \mathfrak{M}_0$ и $v \equiv 0$ на $\Omega \setminus \Delta_2$. Подставляя v в (16), получим

$$\int_{\Delta_2} \Big\{ \sum_{0 \leqslant \lambda \leqslant p} c_p^\lambda \sum_{|k|, |l| \leqslant r} \frac{\Delta^\lambda a_{kl}(x + h(p - \lambda))}{h^{|\lambda|}} \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}}{h^{|p-\lambda|}} \sum_{0 \leqslant \tau \leqslant l} c_l^\tau (\sigma\eta)^{(\tau)} \frac{\Delta^p U^{(l-\tau)}}{h^{|p|}} -$$
$$- \frac{\Delta^p F}{h^{|p|}} \sigma(x_n) \eta(x') \frac{\Delta^p U}{h^{|p|}} \Big\} dx = 0. \tag{18}$$

Оставим в левой части этого равенства члены рассматриваемой суммы, для которых

$$|k|, \quad |l| = r \quad |\lambda| = |\tau| = 0, \tag{19}$$

а остальные члены перенесем в правую часть.

Тогда

$$I = \int_{\Delta_2} \sum_{|k|, |l| = r} a_{kl}(x + ph) \left(\frac{\Delta^p U}{h^{|p|}} \right)^{(k)} \left(\frac{\Delta^p U}{h^{|p|}} \right)^{(l)} \sigma\eta dx =$$
$$= -\sum{}' I_{k, l, \lambda, \tau} + \int_{\Delta_2} \frac{\Delta^p F}{h^{|p|}} v \, dx, \tag{20}$$

где v определяется в (17), сумма Σ' распространена на указанные в (18)

$(k,\ l,\ \lambda,\ \tau)$, исключая те, которые удовлетворяют одновременно условиям (19), $\tau=(\tau',\ \tau_n)$, $\tau'=(\tau_1,\ \ldots,\ \tau_{n-1})$ и

$$J_{k,\,l,\,\lambda,\,\tau}=c_p^\lambda c_l^\tau \int\limits_{\Delta_2} \frac{\Delta^\lambda a_{kl}\,(x+h\,(p-\lambda))}{h^{|\lambda|}}\,\frac{\Delta^{p-\lambda}U^{(k)}}{h^{|p-\lambda|}}\,\sigma^{(\tau_n)}\eta^{(\tau')}\,\frac{\Delta^p U^{(l-\tau)}}{h^{|p|}}\,dx. \tag{21}$$

Левая часть (20) оценивается снизу следующим образом (σ, η!, см. (6), (12), (14)):

$$I\geqslant \varkappa\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{\rho^{2\,(\alpha-\gamma)}}\sum_{|k|=r}\left(\frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}}\right)^2\eta\,dx=X^2. \tag{22}$$

Пусть, как сказано в лемме 1, выполняются условия теоремы 2 для γ. Тогда, очевидно, выполняются ее условия для $\gamma-1$. Но тогда теорема 2 верна при $\gamma-1$ и $U\in W_{2,\,\alpha-\gamma+1}^{r+\gamma-1}(\Omega)$.

Оценка снизу (22) уже есть в нашем распоряжении. Переходим к оценкам сверху (пояснения ниже).

Если $\tau=0$ и $|\,l\,|=r$ (и тогда $|\,p-\lambda+k\,|\leqslant r+\gamma-1$)

$$|J_{k,\,l,\,\lambda,\,0}|\leqslant\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{\rho^{2\alpha+|\lambda|}}\left|\frac{\Delta^{p-\lambda}U^{(k)}}{h^{|p-\lambda|}}\right|\sigma\eta\left|\frac{\Delta^p U^{(l)}}{h^{|p|}}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Delta_2}\frac{1}{\rho^{\alpha+(|\lambda|-\gamma)}}\left|\frac{\Delta^{p-\lambda}U^{(k)}}{h^{|p-\lambda|}}\right|\frac{1}{\rho^{\alpha-\gamma}}\left|\frac{\Delta^p U^{(l)}}{h^{|p|}}\right|\sqrt{\eta}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{U^{(p-\lambda+k)}}{\rho^{\alpha+|\lambda|-\gamma}}\right\|_{L_2(\Delta_2)}\left\|\frac{1}{\rho^{\alpha-\gamma}}\,\frac{\Delta^p\bar U^{(l)}}{h^{|p|}}\sqrt{\eta}\right\|_{L_2(\Delta_2)}\leqslant\|\,U\,\|_{W_{2,\,\alpha-\gamma+1}^{r+\gamma-1}(\Omega)}X. \tag{23}$$

В первом соотношении этой цепи мы воспользовались оценкой (4), а во втором — оценкой (12′) и оценкой сверху (14). В последнем соотношении надо учесть, что

$$\alpha+|\,\lambda\,|-\gamma\leqslant\alpha<{}^1/_2,$$

а также неравенство

$$\alpha+|\,\lambda\,|-\gamma\leqslant\alpha-\gamma+1+(r+\gamma-1-|\,p\,|+|\,\lambda\,|-|\,k\,|),$$

верное, потому что после сокращений оно превращается в очевидное неравенство ($|\,p\,|=\gamma$!)

$$0\leqslant r-|\,k\,|.$$

Множитель в (23) возникает в силу обозначения в (22).

Замечание 5. В дальнейшем мы рассматриваем отдельно случаи $\tau_n\leqslant r-s_0+\gamma$ и $\tau_n>r-s_0+\gamma$. Если $r=1$, то $s_0=1$ и $0\leqslant\tau\leqslant l$, $|\,l\,|=1$. Следовательно, $\tau_n\leqslant 1$. Это показывает, что при $r=1$ оценки $\lambda_{k,\,l,\,\lambda,\,\tau}$ сверху исчерпываются случаем $\tau_n\leqslant r-s_0+\gamma$[1].

Пусть теперь $|\,\lambda\,|=0$ и $|\,k\,|=r$. Тогда автоматически $|\,p+l-\tau\,|\leqslant r+\gamma-1$, потому что мы рассматриваем слагаемые входящие в сумму Σ'.

---

[1] Этот случай, сводящийся к неравенствам (23), (24), (33) при $r=s_0=1$, был рассмотрен В. В. Шаньковым.

Имеем

$$|J_{k,\,l,\,0,\,\tau}| \leqslant \int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \left| \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \sigma^{(\tau_n)} \eta^{(\tau')} \frac{\Delta^p U^{(l-\tau)}}{h^{|p|}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{\rho^{\alpha-\gamma}} \left| \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \right| \sqrt{\eta} \frac{1}{\rho^{\alpha+(\tau_n-\gamma)}} \left| \frac{\Delta^p U^{(l-\tau)}}{h^{|p|}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{1}{\rho^{\alpha-\gamma}} \frac{\Delta^p v^{(k)}}{h^{|p-\lambda|}} \sqrt{\eta} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \left\| \frac{U^{(p+l-\tau)}}{\rho^{\alpha+(\tau_n-\gamma)}} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant$$

$$\leqslant X \| U \|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\,\alpha-\gamma+1}(\Omega)} \qquad (\tau_n \leqslant r - s_0 + \gamma). \tag{24}$$

Здесь надо учесть, что при $\tau_n \leqslant r - s_0 + \gamma$

$$\alpha + (\tau_n - \gamma) \leqslant \alpha + r - s_0 < {}^1/_2, \tag{25}$$

$$\alpha + (\tau_n - \gamma) \leqslant \alpha - \gamma + 1 + (r + \gamma - 1 - |p| - |l| + |\tau|).$$

Последнее неравенство верно, потому что после сокращений получается, очевидно, неравенство

$$\tau_n \leqslant r - |l| + |\tau|$$

(ведь $\tau_n \leqslant |\tau|$, $|l| \leqslant r$).

