E. E. Bashtova, Small work-load mode in a queueing system with random nonstationary intensity,
Mat. Zametki, 2006, Volume 80, Issue 3, 339–349

https://www.mathnet.ru/eng/mzm2819

Математические заметки

том 80 выпуск 3 сентябрь 2006

УДК 519.21

РЕЖИМ МАЛОЙ ЗАГРУЗКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЛУЧАЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

Е. Е. Баштова

Рассматривается некоторая система массового обслуживания типа $M_tR|GI|1|\infty$ с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком. Изучается ситуация малой загрузки в такой системе. Дано асимптотическое разложение по параметру малости загрузки функции распределения виртуального времени ожидания.

Библиография: 8 названий.

1. Описание модели и формулировка основного результата. Пусть S – некоторая система массового обслуживания типа $M_tR|GI|1|\infty$ с дважды стохастическим пуассоновским процессом (ДСПП) в качестве входящего потока. Многие свойства систем такого типа были изучены в работах [1]–[5]. Этими авторами получены различные неравенства, оценки и результаты о монотонности, касающиеся систем с входящим ДСПП. В настоящей работе будет рассмотрена ситуация малой загрузки в системе S. Для точного описания модели введем несколько определений и обозначений.

Основное вероятностное пространство будем обозначать $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}\}$.

Определение. Случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P}\}$, называется *периодическим*, если все его конечномерные распределения периодичны с одним и тем же периодом.

Пусть $\{\lambda(t,\omega),\ t \in \mathbb{R}\}$ – неотрицательный, ограниченный с вероятностью 1 и периодический с периодом T случайный процесс,

$$\widetilde{\lambda} = \sup_{t\in\mathbb{R},\, \omega\in\Omega} \lambda(t,\omega)$$

и

$$\Lambda(t,\omega) = \int_0^t \lambda(u,\omega)\, du.$$

Для упрощения обозначений в дальнейшем будем опускать зависимость от ω, имея в виду, что $\lambda(t)$ является случайным процессом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00256.

Определим теперь *входящий поток* $\{N(t),\, t \geqslant 0\}$ нашей системы при помощи формулы

$$N(t) = N^*(\Lambda(t)), \tag{1}$$

где $\{N^*(s),\, s \geqslant 0\}$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от $\{\Lambda(t),\, t \in \mathbb{R}\}$.

Все требования входящего потока поступают на один прибор, где и обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ суть независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$.

Основным объектом изучения будет процесс виртуального времени ожидания $W(t)$ в системе S, который, как известно (см., например, [6]), задается следующей формулой:

$$W(t) = W(0) + Y(t) - \inf\{Y(s) : 0 \leqslant s \leqslant t\},$$

где $Y(t) = X(t) - t$, а $X(t) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{N(t)}$. Пусть $\mathscr{H}(t, x) = \mathsf{P}(W(t) \leqslant x)$.

Далее предполагается, что процесс $N(t)$ и времена обслуживания обладают такими свойствами, что для системы S существует предельный периодический режим, т.е. для любого t существует функция распределения

$$H(t, x) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{H}(nT + t, x).$$

В частности [7], предельный периодический режим существует, если процесс $\lambda(t)$ регенерирующий, а

$$\rho = \mathsf{E}\xi_1 \frac{\Lambda(T)}{T} < 1.$$

Кроме того, считаем, что система S функционирует в периодическом режиме. Иначе говоря, работа системы началась в бесконечно далеком прошлом, а входящий поток $N(t)$ определяем формулой (1) для $t \in \mathbb{R}$.

Формализуем условия малой загрузки. Предположим, что наша система является элементом последовательности систем $\{S_\varepsilon\}$ с общей функцией распределения $B(x)$ времен обслуживания. Интенсивность входящего потока $\lambda_\varepsilon(t)$ системы S_ε зависит от ε таким образом, что $\lambda_\varepsilon(t) = \varepsilon\lambda(t)$ и $\varepsilon \to 0$.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{\lambda} < \infty$ и $\mathsf{E}\xi_1^{n^2+1+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$ и натурального n. Тогда существуют функции $F_i(t, y)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что*

$$H_\varepsilon(t, y) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i F_i(t, y) + o(\varepsilon^n), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

Замечание. Для $n = 1$ доказательство было дано Л. Г. Афанасьевой в 1988 г., но не опубликовано; результат для $n = 2$ представлен в [8].