Пусть теперь $\tau_n > r - s_0 + \gamma$. В этом случае, прежде чем производить оценки, подобные (24), придется интеграл (21) проинтегрировать по частям. Нужно учесть, что так как $U \in \mathfrak{M}_0$, то частные производные

$$\frac{\partial^s U}{\partial x_n^s} \qquad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1)$$

почти для всех $x' \in \Delta_2'$ непрерывны по x_n на отрезке $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ и равны нулю на его концах. Поэтому

$$\frac{\partial^{j-1} U}{\partial x_n^{j-1}} = o\,(x_n^{s_0-j}), \qquad (x_n \to 0), \tag{26}$$

$$\frac{\partial^{j-1} U}{\partial x_n^{j-1}} = o\,((1 - x_n)^{s_0-j}) \qquad (x_n \to 1). \tag{27}$$

После интегрирования по частям $\mu = \tau_n - r + s_0 - \gamma$ раз по x_n получим

$$J_{k,\,l,\,0,\,\tau} = c \int\limits_{\Delta_2'} \eta^{(\tau')}\, dx' \int\limits_0^1 \int\limits_{x_n}^{1/2} (x_n - t)^{\mu-1} a_{kl} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \sigma^{(\tau_n)}\, dt \frac{\Delta^p}{h^{|p|}} \frac{\partial^\mu U^{(l-\tau)}}{\partial x_n^\mu} dx_n, \tag{28}$$

где $c > 0$ — константа и где в интеграле по dt надо в a_{kl}, $U^{(k)}$ и $\sigma^{(\tau_n)}$ заменить x_n на t.

Однако надо обосновать, что возникающие при интегрировании по частям внеинтегральные члены равны нулю.

На j-м этапе интегрирования по частям внеинтегральный член равен

$$\beta = \varphi\psi \Big|_{x_n=0+0}^{x_n=1-0},$$

где

$$\varphi = \frac{1}{(j-1)} \int\limits_{x_n}^{1/2} (x_n - t)^{j-1} a_{kl} \sigma^{(\tau_n)} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} dt \qquad (j = 0, 1, \ldots, \mu),$$

$$\psi = \frac{\Delta^p}{h^{|p|}} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_n^{j-1}} U^{(l-\tau)} = \frac{\Delta^p}{h^{|p|}} U^{(q)} \quad (|q| = j - 1 + |l - \tau|).$$

При этом

$$|q| < (\tau_n - |\tau|) + (|l| - r) + s_0 - \gamma \leqslant s_0 - \gamma \leqslant s_0 - 1.$$

Поэтому почти для всех x' (см. (26))

$$\psi = o\,(x_n^{s_0 - |q| - 1}), \quad s_0 - |q| - 1 > 0 \quad (x_n \to 0). \tag{29}$$

Следовательно, при $x_n \to 0$ почти для всех x' ($t \geqslant x_n$!, пояснения ниже)

$$|\varphi\psi| \leqslant o(1) \int_{x_n}^{1/2} t^{s_0-(j-1)-|l-\tau|-1}\, t^{(j-1)+2(\gamma-\alpha)-\tau_n} \left| \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant o(1) \int_0^{1/2} t^{-(r+\alpha-s_0)+2\gamma-1} \left| t^{-\alpha} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \right| dt \leqslant o(1) \int_0^{1/2} t^{-(r+\alpha-s_0)} \left| t^{-\alpha} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant o(1) \left(\int_0^{1/2} \left| t^{-\alpha} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant o(1) \quad (x_n \to 0). \tag{30}$$

В первом соотношении этой цепи мы воспользовались неравенствами (4) при $|\lambda| = 0$ и (14'), во втором соотношении надо учесть, что $|l| \leqslant r$ и $0 \leqslant |\tau| - \tau_n$, в третьем — надо учесть, что $0 \leqslant 2\gamma - 1$ ($\gamma \geqslant 1$!) и в четвертом, что $r + \alpha - s_0 < 1/2$. Наконец, надо учесть, что при фиксированном $h > 0$ ($|k| = r$!)

$$\int_{\Delta_3'} dx' \int_0^{1/2} \left| t^{-\alpha} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \right|^2 dt < \infty,$$

откуда следует, что интеграл в предпоследнем члене цепи почти для всех x' конечный.

Аналогично рассуждая, воспользовавшись равенством (27), получим, что

$$|\varphi\psi| = o\,(1 - x_n) \quad (x_n \to 1)$$

почти для всех x'. Это доказывает, что $\beta = 0$ почти для всех x'.

Переходим к оценке (28). Учитывая, что

$$\rho(x_n) \sim x_n(1 - x_n) \quad (x \in \Delta_2),$$

и применяя неравенство Шварца, получим (пояснения ниже)

$$|J_{k,l,0,\tau}| \leqslant \left(\int_{\Delta_2'} \eta(x')\, dx' \int_0^1 \left| \rho(x_n)^{r+\alpha-s_0} \int_{x_n}^{1/2} \frac{\rho(t)^{\mu-1}}{\rho(t)^{2(\alpha-\gamma)+\tau_n}} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}}\, dt \right|^2 dx_n \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left\| \frac{U^{(p+l-\tau+\mu e_n)}}{\rho(x)^{r+\alpha-s_0}} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{\Delta_2'} \eta(x')\, dx' \int_0^1 \left| \rho(x_n)^{r+\alpha-s_0} \int_{x_n}^{1/2} \frac{1}{\rho(t)^{2\alpha-\gamma+r-s_0+1}} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}}\, dt \right|^2 dx_n \right)^{1/2} \times$$

$$\times \|U\|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Delta_2)} \leqslant \left(\int_{\Delta_2'} \eta(x')\, dx' \int_0^1 \left| \frac{1}{x_n^{\alpha-\gamma}} \frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \right|^2 dx_n \right)^{1/2} \|U\|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant X \|U\|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Omega)}. \tag{31}$$

В первом соотношении этой цепи мы воспользовались неравенствами (4) при $|\lambda| = 0$ и (14') и неравенством

$$|x_n - t| \leqslant \rho(t) = \min\{t, 1-t\}, \quad t \in [0, 1],$$

очевидно, верным при

$$0 \leqslant x_n \leqslant t \leqslant 1/2 \quad \text{или} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant x_n \leqslant 1.$$

Кроме того, мы применили неравенство Шварца, предварительно помножив и разделив подынтегральное выражение по dx_n на $\rho(x_n)^{r+\alpha-s_0}$. Мы обозначили через e_n единичный вектор, направленный по оси x_n.

Неравенство

$$\left\| \frac{U^{(p+l-\tau+\mu e_n)}}{\rho^{r+\alpha-s_0}} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant \| U \|_{W^{r+\gamma-1}_{\alpha,\alpha-\gamma+1}(\Omega)}$$

справедливо в силу следующих свойств:

$$|p| + |l| - |\tau| + \tau_n - r + s_0 - \gamma \leqslant r + \gamma - 1, \tag{32}$$

ведь $\tau_n - |\tau| \leqslant 0$, $|l| \leqslant r$, $-r + s_0 \leqslant 0$, $-\gamma \leqslant -1$,

$$r + \alpha - s_0 < 1/2, \tag{32'}$$

$$r + \alpha - s_0 \leqslant \alpha - \gamma + 1 + (r + \gamma - 1 - |p| - |l| + |\tau| - \tau_n + {} + r - s_0 + \gamma), \tag{32''}$$

что после сокращений дает очевидное неравенство $0 \leqslant r - |l| + |\tau| - \tau_n$.

В третьем соотношении применено неравенство Харди $(-(r + \alpha - s_0) < 1/2!)$. Возможность его применения становится очевидной, если рассматривать отдельно интегралы по dx_n на отрезках $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. В первом случае $\rho(x_n) = x_n$, а во втором — $\rho(x_n) = 1 - x_n$.

В последнем соотношении надо иметь в виду, что мы сейчас рассматриваем случай $|k| = r$.

Переходим к оценке $J_{k,l,\lambda,\tau}$, когда одновременно выполняются неравенства

$$(|p + k - \lambda| \leqslant r + \gamma - 1, \quad |p + l - \tau| \leqslant r + \gamma - 1!)$$

$$|J_{k,l,\lambda,\tau}| \leqslant \int\limits_{\Delta_2} \frac{1}{\rho^{2(\alpha-\gamma)+|\lambda|+\tau_n}} \left| \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}}{h^{|p-\lambda|}} \frac{\Delta^p U^{(l-\tau)}}{h^{|p|}} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{U^{(p+k-\lambda)}}{\rho^{\alpha+|\lambda|-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \left\| \frac{U^{(p+l-\tau)}}{\rho^{\alpha+\tau_n-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant \| U \|^2_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Delta_2)}$$

$$(\tau_n \leqslant r - s_0 + \gamma), \tag{33}$$

потому что

$$\alpha + |\lambda| - \gamma \leqslant \alpha < 1/2, \tag{34}$$

$$\alpha + \tau_n - \gamma \leqslant \alpha + r - s_0 < 1/2, \tag{35}$$

$$\alpha + |\lambda| - \gamma \leqslant \alpha - \gamma + 1 + r + \gamma - 1 - |p| - |k| + |\lambda|, \tag{34'}$$

$$\alpha + \tau_n - \gamma \leqslant \alpha - \gamma + 1 + r + \gamma - 1 - |p| - |l| + |r|. \tag{35'}$$

Ведь после сокращений в (34') получим очевидное неравенство $0 \leqslant r - |k|$, а в (35') — тоже очевидное неравенство $0 \leqslant (|\tau| - \tau_n) + (r - |l|)$.

Если же $\tau_n > r - s_0 + \gamma$, то интегрируя $J_{k,l,\lambda,\tau}$ по частям по dx_n $\mu = \tau_n - r + s_0 - \gamma$ раз, получим

$$|J_{k,l,\lambda,\tau}| \leqslant \int\limits_{\Delta_2'} dx' \int\limits_0^1 \rho(x_n)^{r+\alpha-s_0} \left| \int\limits_{x_n}^{1/2} \frac{\rho(t)^{\mu-1}}{\rho(t)^{2(\alpha-\gamma)+\tau_n+|\lambda|}} \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}}{h^{|p|}} dt \right|^2 dx_n \times$$

$$\times \left\| \frac{U^{(p+l-\tau+\mu e_n)}}{\rho^{r+\alpha-s_0}} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant \left\| \frac{U^{(p-\lambda+k)}}{\rho^{\alpha-(\gamma-|\lambda|)}} \right\|_{L_2(\Delta_2)} \| U \|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Delta_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \| U \|^2_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Delta_2)}. \tag{36}$$

Здесь надо принять во внимание неравенства (4) и (14′) и, кроме того, (32), (32′), (32″), (34), (34′).

Конечно, при интегрировании по частям опять возникают внеинтегральные члены вида

$$\beta = \varphi\psi \Big|_{x_n=0+0}^{1-0},$$

где

$$\varphi = \frac{1}{(\nu-1)!} \int\limits_{x_n}^{1/2} (x_n - t)^{\nu-1} \frac{\Delta^{\lambda} a_{kl}(x + h(p-\lambda))}{h^{|\lambda|}} \sigma^{(\tau_n)} \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}}{h^{|p-\lambda|}} dt,$$

$$\psi = \frac{\Delta^p}{h^{|p|}} \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_n^{j-1}} U^{(l-\tau)} \qquad (j = 0, 1, \ldots, \mu).$$

Воспользовавшись оценками для $a_{kl}^{(\lambda)}$, $\eta^{(\tau_n)}$, рассуждая как в (30), на этот раз получим (почти для всех x')

$$|\varphi\psi| \leqslant o(1) \int\limits_0^{1/2} t^{-(r+\alpha-s_0)+(\gamma-1)+(\gamma-|\lambda|)} \left| t^{-\alpha} \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}}{h^{p-\lambda}} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant o(1) \int\limits_0^{1/2} t^{-(r+\alpha-s_0)} \left| t^{-\alpha} \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}}{h^{p-\lambda}} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant o(1) \left(\int\limits_0^{1/2} t^{-2(r+\alpha-s_0)} dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^1 \left| t^{-\alpha} \frac{\Delta^{p-\lambda} U^{(k)}}{h^{p-\lambda}} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant o(1)$$

(аналогично $\varphi\psi = o(1 - x_n)$, $x_n \to 1$). Здесь надо учесть, что $-2(r + \alpha - s_0) > -1$, а также пояснения к (30).

Так как согласно индукции

$$\| U \|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Delta_2)} < \infty, \tag{37}$$

то на основании (20), (22), (23), (24,) (31), (33), (36), получим для достаточно малых h

$$X \leqslant A_1 X + B_1 + J_1, \tag{38}$$

$$J_1 = \int\limits_{\Delta_3} \frac{\Delta^p F}{h^{|p|}} \sigma(x_n) \eta(x') \frac{\Delta^p U}{h^{|p|}} dx. \tag{39}$$

Переходим к оценке J_1.

Имеем для достаточно малых h, учитывая, что $\eta = 0$ вне Δ_2' (пояснения ниже),

$$|J_1| = \left| \int\limits_{\Delta_3} F\sigma(x_n) \frac{\Delta_{-h}^p}{h^{|p|}} \left(\eta \frac{\Delta_h^p U}{h^{|p|}} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Delta_3} F \left(\sigma\eta \frac{\Delta_{-h}^p \Delta_h^p U}{h^{|2p|}} + \sum_{0 \leqslant \lambda \leqslant p}{}' \sigma c_p^\lambda \frac{\Delta_{-h}^{p-\lambda}\eta \Delta_{-h}^\lambda \Delta_p^p U}{h^{2|p|}} \right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \| F\rho^{r+\alpha} \|_{L_2(\Delta_3)} \left(\left\| \frac{U^{(2p)}\sqrt{\eta}}{\rho^{\alpha+r-2\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_3)} + \sum{}' \left\| \frac{\dfrac{\Delta_{-h}^\lambda \Delta_h^p U}{h^{|p+\lambda|}}}{\rho^{\alpha+r-2\gamma}} \right\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant AX + B \quad (0 < \gamma \leqslant r), \tag{40}$$

где A, B — константы, не зависящие от X.

В сумме в скобках мы выделим член, соответствующий $\lambda = p$, это сделано на тот случай, когда $|p| = \gamma = r$, т. е. $|2p| = \gamma + r$.

Мы применили неравенство $\eta \leqslant \sqrt{\eta}$ в первом члена см. (12′) и неравенство $|h^{-|p-\lambda|}\Delta_{-h}^{p-\lambda}\eta| \leqslant 1$ — в остальных членах. Кроме того, подынтегральное выражение помножено и разделено на $\rho^{\alpha+r}$ ($\rho(x) = \rho(x_n)$ — расстояние от $x \in \Delta_3$ до Γ) и применено неравенство Шварца. Сумма Σ' распространена на все λ, для которых $0 \leqslant \lambda < p$, а если $|p| < r$, то и на $\lambda = p$.

Если $s_0 \leqslant 2\gamma \leqslant 2r$, то

$$\left\| \frac{\Delta_{-h}^\lambda \Delta_h^p U / h^{|p+\lambda|}}{\rho^{\alpha+r-2\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_3)} \leqslant \left\| \frac{U^{p+\lambda}}{\rho^{\alpha+r-2\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_3)} \leqslant \| U \|_{W_{2,\alpha-\gamma+1}^{r+\alpha-1}(\Delta_3)},$$

потому что в этом случае

$$\alpha + r - 2\gamma = (\alpha + r - s_0) + (s_0 - 2\gamma) \leqslant \alpha + r - s_0 < 1/2,$$

$$\alpha + r - 2\gamma \leqslant \alpha - \gamma + 1 + r + \gamma - 1 - |p| - |\lambda|,$$

что после сокращений приводит к очевидному неравенству $\gamma \geqslant \lambda$.