Доказательство теоремы 1 будет разделено на две части. Первая часть состоит из нескольких лемм оценочного характера, в силу которых можно фактически не учитывать требования, поступившие в систему вне некоторого интервала времени, а также считать, что на этом интервале поступило не более n требований. Вторая часть посвящена нескольким индуктивным переходам, которые и позволяют (с учетом первой части) доказать теорему 1.

2. Оценки малых вероятностей. Для системы S_ε, произвольного интервала времени J, натурального k, $y \geqslant 0$ и $s \in \mathbb{R}$ введем события:

$A^\varepsilon_{J,s} = \{\omega :$ среди требований, пришедших на промежутке J,
хотя бы одно находится в системе в момент $s\}$;

$$\begin{aligned} U_{J,k} &= \{\omega : \text{на промежутке } J \text{ пришло } k \text{ требований}\}; \\ U_{J,k}^{x_1\dots x_k} &= \{\omega : \text{на промежутке } J \text{ пришло } k \text{ требований на интервалах} \\ &\qquad (t-x_1, t-x_1+dx_1), \dots, (t-x_k, t-x_k+dx_k), \text{ где } t-x_1, \dots, t-x_k \in J\}; \\ D_y^{x_1\dots x_k} &= \bigcap_{l=1}^{k} \bigcap_{i_1,\dots,i_l} \{\xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_l} < \max(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) + y\}, \qquad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

В определении $D_y^{x_1\dots x_k}$ второе пересечение берется по всем наборам длины l, выбранным из набора $\{1, \dots, k\}$.

Наступление события $D_y^{x_1\dots x_k}$ означает, что требования, пришедшие в моменты $t-x_1, \dots, t-x_k$, имеют короткие времена обслуживания и могут находиться в системе в момент y только из-за большого времени ожидания в точке $\min(t-x_1, \dots, t-x_k)$.

Для фиксированного $t \geqslant 0$ и $c < 0$ обозначим интервалы $\Delta = (t-\varepsilon^c, t)$ и $\Delta^\infty = (-\infty, t-\varepsilon^c]$.

Сначала докажем две леммы, касающиеся требований, которые поступили в интервале Δ^∞. Эти леммы описывают асимптотическое поведение вероятности того, что хотя бы одно требование, пришедшее на промежутке Δ^∞, находится в системе в момент t.

Наряду с последовательностью систем $\{S_\varepsilon\}$ введем еще одну последовательность $\{\widetilde{S}_\varepsilon\}$ систем с пуассоновским входящим потоком интенсивности $\widetilde{\lambda}_\varepsilon = \varepsilon\widetilde{\lambda}$ и такими же временами обслуживания, как в $\{S_\varepsilon\}$. Поскольку $\varepsilon \to 0$, можно считать, что для всех систем последовательности $\{\widetilde{S}_\varepsilon\}$ существуют предельные стационарные режимы.

Обозначим $\eta_\varepsilon = \widetilde{W}_\varepsilon + \xi$, где $\widetilde{W}_\varepsilon$ имеет предельное стационарное распределение процесса виртуального времени ожидания в системе $\widetilde{S}_\varepsilon$, а ξ распределено как время обслуживания в этой системе и не зависит от $\widetilde{W}_\varepsilon$. При доказательстве оценочных лемм некоторые из событий, введенных для системы S_ε, мы будем использовать и для системы $\widetilde{S}_\varepsilon$, помечая их знаком $\sim$.

Лемма 1. *Для любого $c < 0$ выполняется неравенство*

$$\mathsf{P}(A_{\Delta^\infty, t+y}) \leqslant \varepsilon\widetilde{\lambda} \int_{\varepsilon^c}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_\varepsilon > x+y)\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Поскольку интенсивность входящего потока системы $\widetilde{S}_\varepsilon$ больше либо равна интенсивности входящего потока в S_ε, выполняется неравенство

$$\mathsf{P}(A_{\Delta^\infty, t+y}) \leqslant \mathsf{P}(\widetilde{A}_{\Delta^\infty, t+y}).$$

Для $\alpha > 0$ определим интервал $\Delta^\alpha = (t-\varepsilon^c-\alpha, t-\varepsilon^c)$. Тогда

$$\mathsf{P}(\widetilde{A}_{\Delta^\infty, t+y}) = \lim_{\alpha\to\infty} \mathsf{P}(\widetilde{A}_{\Delta^\alpha, t+y})$$

и

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\widetilde{A}_{\Delta^\alpha, t+y}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\widetilde{A}_{\Delta^\alpha, t+y} \cap \widetilde{U}_{\Delta^\alpha, k}) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k\, \frac{(\varepsilon\widetilde{\lambda}\alpha)^k}{k!}\, e^{-\varepsilon\widetilde{\lambda}\alpha} \int_{\varepsilon^c}^{\varepsilon^c+\alpha} \mathsf{P}(\eta_\varepsilon > x+y)\, \frac{dx}{\alpha} \\ &= \varepsilon\widetilde{\lambda} \int_{\varepsilon^c}^{\varepsilon^c+\alpha} \mathsf{P}(\eta_\varepsilon > x+y)\, dx. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\alpha \to \infty$, получаем (3).