Если же $0 < 2\gamma < s_0$, то

$$\left\| \frac{\Delta_{-h}^\lambda \Delta_h^p U / h^{|p+\lambda|}}{\rho^{r+\alpha-2\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_3)} = \left\| \frac{\Delta_{-h}^\lambda \Delta_h^p U / h^{|p+\lambda|}}{\rho^{(r+\alpha-s_0)+(s_0-2\gamma)}} \right\|_{L_2(\Delta_3)} \leqslant \left\| \frac{\Delta_{-h}^\lambda \Delta_h^p U}{h^{|p+\tau|}} \right\|_{w_{2,r+\alpha-s_0}^{s_0-2\gamma}(\Delta_3)} \leqslant$$

$$\leqslant \| U \|_{w_{2,r+\alpha-s_0}^{(|\lambda|+s_0-\gamma)}(\Delta_3)} \leqslant \| U \|_{W_{2,\alpha-\gamma+1}^{r+\gamma-1}(\Delta_3)}.$$

Второе соотношение этой цепи следует из того, что $-1/2 < r + \alpha - s_0 < 1/2$ и функция

$$\left. \frac{\partial^s U}{\partial n^s} \right|_\Gamma = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 2\gamma - 1).$$

Третье соотношение верно, потому что $|\lambda| + |p| + s_0 - 2\gamma = |\lambda| + s_0 - \gamma$. Наконец, четвертое (последнее соотношение) следует из того, что

$$r + \alpha - s_0 < 1/2$$

и

$$r + \alpha - s_0 \leqslant \alpha - \gamma + 1 + r + \gamma - 1 - |\lambda| - s_0 + \gamma,$$

что эквивалентно очевидному неравенству $0 \leqslant \gamma - |\lambda|$.

Этим (40) доказано для $\gamma \leqslant r$.

Оценим теперь J_1 для $\gamma > r$. Пусть $k \leqslant p$, $|k| = r$ есть некоторый неотрицательный целый вектор. Тогда ($\Delta = \Delta_n!$, пояснения ниже)

$$|J_1| = \left| \int_{\Delta_3} \frac{\Delta_h^k}{h^{|k|}} \frac{\Delta_h^{p-k} F}{h^{|p-k|}} \frac{\Delta^p U}{h^{|p|}} \sigma \eta dx \right| = \left| \int_{\Delta_3} \frac{\Delta^{p-k} F}{h^{|p-k|}} \sigma \frac{\Delta_{-h}^k}{h^{|k|}} \left(\eta \frac{\Delta^p U}{h^{|p|}} \right) dx \right| =$$

$$= \int_{\Delta_3} \frac{\Delta^{p-k} F}{h^{|p-k|}} \left(\sigma \eta \frac{\Delta_{-h}^k \Delta^p U}{h^{|p+k|}} + \sum_{0 \leqslant \tau < k}' \sigma c_k^\tau \frac{\Delta_{-h}^{k-\tau} \eta \Delta_{-h}^\tau \Delta^p U}{h^{|k+p|}} \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \| F^{(p-k)} \rho^{\alpha + r + |p-k|} \|_{L_2(\Delta_3)} \left(\left\| \frac{U^{(k+p)} \sqrt{\eta}}{\rho^{\alpha - \gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_3)} + \sum{}' \left\| \frac{U^{(\tau+p)}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_3)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \| F^{(p-k)} \rho^{\alpha+\gamma} \|_{L_2(\Delta_3)} \left(X + \| U \|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Delta_3)} \right) = AX + B \quad (\gamma > r). \tag{41}$$

Сумма Σ' распространена на все τ, удовлетворяющие неравенству $0 \leqslant \leqslant \tau < k$. В четвертом соотношении мы разделили и умножили на $\rho^{\alpha + r + |p-k|} = \rho^{\alpha+\gamma}$ и учли (12′) и вторую оценку (14). В пятом (предпоследнем) соотношении при переходе к норме в смысле $W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}$ надо учесть, что для слагаемых входящих в сумму

$$|\tau| + |p| \leqslant r + \gamma - 1,$$

$$\alpha - \gamma \leqslant \alpha < 1/2,$$

$$\alpha - \gamma \leqslant \alpha - \gamma + 1 + r + \gamma - 1 - |\tau| - |p|, \text{ т. е. } 0 \leqslant r - |\tau|.$$

Из (38), (40), (41) следует

$$X^2 \leqslant A + BX.$$

Поэтому

$$X \leqslant C,$$

где константы A, B, C не зависят от h и X. Но тогда, учитывая, что $\eta = 1$ на Δ_1, получим неравенства (10), где $|k| = r$ и $|p'| = \gamma$, $p' = (p_1, \ldots, p_{n-1}, 0)$.

Доказательство леммы 2. Натуральное число μ, которое нас интересует, удовлетворяет неравенству $\mu \leqslant r + \gamma$. Следовательно, если $\gamma < r$, то $\mu \leqslant 2r - 1$, и наша лемма в этом случае тривиальна.

Пусть теперь $\gamma \geqslant r$. Тогда $U \in W_2^{r+\gamma} \to W_2^{2r}$ локально и равенство (2) возможно проинтегрировать по частям:

$$\int_{\Delta_1} \left[\sum_{|k|, |l| \leqslant r} (-1)^{|l|} (a_{kl} U^{(k)})^{(l)} - F \right] v dx = 0, \tag{42}$$

где v — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, финитная в Δ_1. Поэтому почти всюду на Δ_1 имеет место равенство

$$\sum_{|k|, |l| \leqslant r} (-1)^{|l|} (a_{kl} U^{(k)})^{(l)} = F.$$

Продифференцируем его $\gamma - r$ раз ($p = (p', p_n)$, $|p| = \gamma - r$) и оставим в левой части только член $k^0 = (0, \ldots, 0, r)$, а остальные члены перенесем в правую часть:

$$(-1)^r a_{k^0 k^0} U^{(k^0 + k^0 + p)} = - \sum_{|k|, |l| \leqslant r}' (-1)^{|l|} \sum_{0 \leqslant \lambda \leqslant l+p} c_{l+p}^\lambda a_{kl}^{(\lambda)} U^{(k+l+p-\lambda)} + F^{(p)}. \tag{43}$$

Отметим, что из неравенства (6), если в нем положить $\xi_{k^0} = 1$ и $\xi_k = 0$, $k \neq k^0$, следует

$$a_{k^0k^0}(x) \geqslant \frac{1}{\rho(x)^{2\alpha}}. \tag{44}$$

Поэтому, если разделить (43) на $a_{k^0k^0}\rho^{\alpha-\gamma}$ и учесть, что

$$U^{(k^0+k^0+p)} = \frac{\partial^{2r+p_n}U^{(p')}}{\partial x_n^{2r+p_n}},$$

то получим следующие оценки (пояснения ниже):

$$\left\| \frac{\partial^{2r+p_n}U^{(p')}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta')} \leqslant \sum_{\substack{|\lambda|=0\\ |k|,\,|l|=r}}{}' \left\| \frac{U^{(k+l+p)}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_1')} +$$

$$+ \sum_{|k+l+p-\lambda| \leqslant r+\gamma-1}{}' \left\| \frac{U^{(k+l+p-\lambda)}}{\rho^{|\lambda|-\gamma+\alpha}} \right\|_{L_2(\Delta_1)} + \left\| \frac{F^{(p)}\rho^{2\alpha}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta')} \leqslant \sum_{\substack{|q|=r+\gamma\\ q_n<p_n+2r}} \left\| \frac{U^{(q)}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_1)} +$$

$$+ \sum{}' \| U \|_{W^{r+\gamma-1}_{2,\,\alpha-\gamma+1}(\Delta_1)} \leqslant \sum_{\substack{|q|=r+\gamma\\ q_n<p_n+2r}} \left\| \frac{U^{(q)}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_1)} + A. \tag{45}$$

Из суммы в правой части (45) мы выделили члены, для которых $|\lambda| = 0$, $|k|, |l| = r$. Для таких членов вектор $q = k + l + p$ обладает следующими свойствами:

1) $|q| = r + r + (\gamma - r) = r + \gamma$, 2) $q_n < 2r + p_n$.

Надо учесть, что среди этих членов нет члена, соответствующего $k = l = k^0$, $\lambda = 0$. Надо еще учесть, что в силу (4) и (44)

$$|a_{kl}/a_{k^0k^0}| \leqslant 1.$$

Для остальных членов надо учесть оценку

$$\left| a_{kl}^{(\lambda)} / a_{k^0k^0} \right| \leqslant \frac{1}{\rho^{|\lambda|}}$$

(см. (4), (44)). Кроме того, для этих членов

$|k + l + p - \lambda| \leqslant r + \gamma - 1$,

$|\lambda| - \gamma + \alpha = |\lambda| - (|p| + r) + \alpha \leqslant \alpha \leqslant 1/2$,

$|\lambda| - \gamma + \alpha \leqslant \alpha - \gamma + 1 + r + \gamma - 1 - |k| - |l| - |p| + |\lambda|$,

где в последнем неравенстве после сокращений получается очевидное неравенство

$$0 \leqslant r + \gamma - |k| - |l| - |p| = 2r - |k| - |l|.$$

Мы доказали неравенство (45) для любого неотрицательного целого вектора $p = (p', p_n) = (p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n)$ с $|p| = |p'| + p_n = \gamma - r \geqslant 0$.

В силу (45), если неравенство (11) верно для $\mu = 0, 1, \ldots, 2r - 1$ и p' таких, что $\mu + |p'| = r + \gamma$, тогда оно верно и для любого натурального μ и вектора p' таких, что $\mu + |p'| = r + \gamma$.

В самом деле, предположим, что наше утверждение верно для любого $\mu < \mu_0$, где $2r \leqslant \mu_0 \leqslant r + \gamma$. Пусть $p_n = \mu_0 - 2r$ и $p = (p', p_n)$ — неотрицательный целый вектор, для которого $|p'| = r + \gamma - \mu_0$ ($\geqslant 0$!). Тогда, в силу (45),

$$\left\| \frac{\partial^{\mu_0} U^{(p')} / \partial x_n^{\mu_0}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_p(\Delta_1)} \leqslant \sum_{\substack{|q|=r+\gamma \\ q_n<\mu_0}} \left\| \frac{U^{(q)}}{\rho^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\Delta_1)} + A < \infty.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2 при $r = 1$, $\Gamma \in C^{(r)}$.

При $r = 1$ (6) влечет за собой неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \geqslant \varkappa \rho^{-2\alpha} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2. \tag{46}$$

При $\gamma = 0$ теорема 2 сводится к доказанной уже теореме 1, в § 1 с учетом замечания 1.

Пусть теперь $\gamma > 0$ и условия теоремы 2 выполняются для γ. Они, очевидно, выполняются и для $\gamma - 1$. Будем считать, что теорема 2 верна для $\gamma - 1$. Таким образом, будем считать, что $U \in W^{r+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Omega)$. Мы хотим доказать, что $U \in W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$.

Произвольную точку x^0 замыкания ограниченной области Ω ($x^0 \in \overline{\Omega}$) с гладкой границей Γ можно покрыть регулярным мостом ($x^0 \in \mathfrak{R} \subset \overline{\Omega}$, см. [4] или [6, 2-е изд., гл. 13]). Именно: можно указать прямоугольную систему координат $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, в которой

$$\mathfrak{R} = \{\xi\colon \varphi(\xi') \leqslant \xi_n \leqslant \psi(\xi'),\ \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \omega\}, \tag{47}$$

где ω есть $(n-1)$-мерный открытый куб, а функции $\xi_n = \varphi(\xi')$, $\xi_n = \psi(\xi')$

$$0 < m < \psi(\xi') - \varphi(\xi') < M \tag{48}$$

непрерывно дифференцируемы на $\overline{\omega}$. Они описывают некоторые куски γ_1, $\gamma_2 \subset \Gamma$. При этом $\mathfrak{R} \subset \overline{\Omega}$.

В данном случае $\Gamma \in C^{(2)}$, следовательно, $\varphi(\xi') \in C^{(2)}(\overline{\omega})$, $\psi(\xi') \in C^{(2)}(\overline{\omega})$. Будем считать, что функции φ и ψ продолжены с $\overline{\omega}$ на все $(n-1)$-мерное пространство R_{n-1} точек $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ с сохранением класса $C^{(2)}$ и неравенств (48).

Наряду с координатами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ введем новые координаты $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ при помощи преобразования

$$\zeta_j = \xi_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$\zeta_n = \varphi(\xi') + \xi_n [\psi(\xi') - \varphi(\xi')],$$

устанавливающего взаимно однозначное соответствие $\xi \rightleftarrows \zeta$.

Таким образом, мы имеем дело с двумя преобразованиями (взаимно однозначными)

$$x \rightleftarrows \xi \rightleftarrows \zeta.$$

Первое из них линейное (ортогональное) с якобианом равным 1, а второе — дважды непрерывно дифференцируемое с якобианом

$$J = \psi(\xi') - \varphi(\xi') \qquad (0 < m < J < M).$$

Преобразование $x \to \zeta$ обозначим через $\zeta = Ax$ и положим $A\Omega = \Omega^*$, $A\Gamma = \Gamma^*$. Область Ω^* содержит в себе, очевидно, куб $\Delta^* = A\mathfrak{R} = \omega \times (0, 1)$

точек $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$ ($\zeta' \in \omega$, $\zeta_n \in [0,1]$ и нижняя и верхняя (в направлении ζ_n) границы Δ^* принадлежат к Γ^*. Это показывает, что область Ω^* относится к типу областей, рассмотренных в замечании 3. При этом, можно считать, что Δ^* играет роль Δ_3 в этом замечании.

Положим $f_*(\zeta) = f(A^{-1}\zeta)$.

Решение $U(x) \in \mathfrak{M}_0$ вариационной задачи (2) § 1 при $r = 1$ удовлетворяет уравнению

$$\int_\Omega \Big[a_{00}(x) U v + \sum_{i=0}^{n} a_{i0}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} v + \sum_{j=1}^{n} a_{0j} U \frac{\partial v}{\partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - F(x) v(x) \Big] dx = 0 \qquad (49)$$

для любых $v \in \mathfrak{M}_0$. Считаем далее $\xi_i = y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$.