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 существует $c \in (-1/(n+1), 0)$ такое, что*

$$\int_{\varepsilon^c}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_\varepsilon > x)\,dx = o(\varepsilon^{n-1}), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Воспользовавшись сначала правилом Лопиталя, а затем неравенством Чебышева, запишем

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n+1} \int_{\varepsilon^c}^{\infty} \mathsf{P}(\eta_\varepsilon > x)\,dx &\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{c\varepsilon^{c-1}\mathsf{P}(\eta > \varepsilon^c)}{(1-n)\varepsilon^{n-2}} \\ &\leqslant \frac{c}{1-n} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-c(n^2+\delta)-n+1+c}\mathsf{E}\eta^{n^2+\delta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Математическое ожидание в (4) конечно в силу существования момента порядка $n^2+1+\delta$ у времен обслуживания. Значит, для

$$-\frac{1}{n+1} < c < -\frac{n-1}{n^2+\delta-1}$$

выражение (4) обращается в 0, что и доказывает лемму.

Следующая лемма оценивает вероятность появления в системе более, чем n требований на интервале Δ.

Лемма 3. *Для любого $c > -1/(n+1)$ выполняется равенство*

$$\mathsf{P}\biggl(\bigcup_{k\geqslant n+1} U_{\Delta,k}\biggr) = o(\varepsilon^n) \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon^{-c}\int_0^{\varepsilon^c} \lambda(t-x)\,dx.$$

Тогда

$$\mathsf{P}\biggl(\bigcup_{k\geqslant n+1} U_{\Delta,k}\biggr) = 1 - \mathsf{E}\sum_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1})^i}{i!}\, e^{-\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1}}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\mathsf{P}\biggl(\bigcup_{k\geqslant n+1} U_{\Delta,k}\biggr) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathsf{E}\frac{\lambda_\varepsilon^{n+1}\varepsilon^{(n+1)c+1}(c+1)}{n!}\, e^{-\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1}} = 0$$

при $c > -1/(n+1)$, так как $\lambda_\varepsilon = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$ почти наверное.

Последняя лемма данного пункта позволит нам считать систему свободной в момент $t-\varepsilon^c$.

Для произвольного $k = 1,\dots,n$ обозначим

$$\Delta_k = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : 0 \leqslant x_i \leqslant \varepsilon^c,\ i = 1,\dots,k\}, \qquad \Delta_k^\infty = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : x_i > \varepsilon^c,\ i = 1,\dots,k\}.$$

Лемма 4. *В условиях теоремы 1 существует $c < 0$ такое, что для любого $k = 1,\dots,n$*

$$\int_{\Delta_k} \mathsf{P}(A_{\Delta,t+y} \cap A_{\Delta^\infty,\min(t-x_1,\dots,t-x_k)} \cap D_y^{x_1\dots x_k} | U_{\Delta,k}^{x_1\dots x_k})\,d\vec{x} = o(\varepsilon^{n-k}), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Так как из наступления события

$$A_{\Delta,t+y} \cap A_{\Delta^\infty,\min(t-x_1,\dots,t-x_k)} \cap D_y^{x_1\dots x_k}$$

при условии, что требования поступали только в моменты $t-x_1,\dots,t-x_k$, следует, что на протяжении интервала Δ система работала без свободных периодов, то можно записать

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_k} &\mathsf{P}(A_{\Delta,t+y} \cap A_{\Delta^\infty,\min(t-x_1,\dots,t-x_k)} \cap D_y^{x_1\dots x_k} | U_{\Delta,k}^{x_1\dots x_k})\, d\vec{x} \\
&\leqslant \int_{\Delta_k} \mathsf{P}\big(W_\varepsilon(\min(t-x_1,\dots,t-x_k)) + \xi_1 + \dots + \xi_k \geqslant \max\{x_1,\dots,x_k\} + y\big)\, d\vec{x} \\
&= \int_{\Delta_k} \mathsf{P}\big(W_\varepsilon(t-\varepsilon^c) - \varepsilon^c + \max\{x_1,\dots,x_k\} \\
&\qquad + \xi_1 + \dots + \xi_k \geqslant \max\{x_1,\dots,x_k\} + y\big)\, d\vec{x} \\
&\leqslant \varepsilon^{ck} \mathsf{P}(\widetilde{W}_\varepsilon + \xi_1 + \dots + \xi_k \geqslant \varepsilon^c).
\end{aligned}$$

Применяя теперь лемму 2, получим, что для

$$-\frac{1}{n+1} < c < -\frac{n-1}{n^2+\delta-1}$$

выполнено утверждение леммы 4.

3. Доказательство теоремы 1. Введем обозначение $\mathbf{\Lambda} = \sigma\{\Lambda(t),\, t \in \mathbb{R}\}$. Учитывая леммы 1–4, можно записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
1 - H^\varepsilon(t,y) &= \mathsf{P}(A_{\Delta,t+y}) + \mathsf{P}(A_{\Delta^\infty,t+y}) - \mathsf{P}(A_{\Delta,t+y} \cap A_{\Delta^\infty,t+y}) \\
&= \sum_{k=1}^n \mathsf{P}(A_{\Delta,t+y} \cap U_{\Delta,k}) + o(\varepsilon^n) \\
&= \mathsf{E} \sum_{k=1}^n \int_{\Delta_k} \frac{\lambda(t-x_1)\cdots\lambda(t-x_k)}{(\lambda_\varepsilon \varepsilon^c)^k}\, \mathsf{P}(A_{\Delta,t+y} | U_{I,k}^{x_1\dots x_k} \cap \mathbf{\Lambda})\, d\vec{x}\, \frac{(\lambda_\varepsilon \varepsilon^{c+1})^k}{k!}\, e^{-\lambda_\varepsilon \varepsilon^{c+1}} \\
&\quad + o(\varepsilon^n) \\
&= \mathsf{E} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} \int_{\Delta_k} \lambda(t-x_1)\cdots\lambda(t-x_k) \mathsf{P}(A_{\Delta,t+y} | U_{\Delta,k}^{x_1\dots x_k} \cap \mathbf{\Lambda})\, d\vec{x}\, e^{-\lambda_\varepsilon \varepsilon^{c+1}} + o(\varepsilon^n) \\
&= \mathsf{E} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} \int_{\Delta_k} \lambda(t-x_1)\cdots\lambda(t-x_k) \mathsf{P}(\overline{D}_y^{x_1\dots x_k})\, d\vec{x}\, e^{-\lambda_\varepsilon \varepsilon^{c+1}} + o(\varepsilon^n). \qquad (5)
\end{aligned}$$

Для удобства последующих рассуждений обозначим

$$L_k = \int_{\Delta_k} \lambda(t-x_1)\cdots\lambda(t-x_k) \mathsf{P}(\overline{D}_y^{x_1\dots x_k})\, dx_1 \cdots dx_k.$$

Тогда (5) перепишется следующим образом:

$$1 - H^\varepsilon(t,y) = \mathsf{E} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon^k}{k!} L_k e^{-\lambda_\varepsilon \varepsilon^{c+1}} + o(\varepsilon^n) = \mathsf{E} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(\lambda_\varepsilon \varepsilon^{c+1})^i}{i!} \frac{\varepsilon^k}{k!} L_k + o(\varepsilon^n).$$

Теперь сформулируем основное вспомогательное утверждение этого пункта.

Основная лемма. *Для любого* n *существуют функции* $F_1^\varepsilon(t,y),\dots,F_n^\varepsilon(t,y)$ *такие, что*

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{(\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1})^i}{i!}\,\frac{\varepsilon^k}{k!}\,L_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon^k}{k!}\,F_k^\varepsilon(t,y) \tag{6}$$

и существуют $\lim_{\varepsilon\to 0}F_k^\varepsilon(t,y)$, *причем*

$$F_k(t,y)=\frac{1}{k!}\lim_{\varepsilon\to 0}F_k^\varepsilon(t,y).$$

Главная трудность доказательства основной леммы состоит в том, что нельзя утверждать, что в (6) каждое слагаемое левой части равно соответствующему слагаемому правой части. Более того, каждое L_k в левой части неограниченно возрастает при $\varepsilon\to 0$ (для $n\geqslant 2$), но, тем не менее, после суммирования остаются ограниченные функции $F_k^\varepsilon(t,y)$, имеющие предел при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство основной леммы. Доказательство проведем по индукции.