При этом по условию индукции $U(x) \in W^{1+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Omega)$. Но тогда $U_*(y) \in W^{1+\gamma-1}_{2,\alpha-\gamma+1}(\Omega)^*$ (см. § 3, лемма 4), $U_*(y) \in \mathfrak{M}_0$ и выполняется равенство

$$\int_{\Omega^*} \Big[b_{00}(y) U_* v_* + \sum_{s=1}^{n} b_{s0}(y) \frac{\partial U_*}{\partial y_s} v_* + \sum_{l=0}^{n} b_{0l}(y) U_* \frac{\partial v_*}{\partial y_l} + \\ + \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{sl}(y) \frac{\partial U_*}{\partial y_s} \frac{\partial v_*}{\partial y_l} - J F_*(y) v_*(y) \Big] dy = 0 \qquad (49')$$

для любых $v_*(y) \in \mathfrak{M}_0^*$, где $\mathfrak{M}_0^*$ есть класс функций $v_* \in W^1_{2,\alpha}(\Omega^*)$ с $v_*|_{\Gamma^*} = 0$ и

$$b_{00} = J a_{00}^*, \quad b_{s0} = J \sum_{i=1}^{n} a_{i0}^* \frac{\partial y_s}{\partial x_i}, \quad b_{0l} = J \sum_{j=1}^{n} a_{0j}^* \frac{\partial y_l}{\partial x_j}, \quad b_{sl} = J \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^* \frac{\partial y_s}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}$$
$$(f(x) = f_*(Ax)).$$

Отметим следующие свойства:

$$\begin{aligned} & b_{sl}(y) = b_{ls}(y) \\ & |b_{sl}^{(\lambda)}(y)| \leqslant \frac{c}{\rho_*(y)^{2\alpha+|\lambda|}}, && (|\lambda| \leqslant \gamma,\ y \in \Omega^*), \\ & \| F_* \rho_*^{\alpha+1} \|_{L_2(\Omega^*)} < \infty && (\gamma = 1), \\ & \| F_*^{(\tau)} \rho_*^{\alpha+1+|\tau|} \|_{L_2(\Omega^*)} < \infty && (|\tau| \leqslant \gamma - 1,\ \gamma > 1). \end{aligned} \qquad (50)$$

Они легко следуют в силу неравенств

$$c_1 \rho(x) \leqslant \rho_*(y) \leqslant c_2 \rho(x) \qquad (51)$$

(см. ниже § 3 (8)) из соответствующих свойств $a_{ij}(x)$ и $F(x)$ (см. § 2, (4), (5), (5')), которые предположены верными, как это сказано в теореме 2.

Отметим еще неравенство

$$\int_{\Omega^*} \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_*}{\partial y_j} \right)^2}{\rho_*^{2\alpha}(y)} dy = \int_{\Omega^*} \rho_*^{-2\alpha} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \Big)^2 dy \leqslant \int_{\Omega^*} \rho_*(y)^{-2\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \rho(x)^{-2\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^*} \sum_{s=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} b_{sl}(y) \frac{\partial f_*}{\partial y_s} \frac{\partial f_*}{\partial y_l} dy. \tag{52}$$

Во втором соотношении (52) мы используем ограниченность функций $\partial x_k / \partial y_j$ (непрерывных на Ω^*), в третьем — (51), а в четвертом — (46).

Свойства (50), (52) составляют условия теоремы 2 для функций $U^*(y)$, $b_{sl}(y)$, JF^*. Кроме того, Ω^* есть множество типа рассмотренного в замечании 3, § 2.

Как уже отмечалось выше, прямоугольник $\Delta^* = A(\mathfrak{R}) \subset \Omega^*$ может играть тут роль Δ_3.

Следовательно, законно применить к U^*, b_{sl}, JF^*, Ω^* леммы 1, 2, § 2, которые утверждают в рассматриваемом случае ($r = 1$, см. замечание 4), что

$$U^* \in W^{r+\gamma}_{2, \alpha-\gamma}(\Delta_1^*). \tag{53}$$

Здесь $\Delta_1^* = A(\mathfrak{R}_1)$, где $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$ — уменьшенный мост, покрывающий точку x^0, определяемый, как в (47), где только $\omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega$ ((n — 1)-мерный куб). При этом $\rho_*(\zeta)$ в определении класса $W^{1+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Delta_1^*)$ есть расстояние от $\zeta \in \Delta_1^*$ до Γ^* (границы Ω^*).

Отметим, что в формулировке теоремы 2 предполагалось выполненным неравенство (6) § 2 (условие вырожденной эллиптичности), но на самом деле при доказательстве этой теоремы (см. (22) § 2) было использовано только вытекающее из (6) § 2 неравенство, которое получается, если в нем ξ_k заменить на $f^{(k)}(x)$ и проинтегрировать его по $x \in \Omega$. Соотношение (52) и есть неравенство такого типа.

Из (53) следует для $|k| = 1 + \gamma$:

$$\left\| \frac{U^{(k)}(x)}{\rho(x)^{\alpha-\gamma}} \right\|_{L_2(\mathfrak{R}_1)} \leqslant \left\| \rho_*(y)^{-\alpha+\gamma} \sum_{1 \leqslant |s| \leqslant 1+\gamma} |U_*^{(s)}(y)| \right\|_{L_2(\Delta_1^*)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant |s| \leqslant 1+\gamma} \left\| \frac{U_*^{(s)}(y)}{\rho_*^{\alpha-\gamma}} \right\| \leqslant \| U^*(y) \|_{W^{1+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Delta_1^*)}. \tag{54}$$

Здесь в первом соотношении использовано (51) и тот факт, что $U^{(k)}(x)$ есть некоторая линейная комбинация из указанных $U_*^{(s)}(y)$ с непрерывными на Δ_1^* коэффициентами μ_s. Последнее соотношение верно на основании утверждения 1) § 1.

Из (54) и того факта, что $U \in L_2(\Omega)$ следует, что

$$U \in W^{1+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\mathfrak{R}_1), \tag{55}$$

где при определении $W^{1+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\mathfrak{R}_1)$ надо считать, что $\rho(x)$ есть расстояние от $x \in \mathfrak{R}_1$ до Γ (границы Ω).

Так как $\overline{\Omega}$ можно покрыть конечным числом мостов $\mathfrak{R}_1$ (см. [6, 2-е изд., гл. 13]), то из (55) следует, что

$$U \in W^{1+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega_1)$$

и теорема 2 при $r = 1$ доказана.

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Л е м м а 3. *Пусть* s_0 *есть натуральное число, для которого*

$$s_0 - 1 < r + \alpha - 1/2 < s_0, \quad r \leqslant 2s_0, \tag{1}$$

или, что все равно,

$$-1/2 < r + \alpha - s_0 < 1/2, \quad r \leqslant 2s_0. \tag{1'}$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}_0$ *есть класс функций* $f \in W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ *с нулевыми граничными условиями*

$$\left.\frac{\partial^s f}{\partial n^s}\right|_\Gamma = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1).$$

Тогда имеет место неравенство

$$\left\|\frac{f}{\rho^{r+\alpha}}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{w^r_{2,\alpha}(\Omega)} \quad \textit{для всех } f \in \mathfrak{M}_0, \tag{2}$$

где $C > 0$ *не зависит от* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произвольную точку $x \in \overline{\Omega}$ ограниченной области Ω с гладкой границей Γ можно покрыть регулярным мостом $\mathfrak{N}$ (см. (4) и [6, 2-е изд.]). Именно, можно указать прямоугольную систему координат $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ так, что

$$\mathfrak{N} = \{\xi : \varphi(\xi') \leqslant \xi_n \leqslant \psi(\xi'),\ \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \omega\} \subset \overline{\Omega},$$

где ω есть $(n-1)$-мерный открытый шар, а функции $\xi_n = \varphi(\xi')$, $\xi_n = \psi(\xi')$, $\psi(\xi') - \varphi(\xi') > 2m > 0$ непрерывно дифференцируемы на $\overline{\omega}$. Они описывают некоторые куски $\gamma_1, \gamma_2 \subset \Gamma$.

Якобиан преобразования $x \rightleftarrows \xi$ равен 1.

Функцию $f \in \mathfrak{M}_0$ можно рассматривать на $\mathfrak{N}$ как функцию $f(\xi) = f(\xi', \xi_n)$.