1) При $n=1$ левая часть равенства (3) выглядит следующим образом:

$$\varepsilon\mathsf{E}\int_0^{\varepsilon^c}\lambda(t-x)\overline{B}(x+y)\,dx.$$

В этом случае в качестве $F_1^\varepsilon(t,y)$ выступает

$$\mathsf{E}\int_0^{\varepsilon^c}\lambda(t-x)\overline{B}(x+y)\,dx,$$

а

$$F_1(t,y)=\mathsf{E}\int_0^{\infty}\lambda(t-x)\overline{B}(x+y)\,dx.$$

2) Пусть существуют функции $F_1^\varepsilon(t,y),\dots,F_{n-1}^\varepsilon(t,y)$ такие, что

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k-1}(-1)^i\,\frac{(\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1})^i}{i!}\,\frac{\varepsilon^k}{k!}\,L_k=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varepsilon^k}{k!}\,F_k^\varepsilon(t,y). \tag{7}$$

Начнем индуктивный переход:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\,\frac{(\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1})^i}{i!}\,\frac{\varepsilon^k}{k!}\,L_k\\
&\quad=\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k-1}(-1)^i\,\frac{(\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1})^i}{i!}\,\frac{\varepsilon^k}{k!}\,L_k+\mathsf{E}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\,\frac{(\lambda_\varepsilon\varepsilon^{c+1})^{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{\varepsilon^k}{k!}\,L_k+\frac{\varepsilon^n}{n!}\,\mathsf{E}L_n\\
&\quad=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varepsilon^k}{k!}\,F_k^\varepsilon(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varepsilon^n}{n!}\,(-1)^{n-k}C_n^k\mathsf{E}(\lambda_\varepsilon\varepsilon^c)^{n-k}L_k+\frac{\varepsilon^n}{n!}\,\mathsf{E}L_n.
\end{aligned}$$

Положим

$$F_n^\varepsilon(t,y)=\mathsf{E}L_n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^k\mathsf{E}(\lambda_\varepsilon\varepsilon^c)^{n-k}L_k$$

и докажем, что при таком определении $F_n^\varepsilon(t)$ удовлетворяет условиям основной леммы.

В процессе доказательства нам понадобится ряд событий, определений и обозначений.

Пусть $x_1, \dots, x_n \in (0, \varepsilon^c)$ и $\xi_1, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B(x)$. Для каждого набора $(i_1, \dots, i_k) \in (1, \dots, n)$, $k \leqslant n$, определим события

$$Q^{(n)}_{i_1 \dots i_k} = \bigl\{\omega : \text{существует набор} (i_1, \dots, i_l) \subset (i_1, \dots, i_k),\ l \leqslant k, \\ \text{такой, что } \xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_l} > \max(x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) + y\bigr\}$$

и

$$Q^{(n)}_k = \bigcup_{i_1, \dots, i_k} Q^{(n)}_{i_1 \dots i_k}.$$

Тогда

$$\mathsf{E} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} C_n^k (\lambda_\varepsilon \varepsilon^c)^{n-k} L_k \\ = \mathsf{E} \int_{\Delta_k} \lambda(t - x_1) \cdots \lambda(t - x_n) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \sum_{i_1, \dots, i_k} \mathsf{P}(Q^{(n)}_{i_1 \dots i_k})\, dx_1 \cdots dx_n. \qquad (8)$$

Определение. *Оболочкой набора* $(i_1, \dots, i_k)$ будем называть множество всех наборов $(i_1, \dots, i_m)$, $m > k$, таких, что $(i_1, \dots, i_m) \supset (i_1, \dots, i_k)$, и обозначать ее $\langle i_1, \dots, i_k \rangle$.

Введем теперь некоторую систему непересекающихся событий. Пусть для некоторого $j = 1, \dots, 2^n$ и $k_1, \dots, k_j \in \{1, \dots, n\}$ имеется множество наборов $\{(i_1^s, \dots, i_{k_s}^s),\ i_1^s \leqslant \dots \leqslant i_{k_s}^s\}_{s=1}^j$, обладающее таким свойством, что ни один набор не является подмножеством другого, т.е.

$$\forall p, q,\ p > q \qquad (i_1^p, \dots, i_{k_p}^p) \notin \langle i_1^q, \dots, i_{k_q}^q \rangle. \qquad (*)$$