Положим $\lambda(\xi') = 1/2\,[\varphi(\xi') + \psi(\xi')]$, тогда

$$\psi(\xi') - \lambda(\xi') = \lambda(\xi') - \varphi(\xi') > m > 0.$$

Введем множества

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_- &= \{\xi : \varphi(\xi') \leqslant \xi_n \leqslant \lambda(\xi'),\ \xi' \in \omega\}, \\ \mathfrak{N}_+ &= \{\xi : \lambda(\xi') \leqslant \xi_n \leqslant \psi(\xi'),\ \xi' \in \omega\}, \\ \mathfrak{N} &= \mathfrak{N}_- + \mathfrak{N}_+, \end{aligned}$$

и пусть

$$\begin{aligned} \rho_-(\xi) &= \xi_n - \varphi(\xi'), \quad \xi \in \mathfrak{N}_-, \\ \rho_+(\xi) &= \psi(\xi') - \xi_n, \quad \xi \in \mathfrak{N}_+, \\ \rho(\xi) &= \rho_-(\xi)\,\rho_+(\xi), \quad \xi \in \mathfrak{N}. \end{aligned} \tag{3}$$

В силу того, что $f \in \mathfrak{M}_0$, справедливы равенства

$$\left.\frac{\partial^s f}{\partial \xi_n^s}\right|_{\substack{\xi_n = \varphi(\xi') \\ \xi_n = \psi(\xi')}} = 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1), \tag{4}$$

поэтому

$$f(\xi) = \frac{1}{(s_0 - 1)!} \int\limits_{\varphi(\xi')}^{\xi_n} (\xi_n - t)^{s_0 - 1} \frac{\partial^{s_0} f}{\partial \xi_n^{s_0}}(\xi', t)\, dt$$

и (пояснения ниже) $\rho(\xi)=\rho_-(x)$, $x\in\mathfrak{R}$, имеет порядок расстояния от x до границы Γ области Ω):

$$\left\|\frac{f(x)}{\rho_-(x)^{r+\alpha}}\right\|_{L_2(\mathfrak{R}_-)}\leqslant\left\|\frac{f(\xi)}{(\xi_n-\varphi(\xi_n'))^{r+\alpha}}\right\|_{L_2(\mathfrak{R}_-)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{(\xi_n-\varphi(\xi'))^{r+\alpha}}\int\limits_{\varphi(\xi')}^{\xi_n}(\xi_n-t)^{s_0-1}\frac{\partial^{s_0}f}{\partial\xi_n^{s_0}}(\xi',t)\,dt\right\|_{L_2(\mathfrak{R}_-)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{(\xi_n-\varphi(\xi'))^{r+\alpha-s_0+1}}\int\limits_{\varphi(\xi')}^{\xi_n}\frac{\partial^{s_0}f}{\partial\xi_n^{s_0}}(\xi',t)\,dt\right\|_{L_2(\mathfrak{R}_-)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{\dfrac{\partial^{s_0}f}{\partial\xi_n^{s_0}}}{(\xi_n-\varphi(\xi'))^{r+\alpha-s_0}}\right\|_{L_2(\mathfrak{R}_-)}\leqslant\|f\|_{L_2(\mathfrak{R}_-)}+\|f\|_{\overline{w}^r_{2,\alpha}(\mathfrak{R}_-)}\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{w^r_{2,\alpha}(\mathfrak{R})}\leqslant\|f\|_{w^r_{2,\alpha}(\Omega)}. \tag{5}$$

Четвертое соотношение в (5) верно в силу того, что

$$-{}^1/_2<r+\alpha-s_0$$

(неравенство Харди). Пятое (предпоследнее) верно в силу утверждения 1 § 1, так как

$$r+\alpha-s_0<{}^1/_2.$$

Далее,

$$\|f\|_{L_2(\mathfrak{R}_-)}\leqslant\|f\|_{\overline{w}^r_{2,\alpha}(\mathfrak{R}_-)}\leqslant\|f\|_{w^r_{2,\alpha}(\mathfrak{R})}, \tag{6}$$

что следует из утверждения 3 § 1, где надо считать $\Omega=\mathfrak{R}$, если принять во внимание условия (1).

Мы обозначим через $\overline{w}^r_{2,\alpha}(\mathfrak{R}_-)$ (с черточкой сверху) класс $w^r_{2,\alpha}(\mathfrak{R}_-)$, где роль ρ играет ρ_-. Что же касается $w^r_{2,\alpha}(\mathfrak{R})$, то этот класс определяется как обычно, но где $\rho(\xi)$ выражается по формуле (3).

Рассуждая аналогично, получим

$$\left\|\frac{f(x)}{\rho_+(x)^{r+\alpha}}\right\|_{L_2(\mathfrak{R}_+)}\leqslant\|f\|_{w^r_{2,\alpha}(\Omega)}. \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует

$$\left\|\frac{f(x)}{\rho(x)^{r+\alpha}}\right\|_{L_2(\mathfrak{R})}\leqslant\|f\|_{w^r_{2,\alpha}(\Omega)},$$

и так как $\overline{\Omega}$ можно покрыть регулярными мостами, взятыми в конечном числе, то имеет место неравенство (2).

Лемма 4. *Пусть R_n и R_n^* — n-мерные евклидовы пространства точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ соответственно и $\Omega\subset R_n$, $\Omega_*\subset R_n^*$ открытые ограниченные множества с гладкими границами Γ, Γ_*. Пусть также $y=Ax$ — непрерывно дифференцируемая операция*

$$y_i=\varphi_i(x_1,\ldots,x_n),\quad x\in\overline{\Omega}\qquad(i=1,\ldots,n),$$

трансформирующая Ω на Ω_* однозначно с якобианом, удовлетворяющим неравенствам

$$0<m<\frac{D(y)}{D(x)}<M\qquad(x\in\overline{\Omega}).$$

Тогда

$$c_1\rho(x) < \rho_*(y) < c_2\rho(x) \qquad (y = Ax,\ x \in \bar{\Omega}), \tag{8}$$

где $\rho(x)$, $\rho_*(y)$ — *расстояния от* x, y *до* Γ, Γ_* *соответственно.*

При этом справедливы неравенства

$$C_1 \| f(x) \|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega)} \leqslant \| f_*(y) \|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega_*)} \leqslant C_2 \| f(x) \|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega)} \tag{9}$$

$$(1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad f(x) = f_*(Ax), \quad x \in \bar{\Omega}).$$

Доказательство. Пусть x точка Ω, а x' ее ближайшая точка на Γ ($x' \in \Gamma$) и γ отрезок xx', описываемый равенствами

$$x_j = a_j t + b_j \qquad (j = 1, \ldots, n; \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

Тогда

$$\rho(x) = (\beta - \alpha)\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\Big)^{1/2}.$$

Операция A трансформирует γ на гладкий кусок $\gamma_* = A(\gamma)$:

$$y_i = \varphi_i(a_1 t_1 + b_1, \ldots, a_n t_n + n) \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

с концами $y = Ax$, $y' = Ax' \in \Gamma^*$.

Пусть $|\gamma_*|$ — длина γ_*. Тогда

$$\rho_*(y) \leqslant |\gamma^*| = \int_\alpha^\beta \Big[\sum_{j=n}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} a_k\Big)^2\Big]^{1/2} dt \leqslant M\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{1/2}(\beta - \alpha) = M\rho(x),$$

где

$$M^2 = \max_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\Big)^2.$$

Мы получили второе неравенство в (8). Первое можно получить, поменяв местами x и y.

Далее, ($|k| = r$)

$$\| f(x) \|_{L_p(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega_*} |f_*(y)|^p \frac{D(x)}{D(y)}\, dy\Big)^{1/p} \leqslant \frac{1}{m} \| f_* \|_{L_p(\Omega_*)}, \tag{10}$$

$$\Big\| \frac{f^{(k)}(x)}{\rho(x)^\alpha} \Big\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \Big\| \rho_*(y)^{-\alpha} \sum_{1 \leqslant |s| \leqslant r} |f_*^{(s)}(y)| \Big(\frac{D(x)}{D(y)}\Big)^{1/p} \Big\|_{L_p(\Omega_*)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant |s| \leqslant r} \Big\| \frac{f^{(s)}(y)}{\rho_*^\alpha(y)} \Big\|_{L_p(\Omega_*)} \leqslant \| f_*(y) \|_{W^r_{p,\alpha}(\Omega)}. \tag{11}$$

В первом соотношении (11) мы заменяем x на y и $\rho(x)$ на $\rho_*(y)$, используя (8) и тот факт, что $f^{(k)}(x)$ ($|k| = r$) есть линейная комбинация производных $f^{(s)}(y)$ по y порядков s, $|s| \leqslant r$ с непрерывными (следовательно, ограниченными) на $\bar{\Omega}_*$ коэффициентами. Во втором соотношении (11) надо учесть ограниченность $D(x)/D(y)$ на Ω_* и, наконец, в третьем (последнем) используется утверждение 1) § 1.