Введем матрицу $I_j = \|\mathrm{i}_{vu}\|$, $1 \leqslant u \leqslant j$, $1 \leqslant v \leqslant n$, для которой $\mathrm{i}_{vu} = v \mathbf{1}_{v \in (i_1^u, \dots, i_{k_u}^u)}$. Пусть теперь

$$C^{(n)}_{I_j} = \Biggl\{ \bigcap_{m=1}^{n-1} \bigcap_{(i_1, \dots, i_m) \notin \langle \bigcup_{s \leqslant j} (i_1^s, \dots, i_{k_s}^s) \rangle} \{\xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_m} < \max(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) + y\} \Biggr\} \\ \cap \Biggl\{ \bigcap_{s \leqslant j} \{\xi_{i_1^s} + \dots + \xi_{i_{k_s}^s} > \max(x_{i_1^s}, \dots, x_{i_{k_s}^s}) + y\} \Biggr\}.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{I_j} C^{(n)}_{I_j} = Q^{(n)}_{n-1},$$

$$\mathsf{P}(\overline{D}_y^{x_1 \dots x_n}) = \sum_{I_j} \mathsf{P}(C^{(n)}_{I_j}) + \mathsf{P}\bigl(\overline{Q}^n_{n-1} \cap \{\xi_1 + \dots + \xi_n > \max(x_1, \dots, x_n) + y\}\bigr). \qquad (9)$$

Таким образом, события $C^{(n)}_{I_j}$ и $\overline{Q}^{n}_{n-1} \cap \{\xi_1 + \cdots + \xi_n > \max(x_1, \ldots, x_n) + y\}$ здесь играют роль элементарных событий: они не пересекаются и перечисляют все случаи, при которых время ожидания в момент t может оказаться больше y. (Напомним, что все рассуждения в данном пункте ведутся с точностью до $o(\varepsilon^n)$ и с учетом лемм 1–4.)

Среди событий $C^{(n)}_{I_j}$ выделим класс событий, вероятности которых интегрируемы на бесконечном интервале.

Обозначим

$$\Xi^{(n)} = \bigcup_{I_j : \bigcup_{s \leqslant j}(i^s_1, \ldots, i^s_{k_s}) = \{1, \ldots, n\}} C^{(n)}_{I_j}.$$

Лемма 5. *Для любого события* $C^{(n)}_{I_j} \in \Xi^{(n)}$

$$\int_{\Delta^\infty_n} \mathsf{P}(C^{(n)}_{I_j})\, d\vec{x} = o(1) \qquad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta^\infty_n} \mathsf{P}(C^{(n)}_{I_j})\, d\vec{x} &\leqslant \int_{\Delta^\infty_n} \mathsf{P}\bigl(\xi_1 + \cdots + \xi_n > \max(x_1, \ldots, x_n)\bigr)\, d\vec{x} \\
&= n \int_{\varepsilon^c}^{\infty} \int_{\varepsilon^c}^{x_n} \cdots \int_{\varepsilon^c}^{x_n} \mathsf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_n > x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \\
&\leqslant n \int_{\varepsilon^c}^{\infty} x^{n-1} \mathsf{P}(\xi_1 + \cdots + \xi_k > x)\, dx = o(1), \qquad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Замечание. Утверждение леммы 5 вместе с доказательством верно и для события $\overline{Q}^{n}_{n-1} \cap \{\xi_1 + \cdots + \xi_n > \max(x_1, \ldots, x_n) + y\}$.

Перейдем теперь к событиям, не принадлежащим классу $\Xi^{(n)}$. Обозначим

$$l^{(n)}_k(C^{(n)}_{I_j}) = \#\{(i_1, \ldots, i_k) : C^{(n)}_{I_j} \subset Q^{(n)}_{i_1 \ldots i_k}\}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \mathsf{P}(Q^{(n)}_{i_1 \ldots i_k}) = \sum_{I_j} \mathsf{P}(C^{(n)}_{I_j}) \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} l^{(n)}_k(C^{(n)}_{I_j}). \tag{10}$$

При сравнении формул (9) и (10) становится ясно, что для доказательства ограниченности $F^\varepsilon_n(t, y)$ достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Для любого события* $C^{(n)}_{I_j} \notin \Xi^{(n)}$

$$\mathscr{L}^{(n)}(C^{(n)}_{I_j}) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} l^{(n)}_k(C^{(n)}_{I_j}) = 1.$$

Доказательство. Снова применим метод индукции.

1) Для $n = 2$ полный набор событий $C_{I_j}^{(n)}$ выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
C^{(2)}_{(1\ 0)} &= \{\xi_1 > x_1 + y,\, \xi_2 < x_2 + y\},\\
C^{(2)}_{(0\ 2)} &= \{\xi_1 < x_1 + y,\, \xi_2 > x_2 + y\},\\
C^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)} &= \{\xi_1 > x_1 + y,\, \xi_2 > x_2 + y\},\\
C^{(2)}_{(1\ 2)} &= \{\xi_1 < x_1 + y,\, \xi_2 < x_2 + y,\, \xi_1 + \xi_2 > \max(x_1, x_2) + y\}.
\end{aligned}
$$

Из этих событий $C^{(2)}_{(1\ 0)} \notin \Xi^1$ и $C^{(2)}_{(0\ 2)} \notin \Xi^1$. Для них $\mathscr{L}^{(2)} = (-1)^0\, 1 = 1$.

2) Пусть для любого события $C_{I_j}^{(n-1)} \notin \Xi^{(n-1)}$ $\mathscr{L}^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = 1$. Любую матрицу I_j можно отнести к одному из следующих пяти типов.

1. Матрица типа $(1\,0\,\ldots\,0)$. Тогда

$$
l_1^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = 1, \quad l_2^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = n-1, \quad \ldots, \quad l_k^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = C_{n-1}^{k-1},
$$
$$
\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} l_k^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} C_{n-1}^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k} C_{n-1}^{k} = 1.
$$

2. Матрица типа

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\;I'\;} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$
\mathscr{L}^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = \mathscr{L}^{(n)}((1\ 0\ \ldots\ 0)) - \mathscr{L}^{(n-1)}(C_{I'}^{(n-1)}) + 1 = 1.
$$

3. Матрица типа

$$
\begin{pmatrix} 1 & & \\ \vdots & \boxed{\;I'\;} & \\ 1 & & \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$
l_1^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = 0, \qquad l_k^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = l_{k-1}^{(n-1)}(C_{I'}^{(n-1)})
$$

и, следовательно,

$$
\mathscr{L}^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = \mathscr{L}^{(n-1)}(C_{I'}^{(n-1)}) = 1.
$$

4. Матрица типа

$$
\begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & \boxed{\;I'\;} & \\ 0 & & \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$
l_1^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = l_1^{(n-1)}(C_{I'}^{(n-1)}), \quad \ldots, \quad l_k^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = l_k^{(n-1)}(C_{I'}^{(n-1)}) + l_{k-1}^{(n-1)}(C_{I'}^{(n-1)}).
$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}l_k^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = l_{n-1}^{(n-1)}(C_{I'}^{(n)}) = 1.$$

5. I_J такова, что $k_1 \neq 1$.

Пусть I_j является матрицей типа 5, т.е. имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{|c|}\hline I^1 \\ \hline I^2 \\ \hline\end{array}\right),$$

где I^1 является матрицей типа 3, а I^2 – типа 4.

Создадим новую матрицу I^3 в два этапа. Сначала образуем матрицу $\hat{I}^3$ по правилу: $\hat{\mathrm{i}}_{vu}^3 = \max(\mathrm{i}_{vu}^1, \mathrm{i}_{vu}^2)$, а затем удалим из множества строк матрицы $\hat{I}^3$ некоторые строки таким образом, чтобы соблюдалось условие ($*$). Получившуюся матрицу и назовем I^3. Матрица I^3 относится к типу 3 и

$$\mathscr{L}^{(n)}(C_{I_j}^{(n)}) = \mathscr{L}^{(n-1)}(C_{I^1}^{(n)}) + \mathscr{L}^{(n-1)}(C_{I^2}^{(n)}) - \mathscr{L}^{(n-1)}(C_{I^3}^{(n)}) = 1.$$

Учитывая леммы 5 и 6, получаем

$$\begin{aligned} F_k^\varepsilon(t) &= \mathsf{E}\int_{\Delta_k} \lambda(t-x_1)\cdots\lambda(t-x_n) \\ &\quad\times\Bigg(\sum_{C_{I_j}^{(k)}\in\Xi^{(k)}}\big(1-\mathscr{L}^{(k)}(C_{I_j}^{(k)})\big)\mathsf{P}(C_{I_j}^{(k)}) + \mathsf{P}(\overline{Q_{k-1}^{(k)}}\cap Q_k^{(k)})\Bigg)\,d\vec{x}, \\ F_k(t) &= \frac{1}{k!}\,\mathsf{E}\int_{\mathbb{R}_+^k} \lambda(t-x_1)\cdots\lambda(t-x_n) \\ &\quad\times\Bigg(\sum_{C_{I_j}^{(k)}\in\Xi^{(k)}}\big(1-\mathscr{L}^{(k)}(C_{I_j}^{(k)})\big)\mathsf{P}(C_{I_j}^{(k)}) + \mathsf{P}(\overline{Q_{k-1}^{(k)}}\cap Q_k^{(k)})\Bigg)\,d\vec{x}. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, доказаны основная лемма и теорема 1.