Из (10), (11) следует первое неравенство (9), а второе получается из него, если поменять местами x и y. Этим лемма доказана.

Замечание 5. Будем считать, что условия теоремы 2 выполняются и $\mathring{W}^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$ обозначает класс функций $U \in W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^s U}{\partial n^s}\right|_\Gamma = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, s_0 - 1)$$

(т. е. $\mathring{W}^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega) = W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega) \cap \mathfrak{M}_0$).

Введем, кроме того, пространство H функций F, определенных на Ω, для которых имеет смысл норма

$$\| F \|_H = \sum_{|\tau| \leqslant \gamma - r} \| F^{(\tau)} \rho^{\alpha + r + |\tau|} \| \qquad (\gamma > r).$$

Мы считаем, таким образом, что $\gamma > r$. Пространства $\mathring{W}^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$ и H банаховы.

Линейный оператор

$$LU = \sum_{|k|, |l| \leqslant r} (-1)^{|l|} (a_{kl} U^{(k)})^{(l)}$$

отображает пространство $\mathring{W}^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$ функций U на пространство H функций F:

$$LU = F. \tag{12}$$

При этом L — ограниченный оператор, как это следует из неравенства § 2 (2), где надо заменить ψ, Φ на F, U.

Больше того, оператор L осуществляет взаимно однозначное отображение

$$\mathring{W}^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega) \rightleftarrows H.$$

Обратное отображение

$$H \to W^{r+\gamma}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega) \tag{12'}$$

следует из теоремы 2.

Если проследить все выкладки при доказательстве теоремы 2, то легко видеть, что обратная операция (12′) является ограниченной. Впрочем, сам по себе факт ограниченности обратного линейного оператора следует из общей теории банаховых пространств.

Линейный ограниченный оператор, отображающий взаимно однозначно одно банахово пространство на другое, необходимо имеет в качестве обратного ограниченный оператор.

Это замечание показывает, что утверждение теоремы 2 имеет в определенном смысле окончательный характер. Например, из условий теоремы 2, вообще говоря, не следует, что $U \in W^{r+\nu}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$, где $0 \leqslant \nu < \gamma$, потому что класс $W^{r+\nu}_{2,\alpha-\nu}(\Omega)$ есть существенная часть класса $W^{r+\nu}_{2,\alpha-\gamma}(\Omega)$.

Замечание 6. Пусть $\alpha = 0$ и в условиях теоремы 2 теперь уже

$$| a^{(\lambda)}_{kl}(x) | \leqslant c \qquad (|\lambda| \leqslant \gamma), \tag{4}$$

$$\| F \| < \infty \qquad (|\lambda| \leqslant \gamma), \tag{5}$$

$$\| F^{(\tau)} \| < \infty \qquad (|\tau| \leqslant \gamma - r, \quad \gamma \geqslant r). \tag{5'}$$

Здесь и ниже нумерация формул соответствует нумерации § 2.

Это классический случай. В этом случае, как известно (см. [10, 11, 13]), решение U вариационной задачи (2) принадлежит классу $W^{r+\gamma}_2(\Omega)$.

Этот факт не содержится в формулировке теоремы 2. Однако он немедленно следует из приведенных в § 2 выкладок, если учесть (4), (5), (5′). Например, при доказательстве леммы 2 теперь уже функция $\sigma(x_n) \equiv 1$ и в неравенствах § 2 (22), (23), (24), (33) под знаками интегралов и норм множители вида ρ^μ надо опустить. В результате эти неравенства будут иметь вид

$$I \geqslant \varkappa \sum_{|k|=r} \left(\frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}}\right)^2 \eta dx = X^2, \tag{22}$$

$$|J_{k,l,\lambda,0}| \leqslant \|U^{(p-\lambda+k)}\|_{L_2(\Delta_2)} \left\|\frac{\Delta^p U^{(l)}}{h^{|p|}} \eta\right\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant \|U\|_{W_2^{r+\gamma-1}(\Omega)} X,$$

$$|l| = r, \; |p - \lambda + k| \leqslant r + \gamma - 1, \tag{23}$$

$$|J_{k,l,0,\tau}| \leqslant \left\|\frac{\Delta^p U^{(k)}}{h^{|p|}} \sqrt{\eta}\right\|_{L_2(\Delta_2)} \|U^{(p+l-\tau)}\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant X \|U\|_{W_2^{r+\gamma-1}(\Omega)}$$

$$|\tau| \leqslant |l| \leqslant r, \tag{24}$$

$$|J_{k,l,\lambda,\tau}| \leqslant \|U^{(p+k-\lambda)}\|_{L_2(\Delta_2)} \|U^{(p+l-\tau)}\|_{L_2(\Delta_2)} \leqslant \|U\|^2_{W_2^{r+\gamma-1}(\Omega)}$$

$$|p + k - \lambda|, \quad |p + l - \tau| \leqslant r + \gamma - 1. \tag{33}$$

Этим в данном (безвесовом) случае исчерпываются нужные оценки для $J_{l,k,\lambda,\tau}$.

Аналогично, полагая $\sigma \equiv 1$, выбрасывая во всех выражениях степени ρ и применяя теоремы вложения для безвесовых классов, получим оценки (40) и (41).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, с. 1—480.
2. *Кудрявцев Л. Д.* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений.— Труды МИАН СССР, 1959, 55, с. 1—182.
3. *Никольский С. М., Лизоркин П. О.* О некоторых неравенствах для функций из весовых классов и краевых задачах с сильным вырождением на границе.— ДАН СССР, 1964, 159, № 3, с. 512—515.
4. *Никольский С. М.* Об одном методе покрытия области и неравенства для многочленов от многих переменных.— Math. Cluj. 1966, 8, N 2, p. 345—356.
5. *Никольский С. М.* Some boundary problem for the equations with strong degeneration.— Acta Fac. Rerum. Natur. Univ. Comeniance Equadiff II, 1967, 17, p. 121—127; Slovenska pedagogické nakladatelstvo. Bratislava, 1969.
6. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969, с. 1—480; 2-е изд., 1977; Approximation of functions of several variables and imbeding theorems. Berlin—Heidelberg—New York, 1975, p. 1—420.
7. *Никольский С. М.* Об одном неравенстве для функций из весовых классов. Труды, посвященные шестидесятилетию академика Л. Илиева. София, 1975, с. 131—141.
8. *Никольский С. М.* О краевой задаче первого рода с сильным вырождением.—ДАН СССР, 1975, 222, № 2, с. 281—283.
9. *Успенский С. В.* О теоремах вложения для весовых классов.— Труды МИАН СССР. 1961, 50, с. 282—303.
10. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966, с. 1—351.
11. *Ладыженская О. А.* О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторых многомерных вариационных задач.— ДАН СССР, 1958, 120, № 5, с. 956—959.
12. *Волков Е. А.* О границах подобластей весовых классов Гёльдера и решении в этих классах уравнений Пуассона.— Труды МИАН СССР, 1972, 117, с. 75—99.
13. *Lions J.* Lectures on elliptic differential equations. Bombay: Tata Inst. Fundamental Res., 1957.
14. *В. Р. Портнов.* Две теоремы вложения для пространств $L_{p,\beta}$ и их приложения.— ДАН СССР, 1964, 155, 762—764.