Подсчет коэффициентов в формуле (11) для больших n представляет собой весьма трудоемкую задачу. Ниже приводится разложение (2) в терминах функций $B(x)$ и $\lambda(x)$ для $n=3$:

$$H_\varepsilon(t,y) = 1-\varepsilon\mathsf{E}Z_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(\mathsf{E}Z_1^2-\mathsf{E}Z_2) + \frac{\varepsilon^3}{6}(\mathsf{E}Z_1^3 - 3\mathsf{E}Z_1Z_2 - 3\mathsf{E}Z_3 + \mathsf{E}Z_4 + \mathsf{E}Z_5) + o(\varepsilon^3),$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int_{\mathbb{R}_+}\lambda(t-x)\overline{B}(x+y)\,dx, \\ Z_2 &= \int_{\mathbb{R}_+^2}\int_0^{x_1+y}\lambda(t-x_1)\lambda(t-x_2)\big[\overline{B}((x_1\vee x_2)-u+y)-\overline{B}(x_2+y)\big]^+\,dB(u)\,d\vec{x}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z_3 &= \int_{\mathbb{R}_+^3}\int_0^{x_1+y} \lambda(t-x_1)\lambda(t-x_2)\lambda(t-x_3)\bigl[\overline{B}((x_1\vee x_2)-u+y)-\overline{B}(x_2+y)\bigr]^+\\
&\quad\times\bigl[\overline{B}((x_1\vee x_3)-u+y)-\overline{B}(x_3+y)\bigr]^+\,dB(u)\,d\vec{x},\\
Z_4 &= \int_{\mathbb{R}_+^3}\int_0^{x_1+y}\int_{(x_1\vee x_2)-u+y}^{x_2+y} \lambda(t-x_1)\lambda(t-x_2)\lambda(t-x_3)\\
&\quad\times\bigl[\overline{B}(((x_1\vee x_3)-u+y)\vee((x_2\vee x_3)-v+y))-\overline{B}(x_3+y)\bigr]^+\,dB(u)\,dB(v)\,d\vec{x},\\
Z_5 &= \int_{\mathbb{R}_+^3}\int_0^{x_1+y}\int_0^{((x_1\vee x_2)-u)\wedge x_2+y} \lambda(t-x_1)\lambda(t-x_2)\lambda(t-x_3)\\
&\quad\times\bigl[\overline{B}(((x_1\vee x_2\vee x_3)-u-v+y)-\overline{B}(((x_1\vee x_3)-u)\wedge((x_3\vee x_3)-v)\wedge x_3+y)\bigr]^+\\
&\quad\times dB(u)\,dB(v)\,d\vec{x}.
\end{aligned}
$$

Автор выражает глубокую благодарность проф. Л. Г. Афанасьевой за постоянное внимание к работе, ценные замечания и указания, существенным образом способствовавшие написанию работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] T. Rolski, “Queues with nonstationary inputs”, *Queueing Systems Theory Appl.*, **5**:1–3 (1989), 113–129.

[2] T. Rolski, “Upper bounds for single server queues with doubly stochastic Poisson arrivals”, *Math. Oper. Res.*, **11**:3 (1986), 442–450.

[3] N. Bäuerle, T. Rolski, “A monotonicity result for the workload in Markov-modulated queues”, *J. Appl. Probab.*, **35** (1998), 741–747.

[4] R. Szekli, R. L. Disney, S. Hur, “$MR/GI/1$ queues with positive correlated arrival stream”, *J. Appl. Probab.*, **31** (1994), 497–514.

[5] C. Chang, X. Chao, M. Pinedo, “Monotonicity result for queues with doubly stochastic Poisson arrivals: Ross’s conjecture”, *Adv. in Appl. Probab.*, **23** (1991), 210–228.

[6] А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, Наука, М., 1972.

[7] Л. Г. Афанасьева, “Стохастическая ограниченность циклических систем обслуживания”, *Проблемы устаревших стохастических моделей*, Труды семинара ВНИИСИ, 1989.

[8] L. G. Afanas’eva, E. E. Bashtova, “The queue with periodic double stochastic Poisson input”, *Transactions of the XXIV Intern. Sem. on Stab. Probl. for Stoch. Models*, Jurmala, 2004.

Е. Е. Баштова
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
03.08.2005